Zbl 025.10703
Erdős, Paul; Lehner, Joseph
The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. (In English)
Duke Math. J. 8, 335-345 (1941). [0012-7094]

n bedeutet stets eine natürliche Zahl. $p(n)$ ist die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen von n in ganze positive Summanden. Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden, werden stets als identisch angesehen. $p_k(n)$ ist die Anzahl derartiger Zerlegungen in höchstens k Summanden. $P(n)$ ist die Anzahl der Zerlegungen von n in lauter verschiedene Summanden. Ferner seien $C = \pi\sqrt{2/3}$, $D = \pi\sqrt{1/3}$. Nach *Hardy* und *Ramanujan* [Asymptotic formulae in combinatory analysis; Proc. London Math. Soc. 17, 75-114 (1918)] ist

$$p(n) \sim 4^{-1}3^{-\frac{1}{2}}n^{-1}\exp(C\sqrt{n}), \tag{1}$$

$$P(n) \sim 4^{-1}3^{-\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{4}}\exp(D\sqrt{n}). \tag{2}$$

Hier werden folgende Ergebnisse mitgeteilt:
I. Für $k = C^{-1}n^{\frac{1}{2}}\log n + xn^{\frac{1}{2}}(x \gtreqless 0$ fest) ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_k(n)}{p(n)} = \exp\left(-\frac{2}{C}e^{-\frac{1}{2}Cx}\right).$$

Daraus folgt insbesondere, indem man x gegen $+\infty$ und $-\infty$ streben läßt: für "fast alle" Zerlegungen von n ist die Anzahl der Summanden asymptotisch gleich $C^{-1}n^{\frac{1}{2}}\log n$.
II. Analog: für fast alle Zerlegungen von n in verschiedenen Summanden ist die Anzahl der Summanden $\sim 2D^{-1}\sqrt{n\log 2}$ (noch etwas schärfer in Theorem 3.1).
III. Für fast alle Zerlegungen von n (in beliebige Summanden) ist die Summe bzw. die Anzahl der verschiedenen Summanden $\sim 6\pi^{-2}n$ bzw. $\sim 2C^{-1}\sqrt{n}$.
IV. Für kleine k gilt: es ist $p_k(n) \sim \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$, gleichmäßig für $k = 0(n^{\frac{1}{3}})$.
I. wird mit Hilfe von (1) bewiesen; der Zusammenhang mit (1) wird durch die Identität

$$p_k(n) = p(n) - \sum_{1\le r\le n-k} p(n-k-r) + \sum_{\substack{1\le r_1<r_2\\ r_1+r_2\le n-2k}} p(n-2k-r_1-r_2) + \cdots$$

geliefert, in welcher die Partialsummen rechts abwechselnd obere und untere Schranken für $p_k(n)$ liefern.
Analog ist der Beweis von II, nur erfordert hier die Herstellung des Zusammenhanges mit (2) wesentlich mehr Scharfsinn. Der Beweis von II wird nur in seinen Hauptzügen gegeben; Dem Ref. scheint es, daß bei Theorem 3.1. $\exp(-Dx)$ durch $\exp(-\frac{1}{2}Dx)$ ersetzt werden soll: weiter gilt (3.73) nur für $u_1 \neq u_2$, die

Glieder mit $u_1 = u_2$ geben aber nachher in (3.74) nur einen unbedeutsamen Betrag.
III wird ohne Beweis mitgeteilt.
Der Beweis von IV ist rein elementar, benutzt also nicht die mit analytischen Hilfsmitteln bewiesenen Abschätzungen (1) und (2).

Jarník

Classification:
11P81 Elementary theory of partitions
11P82 Analytic theory of partitions

©European Mathematical Society & FIZ Karlruhe & Springer-Verlag