Zbl 026.29702

Erdős, Pál

On the integers of the form $x^k + y^k$. (In English)

J. London Math. Soc. 14, 250-254 (1939).

Von dem Verf. war zusammen mit *K.Mahler* [J. London Math. Soc. 13, 134-139 (1938; Zbl 018.34401] auf nicht elementare Art bewiesen worden, daß die Anzahl der durch eine gegebene binäre quadratische Form $f(x, y)$ mit ganzen Koeffizienten, nichtverschwindender Diskriminante und einem Grade $k \geq 3$ mittels positiver x und y eigentlich darstellbaren Zahlen $\leq n$ nicht $o\left(n^{\frac{2}{k}}\right)$ sein kann. Hier wird nun derselbe Satz für den Sonderfall $f(x, y) = x^k + y^k$ mit ungeradem k elementar bewiesen, und zwar durch Verfeinerung eines von *Pillai* [J. London Math. Soc. 3, 56-61 (1928)] zum Beweis einer schwächeren Abschätzung für alle Formen $x^k + y^k$ mit nicht durch 4 teilbarem k eingeführen Verfahrens. Formal lassen sich für jedes a mit $2 < a < \sqrt[k]{n}$ sofort $\frac{1}{2}\varphi(a)$ Darstellungen von Zahlen $r \leq n$ angeben; es kommt aber darauf an, die Häufigkeit des Auftretens eines einzelnen r nach oben abzuschätzen. Das kommt auf die Betrachtung der Lösungszahl der diophantischen Gleichung $x^k + y^k = u^k + v^k$ mit gegebenen $x + y = a_1$, $u + v = a_2$ hinaus. Eine für diesen Zweck brauchbare Abschätzung dieser Lösungszahl nach oben gelingt, wenn für $m = a_1$, und $m = a_2$ die Beziehungen $(m, k) = 1$, $\psi(m) < \sqrt[10]{m}$ bestehen, wo $\psi(m)$ das Produkt der höchsten in m aufgehenden Potenzen derjenigen Primzahlen bedeutet, die nach allen Primteilern k kongruent 1 sind. Es zeigt sich nun, daß die Anzahl der a von der obigen Beschaffenheit mit der Nebenbedingung $(a, k) = 1$, $\psi(a) < \sqrt[10]{a}$ noch hinreichend groß wird, damit sich die halbe Summe der zugehörigen $\varphi(a)$ als $cn^{\frac{2}{k}}$ erweist, wo c eine positive Konstante ist. Unter Berücksichtigung der Abschätzung für die Lösungszahl jener diophantischen Gleichung entsteht nunmehr auch für die Anzahl der verschiedenen darstellbaren Zahlen $\leq n$ eine untere Abschätzung von der Gestalt $cn^{\frac{2}{k}}$, woraus insbesondere die Behauptung folgt.

Weber (Berlin)

Classification:
11E76 Forms of degree higher than two
11D41 Higher degree diophantine equations
11D85 Representation problems of integers