Zbl 032.06503
Erdős, Pál; Fried, K.
On the connection between gaps in power series and the roots of their partial sums. (In English)
Trans. Am. Math. Soc. 62, 53-61 (1947). [0002-9947]

Das Funktionselement (1) $f(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ besitze den Konvergenzradius 1. Gibt es ein positives $\varrho < 1$ und zwei Indexfolgen m_k, n_k mit $m_k < n_k$, $\lim_{k\to\infty} n_k/m_k > 1$ und $|a_n| < \varrho^n$ für $m_k \le n \le n_k$, so werde gesagt, (1) besitze Ostrowskische ϱ-Lücken, kurz Ostrowskische Lücken. Gibt es ein positives $\varrho < 1$, so daß zu jedem $\varrho' > \varrho$ zwei (von ϱ' abhängige) Indexfolgen m_k, n_k mit $m_k < n_k$, $\lim_{k\to\infty} n_k/m_k = \infty$ und $|a_n| < \varrho'^n$ für $m_k \le n \le n_k$ vorhanden sind, so werde gesagt, (1) besitze unendliche Ostrowskische ϱ- Lücken. Mit $A(n, r)$ werde die Anzahl der im Kreis vom Radius r um den Ursprung gelegenen Wurzeln der Gleichung (2)$1+a_1x+\cdots+a_nx^n = 0$ bezeichnet.

Es gilt [vgl. *G. Bourion*, Actual. Sci. Industr. No. 472, Paris 1937; Zbl 017.31302]: (I) Dann und nur dann besitzt (1) Ostrowskische Lücken, wenn es ein $r > 1$ gibt, so daß $\liminf_{n\to\infty} n^{-1}A(n, r) < 1$ ist. Die Verff. geben dafür einen neuen Beweis und leiten dazu den Hilfssatz her. Ist $0 < \varrho < 1 < r < 1/\varrho$, dann gibt es eine positive Konstante $c = c(r, \varrho)$, so daß jede Gleichung (2) mit $|a_k| < \varrho^k$ für $m \le k \le n$ mindestens $c(n - m + 1)$ Wurzeln außerhalb des Kreises vom Radius r um den Ursprung besitzt.

Weiter wird bewiesen: (II) Ist $0 < \varrho < 1$, so besitzt (1) dann und nur dann unendliche Ostrowskische ϱ-Lücken, wenn $\liminf_{n\to\infty} n^{-1}A(n, r) = 0$ ist für alle $r < \varrho^{-1}$. Der Beweis beruht auf dem folgenden Hilfssatz: Besitzt (1) Ostrowskische ϱ-Lücken und ist $\varepsilon > 0$ so gilt $\liminf_{n\to\infty} n_k^{-1}A(n_k, r) \le \sigma + \varepsilon$ für jedes $r < \varrho^{-\lambda}$ mit $\lambda = \varepsilon(\sigma + \varepsilon)^{-1}$, $\sigma = \lim_{k\to\infty} m_k/n_k$.

Zum Schluß wird noch bemerkt, daß sich nach P. Turán der erste der beiden Hilfssätze aus einem Satz von van Vleck ableiten läßt.

Meyer-König (Stuttgart)

Classification:
30B10 Power series (one complex variable)