Zbl 050.27003
Erdős, Pál
On a conjecture of Hammersley. (In English)
J. London Math. Soc. 28, 232-236 (1953).

Es bezeichne $\sum_{n,s}$ die s-te elementar-symmetrische Funktion der Zahlen $1, ..., n$ $f(n)$ sei der größte Wert von s; für den (bei festem n) $\sum_{n,s}$ sein Maximum annimmt. *J.M.Hammersley* (Zbl 044.03902) zeigte

$$(1) \qquad f(n) = n - [\varrho + \frac{1}{2} + [\zeta(2) - \zeta(3)]/\varrho + h/\varrho^2], \quad \varrho = \log(n+1) + \gamma - 3$$

$-1,1 < h < 1,5$ wo γ die Eulersche Konstante und $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ-Funktion bezeichnet, sowie

$$(2.) \qquad \sum_{n,1} < \cdots < \sum_{n,f(n)-1} \leq \sum_{n,f(n)} > \sum_{n,f(n)+1} > \cdots > \sum_{n,n}$$

Er vermutete, daß in (2) auch stets $\sum_{n,f(n)-1} \leq \sum_{n,f(n)}$ gilt, d. h. der Wert s, für den $\sum_{n,s}$ bei gegebenem n sein Maximum annimmt, ist eindeutig bestimmt (und daher $=f(n)$. Der Verf. beweist diese Vermutung. Hierzu zeigt er unter Verwendung des Primzahlsatzes für $n > 10^s$ sogar, daß alle $\sum_{n,s}$, $1 \leq s \leq n$, voneinander verschieden sind. Weiter sei $u_1 < u_2 < \cdots$ eine Folge positiver reeller Zahlen, für die $\sum_i u_i^{-1}$ divergiert und $\sum_i u_i^{-2}$ konvergiert. Werden $\sum_{n,s}$ und $f(n)$ für die n ersten Zahlen dieser Folge wie oben definiert, so gilt analog zu (1):

$$f(n) = n - \left[\sum_{i=1}^{n} u_i^{-1} - \sum_{i=1}^{\infty} u^{-2}(1 + u_i^{-1})^{-1} + 0(1)\right].$$

Der Verf. vermutet, daß für $n \geq n_0 = n_0(\{u_i\})$ auch hier das maximalisierende s eindeutig bestimmt ist, und bemerkt, daß diese Vermutung für den Fall, daß alle u_i natürliche Zahlen sind und einer arithmetischen Progression angehören, zutrifft.

H.-E.Richert

Classification:
11B83 Special sequences of integers and polynomials
05E05 Symmetric functions