
Zbl 051.04003
Erdős, Pál; Rado, R.
A problem on ordered sets. (In English)
J. London Math. Soc. 28, 426-438 (1953).

Désignons par ω_n le plus petit ordinal de puissance $\aleph_n$; Soit S un ensemble ordonné de puisance $\aleph_n$; supposons que l'on soit dans l'un des trois cas suivants: ou bien il existe un ensemble de S qui a pour type ω_n^* (ordre inverse de ω_n), ou bien il existe un ensemble de S qui a pour type d'ordre ω_n, ou bien, quel que soit l'ordinal $\alpha < \omega_n$, il existe des ensembles de S qui ont pour types d'ordre α et α^*. — S'il en set ainsi quel que soit S, les AA. disent que $\aleph_n$ a la propriété P.
Rappelant qu'un cardinal a est dit "régulier" s il n'est pas la somme de cardinaux $< a$ en nombre $< a$, ils démontrent le théorème suivant: Supposons vraie l'égalité $2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1}$ (hypothèse H); alors un cardinal $\aleph_n$ a propriété P si, et seulement si $\aleph_n^-$ est régulier (a^- étant égal au cardinal immédiatement inférieur à a s il existe et égal à s'il n existee pas). C'est évident pour $n = 0$. La démonstration est assez longue et fait intervenir 4 lemmes. D'après les AA., *J.C.Shepherdson* dit avoir démontré de son côté le théorème pour $n = 1$. Une note ajoutée au cours de la correction des épreuves signale que *L.Gillman* a démontré la réciproque à savoir: la proposition "$\aleph_n$ a la propriété P si, et seulement si $\aleph_n^-$ est régulier" entraîne l'hypothèse H.

R.de.Possel

Classification:
04A10 Ordinal and cardinal numbers; generalizations
04A30 Continuum hypothesis and generalizations