Zbl 055.06802

Erdős, Paul; Herzog, Fritz; Piranian, George

On Taylor series of functions regular in Gaier regions. (In English)

Arch. der Math. 5, 39-52 (1954).

Die Verff. beschäftigen sich mit Funktionen $f(z) = \sum a_n z^n$, die in einem Kreis $C_a |z + a| < 1 + a (a > 0)$ regulär sind; C_a wird als "Gaier disc" (G.d.) bezeichnet. Der Ref. bewies (Zbl 047.31203, insbes. S. 327/328 der Arbeit): (1) Ist $f(z)$ in C_a regulär und beschränkt, so gilt $a_n = O(n^{-1/2})$; (2) existiert ferner $\lim f(z)$ für $z \to 1$ in C_a so gilt sogar $a_n = o(n^{-1/2})$. Daran anknüpfend beweisen die Verff. auf kunstvolle Art, daß O in (1) nicht allgemein durch o ersetzt werden kann, und behandeln dann den allgemeineren Fall, daß (3) $(1 - z)^k f(z)$ für reelles k in einem G. d. beschränkt ist. Es ergibt sich hier

$$(4)\quad a_n = O(n^{k-1})\ (k > 1);\ a_n = O(\log n)\ (k = 1);\ a_n = O(n^{(k-1)/2})\ (k < 1);$$

darin kann O nicht allgemein durch o ersetzt werden, jedoch sicher dann, wenn $k \le 1$ ist und $\lim(1 - z)^h f(z)$ für $z \to 1$ in C_a existiert.
Sodann werden, wieder unter der Voraussetzung (3) Abschnitte der Form $S_n = \sum_{j=n}^{2n} |a_j|$ wie folgt abgeschätzt:

$$S_n = O(n^k)\ (k > 1/2);\ S_n = O(\sqrt{n \log n})\ (k = 1/2);\ S_n = O(n^{k/2+1/4})\ (k < 1/2);$$

für $k \ne 1/2$ kann O nicht durch o ersetzt werden.
Auf ähnliche Weise werden einige Konvergenzaussagen gewonnen. Gilt(3) für ein $k < -1/2$ (d. h. es ist $f(z) = O((1 - z)^\alpha)$ $(\alpha > 1/2)$ für $z \to 1$ in C_a], so ist $\sum |a_n| < \infty$ und $\sum n|a_n|^2 < \infty$; die Aussage wird falsch für $k = -1/2$. Gilt (3) für ein $k < 0$, so konvergiert $\sum a_n z^n$ gleichmäßig auf $|z| = 1$, und auch dies wird falsch für $k = 0$.
Ist schließlich $(1 - z)^k f(z)$ $(k < 1)$ in einem Gebiet regulär und beschränkt, da $|z| < 1$ enthält und dessen Rand den $|z| = 1$ in $z = 1$ von der Ordnung p berührt $(p \ge 1)$, so gilt allgemeiner als in (4) stets $a_n = O(n^{(k-1)/p})$.

D.Gaier

Classification:
30B10 Power series (one complex variable)
41A58 Series expansions