Zbl 056.28202

Bagemihl, F.; Erdős, Pál

Rearrangments of C_1-summable series. (In English)

Acta Math. 92, 35-53 (1954). [0001-5962]

Vorgegeben sei eine Reihe (1) $\sum a_n$ mit reellen Gliedern. Ist $\sum a_n = s$ und $\sum |a_n| < \infty$, so gilt für eine beliebige Umordnung (2) $\sum a'_n$ von (1) stets $\sum a'{}_n = s$; ist dagegen $\sum a_n = s$ und $\sum |a_n| = \infty$, so gibt es zu jeder reellen Zahl s' eine Umordnung (2) und (1) mit der Summe s' (Riemannscher Umordnungssatz). Man kann sich nun fragen: Es sei V ein permanentes Summierungsverfahren und $V - \sum a_n = s$; welches ist die Menge R aller Zahlen s', für die es eine Umordnung (2) von (1) mit $V - \sum a'_n = s'$ gibt? Die Verff. stellen sich diese seither unberücksichtigt gebliebene Frage für den Fall $V = C_1$ und lösen sie mit beachtlichem Aufwand an kunstvollen Beweisen vollständig durch die Aussage: R besteht im Falle $V = C_1$ entweder (i) aus einer einzigen Zahl, oder (ii) aus allen Zahlen der Form $\alpha + n\beta$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ fürgewisse Zahlen $\beta \neq 0$ und α oder (iii) aus sämtlichen reellen Zahlen; alle drei Möglichkeiten kommen vor. Darüber hinaus werden Kriterien angegeben, die entscheiden lassen, welcher der genannten Fälle bei Vorgabe einer C_1-summierbaren Reihe (1) eintritt. Es wird nämlich gezeigt, daß mit Ausnahme von zwei Typen C_1-summierbarer Reihen (1) die Menge R sicher aus allen Zahlen der reellen Achse besteht. Typ A: Die Reihe (1) konvergiert absolut: R besteht aus einem Punkt. Typ B: Der Punkt 0 ist isolierter Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}$, es liege etwa in $\langle -\varepsilon, +\varepsilon\rangle$ kein Häufungspunkt $\neq 0$ von $\{a_n\}$; sämtliche $a_n \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ seien in eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ zusammengefaßt, und es sei $\sum_k |a_{n_k}| < \infty$, schließlich sei $\{a_{m_k}\}$ die Folge der nicht in $\{a_{n_k}\}$ enthaltenen Terme von (1) und $\overline{\lim}_k \frac{m_{k+1}}{m_k} > 1$. Für eine C_1-summierbare Reihe (1) von diesem Typ B kann R von der Art (i), (ii) oder (iii) sein; alle drei Fälle sind möglich.

Der Ref. wurde durch Herrn Zeller auf eine Arbeit von *S.Mazur* [Arch. Towarz. Nauk. Lwow 4, 411-424 (1929)] aufmerksam gemacht, die sich teilweise mit der hier referierten überschneidet. Mazur zeigt z.B.: Hat (1) beschränkte Glieder und $V - \sum a_n = s$, so ist $V - \sum a'_n = s$ für jede Umordnung (2) von (1), oder R besteht aus allen Zahlen der reellen Achse; V kann dabei das Verfahren C_k $(k = 1, 2, ...)$ oder das Abel-Verfahren sein.

D.Gaier

Classification:
40A05 Convergence of series and sequences
40G10 Power series methods