Zbl 083.29001

Erdős, Pál

Problems and results on the theory of interpolation. I. (In English)

Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9, 381-388 (1958). [0001-5954]

Es sei $A = \{x_k^{(n)}\}$ eine Dreiecksmatrix von Knotenpunkten, deren n-te Reihe $-1 \leq x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq x_3^{(n)} \cdots \leq x_n^{(n)} = +1$ ist, und es sei

$$L_n(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) l_{kn}(x)$$

das Lagrangesche Interpolationspolynom der Funktion f auf $[-1, +1]$, wobei $l_{kn}(x)$ die Grundpolynome sind. Setzt man $\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)|$ und $\lambda_n = \max_{-1 \leq x \leq +1} \lambda_n(x)$, so sagt ein bekannter Satz von G. Faber aus, daß für alle A stets $\lim_{n\to\infty} lambda_n = +\infty$ gilt. *S. Bernstein* [Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Mat. Estest. Nauk, VII. Ser. No.8, 1025-1050 (1931; Zbl 004.00601)] zeigte, daß zu jeder Matrix A ein Punkt x_0 in $[-1, +1]$ existiert, so daß $(^*)$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_n(x_0) = +\infty$ besteht. Der Verf. beweist sogar, daß für alle $A(^*)$ für fast alle x in $(-1, +1)$ gültig ist, und allgemeiner als Hauptergebnis dieser Arbeit: Es seien A eine beliebige Matrix, $\varepsilon > 0$ und M vorgegebene Zahlen $n > n_0 = n_0\ (\varepsilon, M)$. Dann ist das Maß der Punkte $x(-\infty < x < +\infty)$, für die $\lambda_n(x) \leq M$ gilt, kleiner als ε. Das Verhalten der Lebesgueschen Funktionen $\lambda_n(x)$ ist für die Konvergenz bzw. Divergenz der Folge $L_n(f(x))$ gegen $f(x)$ von Wichtigkeit. Hierzu gibt der Verf. eine Zusammenstellung der Literatur, wie z.B. die Sätze von H. Hahn, G.Grünwald und J. Marcinkiewicz. Dieser Arbeit soll eine weitere folgen, in welcher der Verf. die Vermutung beweisen möchte, daß für jede Matrix A eine stetige Funktion f existiert, für die $\overline{\lim}_{n\to\infty} L_n(f(x)) = +\infty$ für fast alle x gültig ist.

P.L.Butzer

Classification:
41A05 Interpolation
00A07 Problem books