Zbl 095.12202
Dvoretzky, A.; Erdős, Pál
Divergence of random power series. (In English)
Mich. Math. J. 6, 343-347 (1959). [0026-2285]

Es sei g_n das System der Rademacher-Funktionen, und für eine beliebige Folge komplexer Zahlen a_n sei $P(a_n)$ die Menge aller Potenzreihen der Gestalt

$$(t,z) \to \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) a_n z^n, \quad 0 \le t < 1.$$

Angeregt durch eine Arbeit von *A. Dvoretzky* (Zbl 074.12301) wird bewiesen: Sei $c_n \downarrow 0$, $c_n > 0$ und

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{j=0}^{n} c_j^2 / \log 1/c_n \right) > 0.$$

Wenn $|a_n| \ge c_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, dann divergieren fast alle $P(a_n)$ überall auf $|z| = 1$.
[Bem. des Ref.: Damit wird auch (für $|a_n| = 1/\sqrt{n}$) eine Fragestellung von *J.P.Kahane*, Zbl 090.35801 beantwortet.]
Die Bedingung $\sum |a_n|^2 = \infty$ reicht nicht aus, um diesen Satz zu beweisen. Es existiert nämlich eine monotone Folge a_n, welche diese Bedingung erfüllt, so daß fast alle $P(a_n)$ auf jedem Bogen von $|z| = 1$ eine Menge von Konvergenzpunkten haben, die von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Die Konstruktion stützt sich auf folgendes Lemma: Für jedes $\alpha < \beta$ und $\varepsilon > 0$ kann man nur auf $O(2^n)$ Arten die Vorzeichen so wählen, daß

$$\min_{\alpha \le t \le \beta} \max_{1 \le m \le n} \left| \sum_{j=1}^{m} \pm e^{2\pi i j t} \right| > \varepsilon \sqrt{n}.$$

L.Schmetterer

Classification:
40A30 Convergence of series and sequences of functions
30B20 Random power series (one complex variable)

Keywords:
Rademacher function