Zbl 095.26501
Erdős, Pál; Rényi, Alfréd
On Cantor's series with convergent $\sum 1/q_n$. (In English)
Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math. 2, 93-109 (1959).

Die Verff. untersuchen die Cantorschen Entwicklungen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_1 \cdots q_n},$$

wo für jedes $n, q_n \geq 2$ und $\varepsilon_n(x)$ eine der Zahlen $0, 1, ..., q_n - 1$ ist. Im Gegensatz zu ihren früheren Untersuchungen (Zbl 088.25804) setzen die Verff. hier $\sum \frac{1}{q_n} < \infty$ voraus. Dann hat man für fast jedes $x \varepsilon_n(x) \to \infty$ und $\nu_{k,n} x = \text{Card}\{r \geq n : \varepsilon_r(x) = k\} < \infty$ $(k = 1, 2, ...)$. Wird $q_n \leq q_{n+1}$ angenommen und setzt man noch $m_n(x) = \sup_k \nu_{k,n}(x)$, $m(x) = \lim_n m_n(x)$, $R_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{q_j}$, so ist für ein ganzes $s > 0$ und für fast jedes x $m(x) = s$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{s-1} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s < \infty$ gilt. Hat man $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s = \infty$ für jedes s, so ist $m(x) = \infty$ mit der Wahrscheinlichkeit 1. Ein entsprechend starkes Wachstum der Zahlen q_n hat zur Folge, daß die "Ziffern" $\varepsilon_n(x)$ für fast jedes x von einer Stelle an wachsen oder entsprechend stark wachsen. Es wird eine Bedingung aufgestellt dafür, daß für eine gegebene Folge natürlicher Zahlen $k_1 < k_2 < \cdots$ die Menge $S(x)$ aller $\varepsilon_n(x)$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 eine endliche bzw. unendliche Anzahl von k_j enthält. Die Dichte $S(x)$ ist für fast jedes x gleich 0.
Andere Sätze beziehen sich auf die Abschätzung von $\nu_k(x) = \nu_{k,1}(x)$ nach unten. Wesentlich in den Beweisen ist das Lemma von Borel- Cantelli, entweder in seiner klassischen oder in einer von den Verff. entsprechend verallgemeinerten Form.

S.Hartman

Classification:
11K55 Metric theory of other number-theoretic algorithms and expansions