---

**Zbl 169.26601**

**Erdős, Pál; Hajnal, András**

*On decomposition of graphs* (In English)

**Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18, 359-377 (1967). [0001-5954]**

Die Graphen $G_i = (E_i, K_i)$ $(i \in I)$ bestimmen eine Eckenzerlegung von $G = (E, K)$, wenn die Eckenmengen $E_i$ disjunkt sind, $G_i$ von $E_i$ in $G$ aufgespannter Untergraph ist und $\bigcup_{i\in I} E_i = E$; sie bestimmen eine Kantenzerlegung, wenn $E = E_i$ $(i \in I)$ und $\bigcup_{i\in I} K_i = K$. Die kleinste Kardinalzahl $\beta$, so daß $G$ keinen vollständigen Graphen $(\beta)$ enthält, werde mit $\beta(G)$ bezeichnet. Die Verff. gehen von der Aufgabe aus, Graphen in möglichst wenige $G_i$ mit möglichst kleinen $\beta(G_i)$ zu zerlegen.
Aus den angegebenen Konstruktionen folgen die "negativen" Resultate: 1. (Die allgemeine Kontinuumshypothese wird benutzt.) Zu Kardinalzahlen $\alpha \geq \beta > \delta \geq 2$ ($\alpha$ unendlich) existiert ein Graph $G$ mit $\alpha$ Ecken und $\beta(G) = \beta$, so daß zu jeder Eckenzerlegung $G_i$ $(i \in I)$ mit $|I| = \gamma < \alpha$ ein $i \in I$ mit $\beta(G_i) > \delta$ existiert. 2. Das analoge Resultat für Kantenzerlegung bei festem unendlichem $\gamma$ mit $\alpha = (2^{(2^\alpha)^+})^+$ und $\beta = \omega$. Ist andererseits $3 \leq \beta(G) = \beta + 1 < \omega$ und enthält $G$ keinen Graphen mit $\beta + 1$ Ecken und $\binom{\beta+1}{2} - 1$ Kanten, so existiert eine Eckenzerlegung $G_n$ $(n = 1, 2, ...)$ mit $\beta(G_n) \leq \beta$. Die Verff. untersuchen weiter, wann $G$ eine Kantenzerlegung in $\gamma$ Bäume zuläßt. Ist $\gamma$ unendlich, so ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Col}(G) \leq \gamma$ ist. Im Fall $\gamma < \omega$ ist $\mathrm{Col}(G) \leq 2\gamma$ notwendig. ($\mathrm{Col}(G)$ ist die kleinste Kardinalzahl $\beta$, zu der eine Wohlordnung der Eckenmenge existiert, so daß der Grad "nach unten" für alle Ecken $< \beta$ ist.) Vier Probleme werden gestellt.

*H.A.Jung*

Classification:
05C70 Factorization, etc.