Zbl 199.02302

Erdős, Pál; Hajnal, András

Some remarks on set theory. IX: Combinatorial problems in measure theory and set theory (In English)

Mich. Math. J. 11, 1O7-127 (1964). [0026-2285]

Im Folgenden seien stets m und n Kardinalzahlen, k eine natürliche Zahl, u eine reelle Zahl des Intervalls $[0,1]$. Die Menge aller k-elementigen Teilmengen einer Menge S werde mit $[S]^k$ bezeichnet. Dann bedeute $(m,k,u) \to n$ folgendes: Ist $|S| = m$ und F eine Funktion, die jeder Menge X aus $[S]^k$ eine meßbare Teilmenge $F(X) \subset [0,1]$ vom Maß $\geq u$ zugeordnet, dann hat S eine Teilmenge S' mit $[S'] = n$, so daß $\bigcap\{F(X) \mid X \in [S']^k\} \neq \emptyset$ ist. Entsprechend definiert man $(m,k > u) = n$, indem man oben nur $\geq u$ durch $> u$ ersetzt. Diese Partitionsbeziehungen werden hier für $k = 2$ untersucht. Typische Resultate sind:

Theorem 1: r sei eine natürliche Zahl ≥ 2. Dann gilt $(\aleph_0, 2, u) \to r+1$ genau dann, wenn $u > 1 - 1/r$ ist. Theorem 10: Ist $u > 0$ und $m > \aleph_0$, dann gilt $(m,2,u) \to \aleph_0$. Theorem 11 (mit KH): $(\aleph_2, 2, > 0) \to \aleph_0$. Theorem 12 (mit KH): Wenn $m = \aleph_{\alpha+1}$ und $cf(\alpha) > 1$ ist, dann gilt $(m,2,>0) \to \aleph_\alpha$. In der zweiten Hälfte der Arbeit werden auch einige abstraktere Ergebnisse gebracht, unter anderem ein sehr kurzer Beweis des Satzes von *W.T.Tutte* [Am. Math. Mon. 61, 352-353 (1954; Zbl 311.05110)], daß es zu jeder natürlichen Zahl n einen endlichen Graphen der Färbungszahl n gibt, der jedoch kein Dreieck enthält. Ferner: Ist n unendliche Kardinalzahl, k natürliche Zahl, dann gibt es einen Graphen der Färbungszahl $\geq n$, der keinen Kreis der Länge $2i+1$ hat für $1 \leq i \leq k$.

E.Harzheim

Classification:
05D10 Ramsey theory
05C15 Chromatic theory of graphs and maps
04A20 Combinatorial set theory