Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen.

Bernhard Riemann

[Aus dem siebenten Band der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1857.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen.

Bernhard Riemann

[Aus dem siebenten Band der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1857.]

Die *Gauss*'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, als Function ihres vierten Elements x betrachtet, stellt diese Function nur dar, so lange der Modul von x die Einheit nicht überschreitet. Um diese Function in ihrem ganzen Umfange, bei unbeschränkter Veränderlichkeit dieses ihres Arguments, zu untersuchen, bieten die bisherigen Arbeiten über dieselbe zwei Wege dar. Man kann nämlich entweder von einer lineären Differentialgleichung, welcher sie genügt, ausgehen, oder von ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale. Jeder dieser Wege gewährt eigenthümliche Vortheile; jedoch ist bis jetzt, in der reichhaltigen Abhandlung von *Kummer* im 15. Bande des mathematischen Journals von *Crelle* und auch in den noch unveröffentlichten Untersuchungen von *Gauss*, nur der erste betreten, wohl hauptsächlich deshalb, weil die Rechnung mit bestimmten Integralen zwischen complexen Grenzen noch zu wenig ausgebildet war, oder doch nicht als einem grossen Leserkreise geläufig vorausgesetzt werden konnte.

In der folgenden Abhandlung habe ich diese Transcendente nach einer neuen Methode behandelt, welche im Wesentlichen auf jede Function, die einer lineären Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten genügt, anwendbar bleibt. Nach derselben lassen sich die früher zum Theil durch ziemlich mühsame Rechnungen gefundenen Resultate fast unmittelbar aus der Definition ableiten, und dies ist in dem hier vorliegenden Theile dieser Abhandlung geschehen, hauptsächlich in der Absicht für die vielfachen Anwendungen dieser Function in physikalischen und astronomischen Untersuchungen eine bequeme Uebersicht über ihre möglichen Darstellungen zu geben. Es ist nöthig, einige allgemeine Vorbemerkungen über die Betrachtung einer Function bei unbeschränkter Veränderlichkeit ihres Arguments voraufzuschicken.

Betrachtet nun den Werth der unabhängig veränderliche Grösse $x = y+zi$

zur leichteren Auffassung ihrer Veränderlichkeit als vertreten durch einen Punkt einer unendlichen Ebene, dessen rechtwinklige Coordination y, z sind, und denkt sich die Function w in einem Theile dieser Ebene gegeben, so kann sie von dort aus nach einem leicht zu beweisenden Satze nur auf eine Weise der Gleichung $\dfrac{\partial w}{\partial z} = i\dfrac{\partial w}{\partial y}$ gemäss stetig fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung muss selbstredend nicht in blossen Linien geschehen, worauf eine partielle Differentialgleichung nicht angewandt werden könnte, sondern in Flächenstreifen von endlicher Breite. Bei Functionen, welche, wie die hier zu untersuchende, „mehrwerthig" sind oder für denselben Werth von x je nach dem Wege, auf welchem die Fortsetzung geschehen ist, mehrere Werthe annehmen können, giebt es gewisse Punkte der x-Ebene, um welche herum sich die Function in eine andere fortsetzt, wie z. B. bei $\sqrt{(x-a)}$, $\log(x-a)$, $(x-a)^{\mu}$, wenn μ keine ganze Zahl ist, der Punkt a. Wenn man von diesem Punkte a aus sich eine beliebige Linie gezogen denkt, so kann der Werth der Function in der Umgebung von a so gewählt werden, dass er sich ausserhalb dieser Linie überall stetig ändert; sie nimmt aber dann zu beiden Seiten dieser Linie verschiedene Werthe an, so dass die Fortsetztung der Function über diese Linie hinüber eine von der jenseits schon vorhandenen verschiedene Function giebt.

Zur Erleichterung des Ausdrucks sollen die verschiedenen Fortsetzungen Einer Function für denselben Theil der x-Ebene „Zweige" dieser Function genannt werden und ein Werth von x, um welchen herum sich ein Zweig einer Function in einen andern fortsetzt, ein „Verzweigungswerth"; für einen Werth, in welchem keine Verzweigung stattfindet, heisst die Function „einändrig oder monodrom".

1.

Ich bezeichne durch

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\}$$

eine Function von x, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1) Sie ist für alle Werthe von x ausser a, b, c einändrig und endlich.

2) Zwischen je drei Zweigen dieser Function P', P'', P''' findet eine lineäre homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt,

$$c'P' + c''P'' + c'''P''' = 0.$$

3) Die Function lässt sich in die Formen

$$c_{\alpha}P^{(\alpha)} + c_{\alpha'}P^{(\alpha')}, \quad c_{\beta}P^{(\beta)} + c_{\beta'}P^{(\beta')}, \quad c_{\gamma}P^{(\gamma)} + c_{\gamma'}P^{(\gamma')}$$

mit constanten $c_\alpha, c_{\alpha'}, \dots, c_{\gamma'}$ setzen, so dass

$$P^{(\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, \quad P^{(\alpha')}(x-a)^{-\alpha'}$$

für $x = a$ einändrig bleiben und weder Null noch unendlich werden, und ebenso $P^{(\beta)}(x-b)^{-\beta}$, $P^{(\beta')}(x-b)^{-\beta'}$ für $x = b$ und $P^{(\gamma)}(x-c)^{-\gamma}$, $P^{(\gamma')}(x-c)^{-\gamma'}$ für $x = c$. In Betreff der sechs Grössen $\alpha, \alpha', \dots, \gamma'$ wird vorausgesetzt, dass keine der Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl und die Summe aller, $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ sei.

Wie mannigfaltig die Functionen seien, welche diesen Bedingungen genügen, bleibt vorläufig unentschieden und wird sich im Laufe der Untersuchung (Art. 4) ergeben. Zu grösserer Bequemlichkeit des Ausdrucks werde ich x die Veränderliche, a, b, c den ersten, zweiten, dritten Verzweigungswerth und α, α'; β, β'; γ, γ' das erste, zweite, dritte Exponentenpaar der P-function nennen.

2.

Zunächst einige unmittelbare Folgerungen aus der Definition.

In der Function $P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$ können die drei ersten Verticalreihen beliebig unter einander vertauscht werden, sowie auch α mit α', β mit β', γ mit γ'. Es ist ferner

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & x' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$$

wenn man für x' einen rationalen Ausdruck ersten Grades von x setzt, den für $x = a$, b, c die Werthe a', b', c' annimmt.

Für $P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}$, auf welche Function sich demzufolge alle P-functionen mit denselben $\alpha, \alpha', \dots, \gamma'$ zurückführen lassen, werde ich zur Abkürzung auch blos $P\left(\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right)$ setzen.

In einer solchen Function können also von den Grössen α, α'; β, β'; γ, γ' die Grössen jedes Paars unter sich, sowie auch die drei Grössenpaare beliebig mit einander vertauscht werden, wenn man nur in der sich ergebenden P-function als Veränderliche einen rationalen Ausdruck ersten Grades von x substituirt, welche für die zum ersten, zweiten, dritten Exponentenpaar dieser Function gehörigen Werthe von x die Werthe 0, ∞, 1 annimmt. Auf diese Weise erhält man die Function $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$ ausgedrückt durch P-functionen mit den Veränderlichen

$$x, \quad 1-x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1-\frac{1}{x}, \quad \frac{x}{x-1}, \quad \frac{1}{1-x}$$

und denselben Exponenten in anderer Ordnung.

Aus der Definition folgt ferner:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\delta} = P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha+\delta & \beta-\delta & \gamma & x \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta & \gamma' & \end{array}\right\};$$

also auch

$$x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha+\delta & \beta-\delta-\varepsilon & \gamma+\varepsilon & x \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta-\varepsilon & \gamma'+\varepsilon & \end{pmatrix}$$

Durch diese Umformung können zwei Exponenten verschiedener Paare beliebig gegebene Werthe erhalten und als Werthe der Exponenten, da zwischen ihnen die Bedingung $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ stattfindet, jedwede andere eingeführt werden, für welche die drei Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ dieselben sind. Aus diesem Grunde werde ich später zur Erleichterung der Uebersicht durch

$$P(\alpha-\alpha, \beta-\beta', \gamma-\gamma', x)$$

sämmtliche in der Form $x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$ enthaltenen Functionen bezeichnen.

3.

Es ist jetzt vor allen Dingen nöthig, den Verlauf der Function etwas genauer zu untersuchen. Zu diesem Ende denke man sich durch sämmtliche Verzweigungspunkte der Function eine in sich zurücklaufende Linie l gezogen, welche die Gesammtheit der complexen Werthe in zwei Grössengebiete scheidet. Innerhalb jedes von ihnen wird alsdann jeder Zweig der Function stetig und von den übrigen gesondert verlaufen; längs der gemeinschaftlichen Grenzlinie aber werden zwischen den Zweigen des einen und des andern Gebiets in verschiedenen Begrenzungstheilen verschiedene Relationen stattfinden. Zu ihrer bequemeren Darstellung werde ich die mittels des Coefficientensystems $S=\begin{pmatrix} p, & q \\ r, & s \end{pmatrix}$ aus den Grössen t, u gebildeten linearen Ausdrücke $pt+qu$, $rt+su$ durch $(S)\,(t,u)$ bezeichnen. Es möge ferner nach Analogie der von *Gauss* vorgeschlagenen Benennung „positiv laterale Einheit“ für $+i$ als „positive“ Seitenrichtung zu einer gegebenen Richtung diejenige bezeichnet werden, welche zu ihr ebenso liegt, wie $+i$ zu 1 (also bei der üblichen Darstellungsweise der complexen Grössen die linke). Demgemäss macht x einen „positiven Umlauf um einen Verzweigungswerth a“, wenn es sich durch die ganze Begrenzung eines nur diesen und keinen andern Verzweigungswerth enthaltenden Grössengebiets in einer gegen die Richtung von Innen nach Aussen positiv liegenden Richtung bewegt. Es gehe nun die Linie l der Reihe nach durch die Punkte $x = c$, $x = b$, $x = a$, und in dem auf ihrer positiven Seite liegenden Gebiete seien P', P'' zwei in keinem constanten Verhältnisse stehende Zweige der Function P. Jede andere Zweig P''' lässt sich dann, da in der vorausgesetztermassen stattfindenden Gleichung $c'P' + c''P'' + c'''P''' = 0$ c''' nicht verschwinden kann, linear und mit constanten Coefficienten in P' und P'' ausdrücken. Nimmt man nun an, dass P', P'' durch einen positiven Umlauf der Grösse x um a in $(A)\,(P', P'')$, um b in $(B)\,(P', P'')$, um c in $(C)\,(P', P'')$ übergehe, so wird durch die Coefficienten der Systeme (A), (B), (C) die Periodicität der Function völlig bestimmt sein. Zwischen diesen finden aber noch Relationen Statt. Wenn nämlich x das negative Ufer der Linie l durchläuft, so müssen die Functionen P', P'' die vorigen Werthe wieder annehmen, da die durchlaufene Weg negativerseits die ganze Begrenzung eines Grössengebiets bildet, innerhalb dessen diese Functionen allenthalben einändrig sind. Es ist dies aber dasselbe, als ob der Werth x sich von einem der Werthe c, b, a bis zum folgenden auf der positiven Seite fortbewegt, dann aber jedesmal um diesen Werth positiv herum, wobei (P', P'') der Reihe nach in $(C)\,(P', P'')$, $(C)\,(B)\,(P', P'')$, schliesslich in $(C)\,(B)\,(A)\,(P', P'')$ übergeht. Es ist daher

$$(1) \qquad (C)\,(B)\,(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

welche Gleichung vier Bedingungsgleichungen zwischen den zwölf Coefficienten von A, B, C liefert.

Bei der Discussion dieser Bedingungsgleichungen beschränke ich mich, zur Fixirung der Vorstellungen, auf die Function $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$, also auf den Fall, wo $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$, was die Allgemeinheit der Resultate nicht beeinträchtigt, und wähle für die durch 1, ∞, 0 zu ziehende Linie l die Linie der reellen Werthe, welche, um der Reihe nach durch c, b, a zu gehen, von $-\infty$ nach $+\infty$ gerichtet sein muss. Innerhalb des auf der positiven Seite dieser Linie liegenden Gebiets, welches die complexen Werthe mit positiv imaginärem Gliede enthält, sind dann die oben charakterisirten Bestandtheile der Function P, die Grössen P^{α}, $P^{\alpha'}$, P^{β}, $P^{\beta'}$, P^{γ}, $P^{\gamma'}$, einändrige Functionen von x und sind bis auf constante Factoren, welche von der Wahl der Grössen $c_\alpha, c_{\alpha'}, \ldots, c_{\gamma'}$ abhängen, völlig bestimmt, wenn die Function P gegeben ist. Die Functionen P^α, $P^{\alpha'}$ gehen durch einen positive Umlauf dieser Grösse um 0 in $P^\alpha e^{\alpha\,2\pi i}$, $P^{\alpha'} e^{\alpha'\,2\pi i}$ über und ebenso durch einen positiven Umlauf dieser Grösse um ∞ die Functionen P^β, $P^{\beta'}$ in $P^\beta e^{\beta\,2\pi i}$, $P^{\beta'} e^{\beta'\,2\pi i}$ und durch einen positiven Umlauf um 1 die Functionen P^γ, $P^{\gamma'}$ in $P^\gamma e^{\gamma\,2\pi i}$, $P^{\gamma'} e^{\gamma'\,2\pi i}$. Bezeichnet man den Werth, in welchem P durch einen positiven Umlauf von x um 0 übergeht, durch P', so ist, wenn

$$P = c_\alpha P^\alpha + c_{\alpha'} P^{\alpha'}, \quad P' = c_\alpha e^{\alpha\,2\pi i} P^\alpha + c_{\alpha'} e^{\alpha'\,2\pi i} P^{\alpha'}.$$

Diese Ausdrücke haben eine von Null verschiedene Determinante, da n. V. $\alpha - \alpha'$ keine ganze Zahl ist, und folglich können P^α, $P^{\alpha'}$ auch umgekehrt in P, P' also auch in P^β, $P^{\beta'}$; P^γ, $P^{\gamma'}$ lineär mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden. Setzt man nun

$$\begin{aligned} P^\alpha &= \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'}, \\ P^{\alpha'} &= \alpha'_\beta P^\beta + \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_\gamma P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'}, \end{aligned}$$

und zur Abkürzung $\left\{ \begin{matrix} \alpha_\beta, & \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_\beta, & \alpha'_{\beta'} \end{matrix} \right\} = (b)$, $\left\{ \begin{matrix} \alpha_\gamma, & \alpha_{\gamma'} \\ \alpha'_\gamma, & \alpha'_{\gamma'} \end{matrix} \right\} = (c)$ und die inversen Substitutionen von (b) und (c) bezw. $= (b)^{-1}$ und $(c)^{-1}$, so ergeben sich für die Functionen $(P^\alpha, P^{\alpha'})$ die Substitutionen

$$(A) = \left\{ \begin{matrix} e^{\alpha\,2\pi i}, & 0 \\ 0, & e^{\alpha'\,2\pi i} \end{matrix} \right\}, \quad (B) = (b) \left\{ \begin{matrix} e^{\beta\,2\pi i}, & 0 \\ 0, & e^{\beta'\,2\pi i} \end{matrix} \right\} (b)^{-1},$$

$$(C) = (c) \left\{ \begin{matrix} e^{\gamma\,2\pi i}, & 0 \\ 0, & e^{\gamma'\,2\pi i} \end{matrix} \right\} (c)^{-1}.$$

Aus der Gleichung $(C)\,(B)\,(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ folgt nun zunächst, da die Determinante einer zusammengesetzten Substitution dem Producte aus den Determinanten ihrer Componenten gleich ist,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)\,\mathrm{Det}(C) \\ &= e^{(\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma')\,2\pi i} \mathrm{Det}(b)\,\mathrm{Det}(b)^{-1}\,\mathrm{Det}(c)\,\mathrm{Det}(c)^{-1} \end{aligned}$$

oder, da $\mathrm{Det}(b)\,\mathrm{Det}(b)^{-1} = 1$, $\mathrm{Det}(c)\,\mathrm{Det}(c)^{-1} = 1$,

$$(2) \qquad \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = \text{einer ganzen Zahl},$$

womit die obige Annahme, dass diese Exponentensumme $= 1$ sei, vereinbar ist.

Die übrigen drei in $(C)\,(B)\,(A) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ enthaltenen Relationen geben drei Bedingungen für (b) und (c), welche indess leichter auf folgendem Wege gefunden werden.

Wenn x erst um 0 und dann um ∞ negativ herumgeht, so bildet der durchlaufene Weg zugleich einen positiven Umlauf um 1. Der Werth, in welchen P^α dadurch übergeht, ist daher

$$= \alpha_\gamma e^{\gamma\, 2\pi i} P^\gamma + \alpha_{\gamma'} e^{\gamma'\, 2\pi i} P^{\gamma'} = (\alpha_\beta e^{-\beta\, 2\pi i} P^\beta + \alpha_{\beta'} e^{-\beta'\, 2\pi i} P^{\beta'}) e^{-\alpha\, 2\pi i}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem willkürlichen Factor $e^{-\sigma\pi i}$ und die Gleichung

$$\alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'} = \alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'}$$

mit $e^{\sigma\pi i}$ und subtrahirt, so ergiebt sich nach Abwerfung eines allgemeinen Factors

$$\begin{aligned} & \alpha_\gamma \sin(\sigma - \gamma)\pi\, e^{\gamma\pi i} P^\gamma + \alpha_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma')\pi\, e^{\gamma'\pi i} P^{\gamma'} \\ = \; & \alpha_\beta \sin(\sigma + \alpha + \beta)\pi\, e^{-(\alpha+\beta)\pi i} P^\beta + \alpha_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha + \beta')\pi\, e^{-(\alpha+\beta')\pi i} P^{\beta'} \end{aligned}$$

Aus ganz ähnlichen Gründen hat man auch, wenn man überall α' für α setzt, die Gleichung

$$\begin{aligned} & \alpha'_\gamma \sin(\sigma - \gamma)\pi\, e^{\gamma\pi i} P^\gamma + \alpha'_{\gamma'} \sin(\sigma - \gamma')\pi\, e^{\gamma'\pi i} P^{\gamma'} \\ = \; & \alpha'_\beta \sin(\sigma + \alpha' + \beta)\pi\, e^{-(\alpha'+\beta)\pi i} P^\beta + \alpha'_{\beta'} \sin(\sigma + \alpha' + \beta')\pi\, e^{-(\alpha'+\beta')\pi i} P^{\beta'} \end{aligned}$$

mit der willkürlichen Grösse σ. Befreit man beide Gleichungen von einer der Functionen, z. B. $P^{\gamma'}$, indem man σ demgemäss bestimmt, so können sich die resultirenden Gleichungen nur durch einen allgemeinen constanten Factor unterscheiden, da $\dfrac{P^\beta}{P^{\beta'}}$ nicht constant ist. Diese Elimination von $P^{\gamma'}$ giebt daher:

$$(3) \qquad \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} = \frac{\alpha_\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_\beta \sin(\alpha' + \beta + \gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha + \beta' + \gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}}$$

und die ähnliche Elimination von P^γ

$$(3) \qquad \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}} = \frac{\alpha_\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_\beta \sin(\alpha' + \beta + \gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{\alpha_{\beta'} \sin(\alpha + \beta' + \gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\alpha'_{\beta'} \sin(\alpha' + \beta' + \gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},$$

welches die vier gesuchten Relationen sind. Aus ihnen ergeben sich die Verhältnisse der Quotienten $\dfrac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}, \dfrac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}, \dfrac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}, \dfrac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$. Die Gleichheit der beiden aus der zweiten und vierten fliessenden Werthe von $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} : \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$, erhellt leicht als eine Folge aus $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1$ mittelst der Identität $\sin s\pi = \sin(1-s)\pi$.

Demnach sind von den Grössen $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$, $\frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$, $\frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma}$, $\frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$ durch eine von ihnen, z. B. $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$, die übrigen bestimmt und die drei Grössen $\alpha'_{\beta'}$, α'_γ, $\alpha'_{\gamma'}$ durch die fünf Grössen α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$. Diese fünf Grössen aber hängen von den in P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$, P^γ, $P^{\gamma'}$, wenn die Function P gegeben ist, noch willkürlichen Factoren oder vielmehr von deren Verhältnissen ab, und können durch geeignete Bestimmung derselben jedwede endliche Werthe erhalten.

4.

Die soeben gemachte Bemerkung bahnt den Weg zu dem Satze, dass in zwei P-Functionen mit gleichen Exponenten die denselben Exponenten entsprechenden Bestandtheile sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

In der That, ist P_1 eine Function mit denselben Exponenten wie P, so kann man die fünf Grössen α_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$ und α'_β bei beiden gleich annehmen und dann müssen auch die Grössen $\alpha'_{\beta'}$, α'_γ, $\alpha'_{\gamma'}$ bei beiden übereinstimmen. Man hat also gleichzeitig:

$$(P^\alpha, P^{\alpha'}) = (b)\,(P^\beta, P^{\beta'}) = (c)\,(P^\gamma, P^{\gamma'})$$

und

$$(P_1^\alpha, P_1^{\alpha'}) = (b)\,(P_1^\beta, P_1^{\beta'}) = (c)\,(P_1^\gamma, P_1^{\gamma'})$$

folglich

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'} - P^{\alpha'} P_1^\alpha) = \mathrm{Det}(b)(P^\beta P_1^{\beta'} - P^{\beta'} P_1^\beta) = \mathrm{Det}(c)(P^\gamma P_1^{\gamma'} - P^{\gamma'} P_1^\gamma).$$

Von diesen drei Ausdrücken bleibt der erste, mit $x^{-\alpha-\alpha'}$ multiplicirt, offenbar für $x = 0$ einändrig und endlich; ebenso der zweite, mit $x^{\beta+\beta'} = x^{-\alpha-\alpha'-\gamma-\gamma'+1}$ multiplicirt, für $x = \infty$, der dritte, mit $(1-x)^{-\gamma-\gamma'}$ multiplicirt, für $x = 1$, und dasselbe gilt von allen drei Ausdrücken für alle von 0, ∞, 1 verschiedenen Werthe von x; es ist daher

$$(P^\alpha P_1^{\alpha'} - P^{\alpha'} P_1^\alpha) x^{-\alpha-\alpha'} (1-x)^{-\gamma-\gamma'}$$

eine allenthalben stetig und einändrige Function, also eine Constante. Sie ist ferner $= 0$ für $x = \infty$ und muss folglich allenthalben $= 0$ sein.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}} &= \frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}} \\
\frac{P_1^{\beta}}{P^{\beta}} &= \frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}} = \frac{\alpha_\beta P_1^\beta + \alpha_{\beta'} P_1^{\beta'}}{\alpha_\beta P^\beta + \alpha_{\beta'} P^{\beta'}} = \frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}} \\
\frac{P_1^{\gamma}}{P^{\gamma}} &= \frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}} = \frac{\alpha_\gamma P_1^\gamma + \alpha_{\gamma'} P_1^{\gamma'}}{\alpha_\gamma P^\gamma + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'}} = \frac{P_1^{\alpha}}{P^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Die Function $\dfrac{P_1^\alpha}{P^\alpha}$ ist demnach einwerthig und muss überdies allenthalben endlich, also, w. z. b. ist, constant sein, wenn noch bewiesen wird, dass P^α und $P^{\alpha'}$ nicht zugleich für einen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von x verschwinden können.

Zu diesem Ende bemerke man, dass

$$\begin{aligned}
P^\alpha \frac{dP^{\alpha'}}{dx} - P^{\alpha'} \frac{dP^\alpha}{dx} &= \operatorname{Det}(b) \left(P^\beta \frac{dP^{\beta'}}{dx} - P^{\beta'} \frac{dP^\beta}{dx} \right) \\
&= \operatorname{Det}(c) \left(P^\gamma \frac{dP^{\gamma'}}{dx} - P^{\gamma'} \frac{dP^\gamma}{dx} \right),
\end{aligned}$$

und folglich für $x = 0, \infty, 1$ unendlich klein von dem Ordnungen $\alpha + \alpha' - 1$, $\beta + \beta' + 1 = 2 - \alpha - \alpha' - \gamma - \gamma'$, $\gamma + \gamma' - 1$ wird, übrigens aber stetig und einändrig bliebt, so dass

$$\left(P^\alpha \frac{dP^{\alpha'}}{dx} - P^{\alpha'} \frac{dP^\alpha}{dx} \right) x^{-\alpha-\alpha'+1} (1-x)^{-\gamma-\gamma'+1}$$

eine allenthalben stetige und einändrige Function bildet, folglich einen constanten Werth hat. Dieser constante Werth dieser Function ist nothwendig von Null verschieden, weil sonst $\log P^\alpha - \log P^{\alpha'} = \text{const.}$, folglich $\alpha = \alpha'$ sein würde gegen die Voraussetzung; offenbar müsste sie gleich Null werden, wenn für einen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von x P^α und $P^{\alpha'}$ gleichzeitig verschwänden, da $\dfrac{dP^\alpha}{dx}$ $\dfrac{dP^{\alpha'}}{dx}$ als Derivirte einändrig und stetig bleibender Functionen nicht unendlich werden können.

Es werden daher P^α und $P^{\alpha'}$ für keinen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von x gleichzeitig $= 0$, und es bleibt die einwerthige Function

$$\frac{P_1^\alpha}{P^\alpha} = \frac{P_1^{\alpha'}}{P^{\alpha'}} = \frac{P_1^\beta}{P^\beta} = \frac{P_1^{\beta'}}{P^{\beta'}} = \frac{P_1^\gamma}{P^\gamma} = \frac{P_1^{\gamma'}}{P^{\gamma'}}$$

allenthalben endlich, mithin constant, w. z. b. w.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, dass in zwei Zweige Einer P-Function, deren Quotient nicht constant ist, jede andere P-function mit gleichen Exponenten sich lineär mit constanten Coefficienten ausdrücken lässt und dass durch die Art. 1 geforderten Eigenschaften die zu definirende Function bis auf zwei lineär in ihr enthaltene Constanten völlig bestimmt ist. Diese werden in jedem Falle leicht aus den Werthen der Function für specielle Werthe der Veränderlichen gefunden, am bequemsten, indem man die Veränderliche einem der Verzweigungswerthe gleich setzt.

Ob es immer eine jenen Bedingungen genügende Function gebe, bleibt freilich noch unentschieden, wird sich aber später durch die wirkliche Darstellung der Function mittelst bestimmter Integrale und hypergeometrischer Reihen erledigen und bedarf daher keiner besondern Untersuchung.

5.

Ausser den für jedwede Werthe der Exponenten möglichen Transformationen des Art. 2 ergeben sich aus der Definition noch leicht die beiden Transformationen:

$$\text{(A)} \qquad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & x \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & \sqrt{x} \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

wo nach dem Früheren $\beta + \beta' + \gamma + \gamma' = \frac{1}{2}$ sein muss, und

$$\text{(B)} \qquad P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \gamma & x \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \\ \gamma & \gamma & \gamma & \sqrt[3]{x} \\ \gamma' & \gamma' & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

wo $\gamma + \gamma' = \frac{1}{3}$ und ϱ eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Um sämmtliche Functionen, welche sich mit Hülfe dieser Transformationen auf einander zurückführen lassen, bequem zu übersehen, ist es zweckmässig, statt der Exponenten ihre Differenzen einzuführen und, wie oben vorgeschlagen, durch $P(\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', x)$ sämmtliche in der Form $x^\delta (1-x)^\varepsilon P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$ enthaltenen Functionen zu bezeichnen, wobei $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ die erste, zweite, dritte Exponentendifferenz genannt werden mag.

Aus den Formeln im Art. 2 folgt dann, dass in der Function $P(\lambda, \mu, \nu, x)$ die Grössen λ, μ, ν beliebig in's Entgegengesetzte verwandelt und beliebig unter einander vertauscht werden können. Die Veränderliche nimmt dabei einen der 6 Werthe

$$x, \quad 1-x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1-\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x}{x-1}$$

an, und zwar haben von den 48 auf diese Weise sich ergebenden P-functionen je *acht*, welche durch blosse Zeichenänderung der Grössen λ, μ, ν aus einander hervorgehen, dieselbe Veränderliche.

Von den in diesem Art. angegebenen Transformationen A und B ist die erste anwendbar, wenn von den Exponentendifferenzen entweder eine gleich $\frac{1}{2}$ oder zwei einander gleich sind, die zweite, wenn von ihnen entweder zwei $= \frac{1}{3}$ oder alle drei einander gleich sind. Durch successive Anwendung dieser Transformationen erhält man daher durch einander ausgedrückt:

I.

$$P(\mu, \nu, \tfrac{1}{2}, x_2), \quad P(\mu, 2\nu, \mu, x_1) \quad \text{und} \quad P(\nu, 2\mu, \nu, x_3),$$

wobei $\sqrt{(1 - x_2)} = 1 - 2x_1$, $\sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{x_2}\right)} = 1 - 2x_3$, also

$$x_2 = 4x_1(1 - x_1) = \frac{1}{4x_3(1 - x_3)} \text{ sich ergiebt.}$$

II.

$$P(\nu, \nu, \nu, x_3), \quad P\left(\nu, \frac{\nu}{2}, \tfrac{1}{2}, x_2\right), \quad P\left(\frac{\nu}{2}, 2\nu, \frac{\nu}{2}, x_1\right),$$

$$P(\tfrac{1}{3}, \nu, \tfrac{1}{3}, x_4), \quad P\left(\tfrac{1}{3}, \frac{\nu}{2}, \tfrac{1}{2}, x_5\right), \quad P\left(\frac{\nu}{2}, \tfrac{2}{3}, \frac{\nu}{2}, x_6\right),$$

wenn $1 - \dfrac{1}{x_4} = \left(\dfrac{x_3 + \varrho}{x_3 + \varrho^2}\right)^3$ und folglich $\dfrac{1}{x_4} = \dfrac{3(\varrho - \varrho^2)x_3(1 - x_3)}{(\varrho^2 + x_3)^3}$,

$x_4(1 - x_4) = \dfrac{(\varrho + x_3)^3(\varrho^2 + x_3)^3}{27x_3^2(1 - x_3)^2} = \dfrac{(1 - x_3(1 - x_3))^3}{27x_3^2(1 - x_3)^2}$; ferner nach I.

$$4x_4(1 - x_4) = x_5 = \frac{1}{4x_6(1 - x_6)}, \quad 4x_3(1 - x_3) = x_2 = \frac{1}{4x_1(1 - x_1)}.$$

III.

$$P(\nu, \nu, \tfrac{1}{2}, x_2), \quad P(\nu, 2\nu, \nu, x_1),$$

$$P(\tfrac{1}{4}, \nu, \tfrac{1}{2}, x_3), \quad P(\tfrac{1}{4}, 2\nu, \tfrac{1}{4}, x_4),$$

wenn $x_3 = \frac{1}{4}\left(2 - x_2 - \dfrac{1}{x_2}\right) = 4x_4(1 - x_4)$, $x_2 = 4x_1(1 - x_1)$.

Alle diese Function können noch mittelst der allgemeinen Transformationen umgeformt und dadurch ihre Exponentendifferenzen beliebig vertauscht und mit beliebigen Vorzeichen versehen werden. Ausser den beiden Transcendenten II. und III. lässt, wenn eine Exponentendifferenz willkürlich bleiben soll, nur noch die Function $P(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = P(\nu, 1, \nu)$ eine häufigere Wiederholung der Transformationen A und B zu, welche indess, da

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ \nu & -\nu & 1 & x \end{pmatrix} = \text{const.}x^\nu + \text{const.}',$$

auf ganz elementare Formeln führt.

In der That ist die Transformation B nur anwendbar auf $P(\nu, \nu, \nu)$ oder $P(\frac{1}{3}, \nu, \frac{1}{3})$, also nur auf die Transcendente II.; die Transformation A aber lässt sich häufiger als in I. nur wiederholen, wenn entweder von den Grössen μ, ν 2μ, 2ν eine gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt oder eine der Gleichunge $\mu = \nu$, $\mu = 2\nu$, $\nu = 2\mu$ angenommen wird. Von diesen Annahmen führt $\mu = 2\nu$ oder $\nu = 2\mu$ auf die Transcendente II., $\mu = \nu$, sowie 2μ oder $2\nu = \frac{1}{2}$ auf die Transcendente III., endlich μ oder $\nu = \frac{1}{2}$ auf die Function $P(\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke, welche man durch diese Transformationen für jede der Transcendenten I–III. erhält, ergiebt sich, wenn man berücksichtigt, dass in den obigen P-functionen als Veränderliche alle Wurzeln der Gleichungen, durch welche sie bestimmt werden, zulässig sind und jede Wurzel zu einem Systeme von 6 Werthen gehört, welche mittelst der allgemeinen Transformation für einander als Veränderliche eingeführt werden können.

Es führen aber im Falle I. die beiden Werthe von x_1 und x_3, welche zu einem gegebenen x_2 gehören, auf dasselbe System von 6 Werthen, so dass jede der Functionen I. durch P-functionen mit $6 \,.\, 3 = 18$ verschiedenen Veränderlichen ausgedrückt werden kann.

Im Falle II. führen von den zu einem gegebenen Werthe von x_5 gehörigen Werthen die beiden Werthe von x_6 und x_4, die 6 Werthe von x_3 und von den 6 Werthen von x_1 je zwei zu demselben Systeme von 6 Werthen, während die drei Werthe von x_2 zu drei verschiedenen Systemem von je 6 Werthen führen. Es liefern also x_1 und x_2 je drei und x_3, x_4, x_5, x_6 je ein System von 6 Werthen, also alle zusammen $6 \,.\, 10 = 60$ Werthe, durch deren P-functionen sich jede der Functionen II. ausdrücken lässt.

Im Falle III. endlich liefern x_3, die beiden Werthe von x_2, die beiden Werthe von x_4, und von den vier Werthen von x_1 je zwei ein System von 6 Werthen, so dass jede der Functionen III. durch P-functionen von $6 \,.\, 5 = 30$ verschiedenen Veränderlichen darstellbar ist.

In jeder P-function können nun ohne Aenderung der Veränderlichen mittelst der allgemeinen Transformationen der Exponentendifferenzen beliebige Vorzeichen erhalten, und also kann, da keine dieser Exponentendifferenzen $= 0$ ist, eine und dieselbe Function auf 8 verschiedene Arten als P-function derselben Veränderlichen dargestellt werden. Die Anzahl sämmtliche Ausdrücke beträgt also im Falle I. 8 . 6 . 3 = 144, im Falle II. 8 . 6 . 10 = 480, im Falle III. 8 . 6 . 5 = 240.

6.

Wenn man sämmtliche Exponenten einer P-function um ganze Zahlen ändert, so bleiben in den Gleichungen (3) Art. 3 die Grössen

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\, e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma)\pi\, e^{-\alpha'\pi i}},$$

ungeändert.

Sind daher in den Functionen $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{pmatrix}$, $P_1\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & x \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & \end{pmatrix}$ die entsprechenden Exponenten α_1 und α, etc., um ganze Zahlen verschieden, so kann man die acht Grössen $(\alpha_\beta)_1$, $(\alpha'_\beta)_1$, $(\alpha_{\beta'})_1, \dots$ den acht Grössen α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}, \dots$ gleich annehmen, da aus der Gleichheit der fünf willkürlichen die Gleichheit der drei übrigen folgt.

Nach der im Art. 4 angewandten Schlussweise folgt hieraus:

$$(P^\alpha P_1^{\alpha_1'} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1}) = \mathrm{Det}(b)(P^\beta P_1^{\beta_1'} - P^{\beta'} P_1^{\beta_1}) = \mathrm{Det}(c)(P^\gamma P_1^{\gamma_1'} - P^{\gamma'} P_1^{\gamma_1});$$

und wenn man von den Grössen $\alpha+\alpha_1'$ und $\alpha_1+\alpha'$, $\beta+\beta_1'$ und $\beta_1+\beta'$, $\gamma+\gamma_1'$ und $\gamma_1+\gamma'$ diejenigen Grössen jedes Paars, welche um eine *positive* ganze Zahl kleiner sind, als die andern, durch $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ bezeichnet, so ist

$$(P^\alpha P_1^{\alpha_1'} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1}) x^{-\overline{\alpha}} (1-x)^{-\overline{\gamma}}$$

eine Function von x, welche einändrig und endlich bleibt für $x=0$, $x=1$ und alle übrigen endlichen Werthe von x, für $x=\infty$ aber unendlich wird von der Ordnung $-\overline{\alpha}-\overline{\gamma}-\overline{\beta}$, folglich eine ganze Function F vom Grade $-\overline{\alpha}-\overline{\beta}-\overline{\gamma}$.

Man bezeichne nun, wie früher, die Exponentendifferenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ durch λ, μ, ν. In Betreff dieser ergiebt sich zunächst: ihre Summe ändert sich um eine gerade Zahl, wenn sich sämmtliche Exponenten um ganze Zahlen ändern; denn sie übertrifft die Summe sämmtlicher Exponenten, welche unverändert $=1$ bleibt, um

$$-2(\alpha'+\beta'+\gamma'),$$

welche Grösse sich dabei um eine gerade Zahl ändert. Sie können sich aber dabei um jedwede ganze Zahlen ändern, deren Summe gerade ist. Bezeichnet man ferner $\alpha_1 - \alpha_1'$, $\beta_1 - \beta_1'$, $\gamma_1 - \gamma_1'$, durch λ_1, μ_1, ν_1 und durch $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$, $\Delta\nu$ die absoluten Werthe der Differenzen $\lambda - \lambda_1$, $\mu - \mu_1$, $\nu - \nu_1$, so ist von den Grössen $\alpha + \alpha_1'$ und $\alpha' + \alpha_1$ diejenige, welche um die positive Zahl $\Delta\lambda$ kleiner ist als die andere

$$= \frac{\alpha + \alpha_1' + \alpha' + \alpha_1}{2} - \frac{\Delta\lambda}{2},$$

also

$$\begin{aligned} -\overline{\alpha} &= \frac{\Delta\lambda}{2} - \frac{\alpha + \alpha_1' + \alpha' + \alpha_1}{2} \text{ und ebenso} \\ -\overline{\beta} &= \frac{\Delta\mu}{2} - \frac{\beta + \beta_1' + \beta' + \beta_1}{2} \\ -\overline{\gamma} &= \frac{\Delta\nu}{2} - \frac{\gamma + \gamma_1' + \gamma' + \gamma_1}{2}. \end{aligned}$$

Der Grad der ganzen Function F, welcher gleich der Summe dieser Grössen ist, ergiebt sich daher

$$= \frac{\Delta\lambda + \Delta\mu + \Delta\nu}{2} - 1.$$

7.

Sind jetzt $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$, $P_1\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1' & x \end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' & x \end{pmatrix}$ drei Functionen, in welchen sich die entsprechenden Exponenten um ganze Zahlen unterscheiden, so fliesst aus diesem Satze mittelst der identischen Gleichung

$$\begin{gathered} P^{\alpha}(P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2'} - P_1^{\alpha_1'} P_2^{\alpha_2}) + P_1^{\alpha_1}(P_2^{\alpha_2} P^{\alpha'} - P_2^{\alpha_2'} P^{\alpha}) \\ + P_2^{\alpha_2}(P^{\alpha} P_1^{\alpha_1'} - P^{\alpha'} P_1^{\alpha_1}) = 0 \end{gathered}$$

die wichtige Satz, das zwischen ihren entsprechende Gliedern eine lineäre homogene Gleichung stattfindet, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, und dass also

> „sämmtliche P-functionen, deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, sich in zwei beliebige von ihnen lineär mit rationalen Functionen von x als Coefficienten ausdrücken lassen".

Eine specielle Folge aus den Beweisgründen dieses Satzes ist, dass sich die zweite Differentialquotient einer P-function lineär mit rationalen Functionen als Coefficienten in den ersten und die Function selbst ausdrücken lässt, und also die Function einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt.

Beschränkt man sich, um ihre Ableitung möglichst zu vereinfachen, auf den Fall $\gamma = 0$, auf welchen der allgemeine nach Art. 2 leicht zurückgeführt wird, und setzt $P = y$, $P^{\alpha} = y'$, $P^{\alpha'} = y''$, so ergiebt sich, dass die Functionen

$$y' \frac{dy''}{d \log x} - y'' \frac{dy'}{d \log x},$$

$$\frac{d^2 y'}{d \log x^2} y'' - \frac{d^2 y''}{d \log x^2} y',$$

$$\frac{dy'}{d \log x} \frac{d^2 y''}{d \log x^2} - \frac{dy''}{d \log x} \frac{d^2 y'}{d \log x^2}$$

mit $x^{-\alpha-\alpha'}(1-x)^{-\gamma'+2}$ multiplicirt, endlich und einändrig bleiben für endliche Werthe von x und unendlich von der ersten Ordnung werden für $x = \infty$, und dass überdies das erste dieser Producte für $x = 1$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Für

$$y = \text{const.}' y' + \text{const.}'' y''$$

findet daher eine Gleichung von der Form statt

$$(1-x) \frac{d^2 y}{d \log x^2} - (A + Bx) \frac{dy}{d \log x} + (A' - B'x) y = 0,$$

in welcher A, B, A', B', noch zu bestimmende Constanten bezeichnen.

Nach der Methode der unbestimmten Coefficienten lässt sich eine Lösung dieser Differentialgleichung nach um 1 steigenden oder fallenden Potenzen in eine Reihe $\sum a_n x^n$ entwickeln, und zwar wird der Exponent μ des Anfangsgliedes im ersten Falle, wo er der niedrigste ist, durch die Gleichung

$$\mu\mu - A\mu + A' = 0,$$

und im zweiten, wo er der höchste ist, durch die Gleichung

$$\mu\mu + B\mu + B' = 0,$$

bestimmt. Die Wurzeln der ersteren Gleichung müssen α und α', die der letztern $-\beta$ und $-\beta'$ sein und folglich ist

$$A = \alpha + \alpha', \quad A' = \alpha\alpha',$$

$$B = \beta + \beta', \quad B' = \beta\beta',$$

und es genügt die Function $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix} = y$ der Differentialgleichung

$$(1-x)\frac{d^2y}{d\log x^2} - (\alpha+\alpha'+(\beta+\beta')x)\frac{dy}{d\log x} + (\alpha\alpha'-\beta\beta'x)y = 0.$$

Es bestimmen sich ferner die Coefficienten aus einem von ihnen mittelst der Recursionsformel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\beta)(n+\beta')}{(n+1-\alpha)(n+1-\alpha')},$$

welcher

$$a_n = \frac{\text{Const.}}{\prod(n-\alpha)\prod(n-\alpha')\prod(-n-\beta)\prod(-n-\beta')}$$

genügt.

Demnach bildet die Reihe

$$y = \text{Const.}\sum\frac{x^n}{\prod(n-\alpha)\prod(n-\alpha')\prod(-n-\beta)\prod(-n-\beta')},$$

sowohl wenn die Exponenten von α oder α' an um die Einheit steigen, als auch wenn sie von $-\beta$ oder $-\beta'$ an um die Einheit fallen, eine Lösung der Differentialgleichung und zwar bezw. diejenigen particularen Lösungen, welche oben durch P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$ bezeichnet worden sind.

Nach *Gauss*, welcher durch $F(a,b,c,x)$ eine Reihe bezeichnet, in welche der Quotient das $(n+1)$ ten Gliedes in das folgende

$$= \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}x$$

und das erste Glied $= 1$ ist, lässt sich dieses Resultat für den einfachsten Fall, für $\alpha = 0$, so ausdrücken

$$P^\alpha\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix} = \text{Const.}\,F(\beta,\beta',1-\alpha',x)$$

oder

$$F(a,b,c,x) = P^\alpha\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \\ 1-c & b & c-a-b & x \end{pmatrix}.$$

Aus demselben erhält man auch leicht einen Ausdruck der P-function durch eine bestimmtes Integral, indem man in dem allgemeinen Gliede der Reihe für die Π-functionen ein *Euler*'sches Integral zweiter Gattung einführt und dann die Ordnung der Summation und Integration vertauscht. Auf diese Weise findet man, dass das Integral

$$x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int s^{-\alpha'-\beta'-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta'-\gamma}\,ds$$

von einem der vier Werthe 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ bis zu einem dieser vier Werthe auf beliebigem Wege erstreckt eine Function $P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix}$, bildet und bei passender Wahl dieser Grenzwerthe und des Weges von einem zum andern jede der sechs Functionen $P^{\alpha}, P^{\beta}, \ldots, P^{\gamma'}$ darstellt. Es lässt sich aber auch direct zeigen, dass das Integral die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Function besitzt. Es wird dies in der Folge geschehen, wo dieser Ausdruck der P-function durch ein bestimmtes Integral zur Bestimmung der in $P^{\alpha}, P^{\alpha'}, \ldots$ noch willkürlich gebliebenen Factoren benutzt werden soll; und ich bemerke hier nur noch, dass es, um diesen Ausdruck allgemein anwendbar zu machen, einer Modification des Weges der Integration bedarf, wenn die Function unter dem Integralzeichen für einen der Werthe 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ so unendlich wird, dass sie die Integration bis an denselben nicht zulässt.

8.

Zufolge der im Art. 2 und dem vorigen erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned} P^{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & x \end{pmatrix} &= x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}P^{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & x \end{pmatrix} \\ &= \text{Const.}x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}F(\beta+\alpha+\gamma, \beta'+\alpha+\gamma, \alpha-\alpha'+1, x) \end{aligned}$$

fliesst aus jedem Ausdrucke einer Function durch eine P-function eine Entwicklung derselben in eine hypergeometrische Reihe, welche nach steigenden Potenzen der Veränderlichen in dieser P-function fortschreitet. Nach Art. 5 giebt es 8 Darstellungen einer Function durch P-functionen mit derselben Veränderlichen, welche durch Vertauschung zusammengehöriger Exponenten aus einander erhalten werden, also z. B. 8 Darstellungen mit der Veränderlichen x. Von diesen liefern aber je zwei, welche durch Vertauschung ihres zweiten Paares, β und β' aus einander entstehen, dieselbe Entwicklung; man erhält also vier Entwicklungen nach steigenden Potenzen von x, von denen zwei, welche durch Vertauschung von γ und γ' aus einander erhalten werden, die Function P^{α}, die beiden andern die Function $P^{\alpha'}$ darstellen. Diese vier Entwicklungen convergiren, so lange der Modul von $x < 1$, und divergiren, wenn er grösser als 1 ist, während die vier Reihen nach fallenden Potenzen von x, welche P^{β} und $P^{\beta'}$ darstellen, sich umgekehrt verhalten. Für den Fall, wenn der Modul von x gleich 1 ist, folgt aus der *Fourier*'schen Reihe, dass die Reihen zu convergiren aufhören, wenn die Function für $x = 1$ unendlich von einer höhern Ordnung als der ersten wird, aber convergent bleiben, wenn sie nur unendlich von einer niedrigern Ordnung als 1 wird oder endlich bleibt. Es convergirt also auch in diesem Falle nur die Hälfte der 8 Entwicklungen nach Potenzen von x, so lange der reelle Theil von $\gamma' - \gamma$ nicht zwischen -1 und $+1$ liegt, und sie convergiren sämmtlich, sobald dieses stattfindet.

Demnach hat man zur Darstellung einer P-function in Allgemeinen 24 verschiedene hypergeometrische Reihen, welche nach steigenden oder fallenden Potenzen von drei verschiedenen Grössen fortschreiten, und von denen für einen gegebenen Werth von x jedenfalls die Hälfte, also zwölf convergiren. Im Falle I. Art. 5 sind alle diese Anzahlen mit 3, Im Falle II. mit 10, im Falle III. mit 5 zu multipiciren. Am geeignetsten zur numerischen Rechnung werden von diesen Reihen meistens diejenigen sein, deren viertes Element den kleinsten Modul hat.

Was die Ausdrücke einer P-function durch bestimmte Integrale betrifft, die sich durch die am Schlusse des vorigen Art. aus den Transformationen des Art. 5 ableiten lassen, so sind diese Ausdrücke sämmtlich von einander verschieden. Man erhält also im Allgemeinen 48, im Falle I. 144, im Falle II. 480, im Falle III. 240 bestimmte Integrale, welche dasselbe Glied einer P-function darstellen und also zu einander ein von x unabhängiges Verhältniss haben. Von diesen lassen sich je 24, welche durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen der Exponenten aus einander hervorgehen, auch in einander transformiren durch eine solche Substitution ersten Grades, dass für irgend drei von den Werthen 0, 1, ∞, $\dfrac{1}{x}$ der Integrationsveränderlichen s die neue Veränderliche die Werthe 0, 1, ∞ annimmt. Die übrigen Gleichungen erfordern, soweit ich sie untersucht habe, zu ihrer Bestätigung durch Methoden der Integralrechnung die Transformation von vielfachen Integralen.