Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 37 (1996), No. 1, 119-148.

Spectre de l'algèbre de Weyl quantique

Laurent Rigal
Université Pierre et Marie Curie, U.F.R. 920, boite 172
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Abstract. In this paper, we classify the prime spectrum of the quantized Weyl algebra $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ arising from the quantum differential calculus of G. Maltsiniotis on the quantum multiparameter space. $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ is an algebra of differential operators on this space. It is shown that the set of non-maximal prime ideals is finite of cardinality $\frac{1}{2}[(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n]$. As a consequence, we prove that $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ is catenary. We also describe explicitly the automorphism group of this algebra.

MSC 1991: 16D30, 16P40, 17B37, 16S36, 16S32

0. Introduction

L'algèbre de Weyl quantique $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, qui fait l'objet de cet article, a été introduite par G. Maltsiniotis et étudiée dans [1] et [9]. L'objectif de ce travail est de donner une description explicite de son spectre moyennant des hypothèses de généricité sur les paramètres qui entrent dans sa définition, et ceci pour tout entier naturel n non nul.

Pour ce faire, nous utilisons un résultat de K.R.Goodearl et E.S.Letzter [6], qui permet de décrire le spectre premier de certaines extensions de Ore $R[x;\sigma,\delta]$ à partir du spectre premier de R. La description de ce résultat ainsi que la façon dont il sera mis en oeuvre font l'objet de la première partie. Dans la seconde, nous rappelons des définitions et propriétés utiles pour la suite et nous calculons la dimension de Gelfand-Kirillov de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ et de certaines de ses localisations. Dans la partie trois, nous donnons explicitement le spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. Nous avons appris récemment que ce résultat a été obtenu par M. Akhavizadegan et D.A. Jordan, indépendemment et par des méthodes différentes (voir [2]). Cette description explicite est utilisée dans la quatrième partie pour montrer que $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est caténaire ; on retrouve ainsi, un cas particulier d'un résultat très général de Goodearl et Lenagan (voir [5]). Enfin, les idéaux premiers de hauteur 1, permettent de déterminer le groupe d'automorphismes de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

1. Principe de démonstration, résultats généraux

Le résultat obtenu dans ce travail utilise de manière essentielle un énoncé de K.R.Goodearl et E.S.Letzter (théorème 11.1 de [6]). En réalité, nous n'utilisons qu'une version restreinte de cet énoncé que nous rappelons dans le théorème 1.2 ci-après.

1.1 Rappels et définitions

Soit R un anneau noethérien, σ un automorphisme de R et (σ, δ) une dérivation tordue (à gauche) de R (δ est additive et $\forall (a,b) \in R^2,\ \delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$) ; soit q un élément central et (σ, δ)-constant dans R ($\sigma(q) = q$ et $\delta(q) = 0$). On dit que (σ, δ) est une dérivation q-tordue lorsque $\delta\sigma = q\sigma\delta$; l'extension de Ore $R[x; \sigma, \delta]$ est appelée q-tordue lorsque (σ, δ) est une dérivation q-tordue. Une extension q-tordue $R[x; \sigma, \delta]$ est dite de type $(*, 0)$ si $\forall i \in \mathbf{N},\ q^i + q^{i-1} + ... + q + 1$ est inversible dans R. C'est le cas, en particulier, quand R est une algèbre sur un corps de caractéristique 0 et $q = 1$.

Dans toute la suite, le terme idéal désigne un idéal bilatère ; les idéaux unilatères seront explicitement mentionnés. De plus, $\subset$ désigne une inclusion stricte et $\subseteq$ une inclusion large.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème 1.2. Il convient de souligner que ce théorème est une version restreinte du théorème 11.1 de [6] au cas où, dans les anneaux envisagés, tout idéal premier est complètement premier.

1.2 Théorème. *Soit R un anneau noethérien, σ un automorphisme de R et (σ, δ) une dérivation tordue de R ; soit q un élément central inversible et (σ, δ)-constant de R. On suppose que $S = R[x; \sigma, \delta]$ est une extension q-tordue de type $(*, 0)$ de R et que tout idéal premier de R et de S est complètement premier. Alors :*

(i) si P est un idéal premier de S, sa contraction $P \cap R$ à R est un idéal premier qui, ou bien n'est pas σ-stable, ou bien est (σ, δ)-stable ;

(ii) si Q est un idéal premier de R non σ-stable, il existe au plus un idéal premier P de S tel que $Q = P \cap R$;

(iii) si Q est un idéal premier (σ, δ)-stable de R, on note $F = Frac(R/Q)$. Si σ induit sur F un automorphisme dont aucune puissance n'est intérieure, alors il existe au plus deux idéaux premiers P de S tels que $P \cap R = Q$.

Cet énoncé permet sous certaines hypothèses, vraies dans le cas des algèbres de Weyl quantiques, de déterminer le spectre premier de S lorsque celui de R est connu. Cependant, il est nécessaire de vérifier que certains automorphismes n'ont aucune puissance intérieure ((iii) du théorème 1.2); on utilise pour cela le théorème suivant qui figure comme théorème 1 dans [8].

1.3 Théorème *Soit R un anneau noethérien et σ un automorphisme de R. On note $S = R[x^{\pm 1}; \sigma]$. Alors, S est simple si et seulement si :*

(i) les seuls idéaux σ-stables de R sont (0) et R, et

(ii) il n'existe pas d'entier $n \in \mathbf{N}^*$, tel que σ^n soit un automorphisme intérieur de R.

Les théorèmes 1.2 et 1.3 ne seront utilisés que dans la preuve de la proposition 3.2.3.

2. Etude préliminaire de l'algèbre de Weyl quantique

Dans toute la suite de l'article, k est un corps commutatif de caractéristique 0. Pour tout entier strictement positif n, $\mathbf{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$; on prendra $\mathbf{N}_0 = \emptyset$. D'autre part, $\mathcal{M}'_n(k^*)$ désigne l'ensemble des matrices (λ_{ij}) de $\mathcal{M}_n(k)$ telles que : $\forall (i,j) \in \mathbf{N}_n^2,\ \lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ et λ_{ii}=1.

2.1 Définitions et remarques

2.1.1 Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; on note $\bar{q}(n) = (q_1, ..., q_n)$ un élément de $(k^*)^n$ et $\Lambda(n) = (\lambda_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}'_n(k^*)$. La n-ième algèbre de Weyl quantique associée à $\bar{q}(n)$ et $\Lambda(n)$, notée $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ pour simplifier, est l'algèbre à 2n générateurs sur k,*

$$y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n,$$

soumis aux relations :

(1) $\forall (i,j) \in \mathbf{N}_n^2$ tel que $i < j$:
$$x_i x_j = \lambda_{ij} q_i x_j x_i,\ y_i y_j = \lambda_{ij} y_j y_i,\ x_i y_j = \lambda_{ij}^{-1} y_j x_i,\ y_i x_j = \lambda_{ij}^{-1} q_i^{-1} x_j y_i.$$

(2)
$$\forall i \in \mathbf{N}_n,\ x_i y_i - q_i y_i x_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} (q_j - 1) y_j x_j.$$

2.1.2 Remarque. Si, pour $i \in \mathbf{N}_n$, on note $z_i = x_i y_i - y_i x_i$ et $z_0 = 1$, on obtient la relation:

(3)
$$\forall i \in \mathbf{N}_n,\quad z_i = 1 + \sum_{j=1}^{i} (q_j - 1) y_j x_j.$$

On en déduit la relation :

(4)
$$\forall i \in \mathbf{N}_n,\quad z_i = z_{i-1} + (q_i - 1) y_i x_i,$$

et une nouvelle formulation de (2) :

(2′)
$$\forall i \in \mathbf{N}_n,\quad x_i y_i - q_i y_i x_i = z_{i-1}.$$

D'autre part, pour $i \in \mathbf{N}_n$, z_i est normal dans $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. Plus précisément (voir [9]):

(5)
$$\forall (i,j) \in \mathbf{N}_n, z_i x_j = x_j z_i \text{ et } z_i y_j = y_j z_i \text{ si } i < j \text{ et}$$
$$z_i x_j = q_j^{-1} x_j z_i \text{ et } z_i y_j = q_j y_j z_i \text{ si } i \geq j.$$

2.1.3 Remarque. On peut aussi décrire $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ comme une extension de Ore itérée. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $\bar{q}(n) = (q_1, ..., q_n) \in (k^*)^n$ et $\Lambda(n) = (\lambda_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}'_n(k^*)$; pour tout $i \in \mathbf{N}_n$, on note $\bar{q}(i)$ le i-uplet $(q_1, ..., q_i)$ et $\Lambda(i)$ la matrice extraite de $\Lambda(n)$ en ne conservant que les i premières lignes et colonnes. On peut alors associer à $\bar{q}(i)$ et $\Lambda(i)$ l'algèbre de Weyl quantique à $2i$ générateurs $A_i^{\bar{q},\Lambda}$, qui est une sous-algèbre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. On prendra $A_0^{\bar{q},\Lambda} = k$.

Dans ces conditions, on désigne par τ_1 l'identité sur k, et pour $j \geq 2$ dans $\mathbf{N}_n$, on note τ_j l'automorphisme de $A_{j-1}^{\bar{q},\Lambda}$ défini par :

$$\tau_j(y_i) = \lambda_{ij}^{-1} y_i \ \text{ et } \ \tau_j(x_i) = \lambda_{ij} x_i \ \text{ pour } \ i \in \mathbf{N}_{j-1}.$$

D'autre part, pour $j \geq 1$ dans $\mathbf{N}_n$, on note σ_j l'automorphisme de $A_{j-1}^{\bar{q},\Lambda}[y_j; \tau_j]$ défini par :

$$\sigma_j(y_i) = \lambda_{ij} q_i y_i \ \text{ et } \ \sigma_j(x_i) = \lambda_{ij}^{-1} q_i^{-1} x_i \ \text{ pour } \ i \in \mathbf{N}_{j-1}, \text{ et } \ \sigma_j(y_j) = q_j y_j \ \ ;$$

et δ_j la σ_j-dérivation de $A_{j-1}^{\bar{q},\Lambda}[y_j; \tau_j]$ telle que :

$$\delta_j(A_{j-1}^{\bar{q},\Lambda}) = 0 \ \text{ et } \ \delta_j(y_j) = z_{j-1}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A_n^{\bar{q},\Lambda} = A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}[y_n; \tau_n][x_n; \sigma_n, \delta_n]$, il est clair par récurrence que l'algèbre de Weyl quantique est une extension de Ore itérée, intègre et noethérienne. En particulier, la famille

$$\{ y_1^{j_1} x_1^{i_1} ... y_n^{j_n} x_n^{i_n}, \ (j_1, i_1, ..., j_n, i_n) \in \mathbf{N}^{2n} \ \}$$

est une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

2.1.4 Notations. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda} = A_n^{\bar{q},\Lambda}[y_{n+1}; \tau_{n+1}]$, et Γ_n le sous-groupe de k^* engendré par les λ_{ij} et les q_i pour $(i,j) \in \mathbf{N}_n^2$ et $i < j$, ($\Gamma_0 = (1)$).

Le lemme suivant définit une $\mathbf{Z}$-graduation de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

2.1.5 Lemme. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; dans les notations de 2.1.3, soit $A_n(r)$ le sous-$A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$ module libre à gauche de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ engendré par les $y_n^j x_n^i$, $(i,j) \in \mathbf{N}^2$ tels que $j - i = r$. Alors la famille des $A_n(r)$, $r \in \mathbf{Z}$, forme une $\mathbf{Z}$-graduation de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.*

Preuve : Il est clair que $A_n(r)$ est un k-espace vectoriel pour tout $r \in \mathbf{Z}$. De plus, comme $A_n^{\bar{q},\Lambda} = A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}[y_n; \tau_n][x_n; \sigma_n, \delta_n]$, on a aisément $A_n^{\bar{q},\Lambda} = \oplus_{r \in \mathbf{Z}} A_n(r)$. Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on note $(j)_{q_n} = q_n^{j-1} + q_n^{j-2} + ... + 1$ et $(0)_{q_n} = 0$. Alors, une récurrence simple montre que $\forall j \in \mathbf{N}$:

$$(1) \qquad x_n y_n^j = q_n^j y_n^j x_n + (j)_{q_n} z_{n-1} y_n^{j-1}.$$

Pour $j-i=r$, il vient alors :

$$x_n y_n^j x_n^i \in A_n(r)x_n \text{ si } i>0 \text{ et } x_n y_n^j \in A_n(r-1) \text{ si } i=0.$$

Comme x_n et y_n commutent, à un scalaire près, avec $A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$, on en déduit dans un premier temps que :

$$x_n A_n(r) \subseteq A_n(r-1),$$

puis que :

$$\forall (s,r) \in \mathbf{Z}^2, \;\; A_n(s)A_n(r) \subseteq A_n(s+r).$$

Ce qui achève la démonstration □

Le résultat suivant, très important pour la suite, est une conséquence facile du théorème 2.3 de [7].

2.1.6 Théorème. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; on suppose que k est de caractéristique 0 et que Γ_n est sans torsion ; alors tout idéal premier de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ et de $A_{n-1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ est complètement premier.*

Preuve : De la remarque 2.1.3, on déduit aisément (k étant de caractéristique 0) que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ et $A_{n-1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ vérifient les hypothèses du théorème 2.3 de [7]. □

2.2 Localisation et GK-dimension

2.2.1 Lemme. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; si $\mathcal{I}$ est une partie de $\mathbf{N}_n$ et $S_{\mathcal{I}}$ la partie multiplicative de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ engendrée par k^* et par les y_i pour $i \in \mathcal{I}$, alors $S_{\mathcal{I}}$ est de Ore à droite dans $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.*

Preuve : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}_n$; on note S_p la partie multiplicative de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ engendrée par k^* et y_p. Compte tenu des relations de commutation entre y_p et les x_i d'une part, y_p et les y_i d'autre part, pour $i \in \mathbf{N}_{p-1}$ (voir 2.1.1), S_p est une partie de Ore de $A_{p-1/2}^{\bar{q},\Lambda}$. De plus comme pour $p \leq i \leq n$ et $p+1 \leq j \leq n$, $\sigma_i(S_p) = \tau_j(S_p) = S_p$, le lemme 1.4 de [4] assure que S_p est une partie de Ore à droite de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. Soit à présent $\mathcal{I}$ une partie de $\mathbf{N}_n$; la partie multiplicative $S_{\mathcal{I}}$ de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est engendrée par les S_p pour $p \in \mathcal{I}$ et est donc de Ore à droite dans $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ d'après le lemme 4.1 de [10]. □

Le lemme suivant est une généralisation de la proposition 3.5 de [10] dans le cas d'une algèbre de type fini et il permet de calculer la GK-dimension de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

2.2.2 Lemme. *Soit A une algèbre de type fini et (σ,δ) une dérivation tordue de A. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel V de A de dimension finie, stable sous σ et qui engendre A comme algèbre ; alors :*

$$GKdim A[x;\sigma,\delta] = GKdim A \; + \; 1.$$

Preuve : On peut supposer, sans perte de généralité, que $1 \in V$. Soit alors W le sous-espace vectoriel de $B = A[x;\sigma,\delta]$ engendré par x et par V ; c'est un sous-espace générateur de B. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $\delta(V) \subseteq V^m$; si $n \in \mathbf{N}$, on a $\sigma(V^n) \subseteq V^n$ et δ étant une σ-dérivation, on prouve par récurrence sur n que $\delta(V^n) \subseteq V^{n+m}$. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(*) \qquad W^n \subseteq V^{nm} + V^{nm}x + ... + V^{nm}x^n.$$

C'est trivial lorsque $n = 0$. Supposons cette assertion vraie à l'ordre n. D'après la définition d'une extension de Ore, nous constatons que :

$$xV^n \subseteq \sigma(V^n)x + \delta(V^n) \subseteq V^n x + V^{m+n}.$$

D'où l'on déduit par hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned} xW^n &\subseteq xV^{nm} + xV^{nm}x + ... + xV^{nm}x^n \\ &\subseteq V^{nm}x + V^{nm+m} + V^{nm}x^2 + V^{nm+m}x + ... + V^{nm}x^{n+1} + V^{nm+m}x^n, \end{aligned}$$

et donc que :

$$xW^n \subseteq V^{m(n+1)} + ... + V^{m(n+1)}x^{n+1}.$$

D'autre part,

$$VW^n \subseteq V^{mn+1} + ... + V^{mn+1}x^n.$$

On obtient finalement :

$$W^{n+1} = (V + kx)W^n \subseteq V^{m(n+1)} + ... + V^{m(n+1)}x^{n+1},$$

ce qui prouve $(*)$. Mais, de $(*)$ on tire que

$$dim\ W^n \leq (n+1) dim\ V^{mn},$$

et donc :

$$\overline{lim}\ log_n\ dim\ W^n \leq \overline{lim}\ log_n\ dim\ V^{mn} + 1.$$

Comme V (resp. W) sont des sous-espaces générateurs de A (resp. B), il s'ensuit que $1 +$ GKdim $A \geq$ GKdim B. Comme de plus il est clair que :

$$V^n + V^n x + ... + V^n x^n \subseteq W^{2n} \ \ \forall n \in \mathbf{N},$$

on obtient :

$$1 + \overline{lim}\ log_n\ dim\ V^n \leq \overline{lim}\ log_n\ dim\ W^{2n},$$

ce qui conduit à $1 +$ GKdim $A \leq$ GKdim B. □

2.2.3 Proposition. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, *GKdim* $A_n^{\bar{q},\Lambda} = 2n$.

Preuve : Nous procédons par récurrence sur n. $A_1^{\bar{q},\Lambda} = k[y_1][x_1; \sigma_1, \delta_1]$ et le sous-espace vectoriel de $k[y_1]$ engendré par 1 et y_1 vérifie les hypothèses du lemme 2.2.2 ; par suite, GKdim $A_1^{\bar{q},\Lambda} =$ GKdim $k[y_1] + 1 = 2$.

Supposons le résultat acquis à l'ordre n ; alors $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda} = A_n^{\bar{q},\Lambda}[y_{n+1};\tau_{n+1}]$, et le sous-espace vectoriel V de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ engendré par 1, les y_i et x_i pour $1 \leq i \leq n$ satisfait aux hypothèses du lemme 2.2.2 ; par suite, GKdim $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda} = 2n+1$; puis, le sous-espace vectoriel de $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ engendré par V et y_{n+1} convient aussi et donc GKdim $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} = 2n+2 = 2(n+1)$. $\square$

2.2.4 Lemme. *$\forall n \in \mathbf{N}^*$, soit $\mathcal{I}$ une partie strictement incluse dans $\mathbf{N}_n$ et $S_{\mathcal{I}}$ la partie multiplicative de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ engendrée par k^* et par les y_i pour $i \in \mathcal{I}$. Soit de plus $p \in \mathbf{N}_n \setminus \mathcal{I}$, et S_p la partie multiplicative de $A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}}^{-1}$ engendrée par k^* et y_p ; alors S_p est de Ore à droite dans $A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}}^{-1}$ et si $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \{p\}$,*

$$(A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}}^{-1})S_p^{-1} \cong A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}'}^{-1} \;;$$

de plus,

$$GKdim\ A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}'}^{-1} = GKdim\ A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}}^{-1}.$$

Preuve : La première partie du lemme se déduit facilement du lemme 2.2.1 et de la propriété universelle des anneaux de fractions. Posons $A = A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}}^{-1}$ et $B = AS_p^{-1} \cong A_n^{\bar{q},\Lambda}S_{\mathcal{I}'}^{-1}$. Soit W le sous-espace vectoriel de B engendré par 1, les x_i et les y_i pour $1 \leq i \leq$n et par les y_k^{-1} pour $k \in \mathcal{I}'$. W est un sous-espace vectoriel de B de dimension finie, qui engendre B comme algèbre ; de plus $Wy_p \subseteq V'$, où V' est le sous-espace vectoriel de A engendré par 1, les x_iy_p et les y_iy_p pour $1 \leq i \leq$n, par les $y_k^{-1}y_p$ pour $k \in \mathcal{I}$ et par y_p.

Soit alors V, le sous-espace vectoriel de A, engendré par V' et par z_{p-1}. La relation (1) de la preuve du lemme 2.1.5, assure que :

$$\forall h \in \mathbf{N},\ \ y_p^{-h}x_p = q_p^h x_p y_p^{-h} + (h)_{q_p} z_{p-1} y_p^{-(h+1)}.$$

Il vient donc :

$$\forall h \in \mathbf{N},\ \ y_p^{-h}(x_py_p) = q_p^h (x_py_p) y_p^{-h} + (h)_{q_p} z_{p-1} y_p^{-h},$$

et par suite :

$$\forall h \in \mathbf{N},\ \ y_p^{-h}(x_py_p) \in V y_p^{-h}.$$

Comme y_p (et donc y_p^{-1}) commute, à un scalaire près, à tous les générateurs de V hormis x_py_p, il s'ensuit :

$$(1) \qquad \forall h \in \mathbf{N},\ \ y_p^{-h} V \subseteq V y_p^{-h}.$$

De l'inclusion (1), découle enfin :

$$(2) \qquad \forall h \in \mathbf{N},\ \ (y_p^{-1}V)^h \subseteq V^h y_p^{-h}.$$

La preuve de (2) se fait par récurrence sur h. Pour $h = 1$, c'est la relation (1). Supposons (2) vraie à l'ordre h, alors :

$$\begin{aligned}(y_p^{-1}V)^{h+1} = (y_p^{-1}V)^h y_p^{-1} V &\subseteq V^h y_p^{-h} y_p^{-1} V \\ &\subseteq V^h y_p^{-(h+1)} V \\ &\subseteq V^h V y_p^{-(h+1)} = V^{h+1} y_p^{-(h+1)}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve (2). Mais alors,

$$\begin{aligned} W^n &\subseteq (Vy_p^{-1})^n = V(y_p^{-1}V)^{n-1}y_p^{-1} \\ &\subseteq VV^{n-1}y_p^{-(n-1)}y_p^{-1} \\ &= V^n y_p^{-n}. \end{aligned}$$

Donc GKdim $B = \overline{lim}\ log_n\ dim\ W^n \leq \overline{lim}\ log_n\ dim\ V^n \leq$ GKdim A. Ainsi, GKdim $B \leq$ GKdim A, et l'inégalité inverse est facile puisque $A \subseteq B$. □

2.2.5 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{I}$ une partie de $\mathbf{N}_n$, GKdim $A_n^{\bar{q},\Lambda} = GKdim\ A_n^{\bar{q},\Lambda} S_{\mathcal{I}}^{-1}$.*

Preuve : La preuve se fait aisément par récurrence sur le cardinal de $\mathcal{I}$, à l'aide du lemme 2.2.4 . □

2.3 Espace quantique multiparamétré (e.q.m.) attaché à une algèbre de Weyl quantique

2.3.1 Définition. *A toute matrice $Q = (q_{ij})$ de $\mathcal{M}'_n(k^*)$, on peut associer un espace quantique multiparamétré $k_Q[X_1, ..., X_n] = k_Q[\underline{X}]$; c'est l'algèbre engendrée sur k par les n générateurs X_i, $1 \leq i \leq n$, soumis aux relations :*

$$\forall\ (i,j) \in \mathbf{N}_n^2, \quad X_iX_j = q_{ij}X_jX_i.$$

2.3.2 Remarque. Il est clair qu'un e.q.m. est une extension de Ore itérée, intègre et noethérienne.

Si $\mathcal{I}$ est une partie de $\mathbf{N}_n$ et si $T_{\mathcal{I}}$ est la partie multiplicative engendrée par k^* et les X_i pour $i \in \mathcal{I}$, $T_{\mathcal{I}}$ est de Ore à droite (et à gauche) dans $k_Q[\underline{X}]$. Lorsque $\mathcal{I} = \mathbf{N}_n$, on note $k_Q[\underline{X}^{\pm 1}]$ au lieu de $k_Q[\underline{X}]T_{\mathcal{I}}^{-1}$.

La proposition suivante, due à McConnell et Pettit, donne un critère de simplicité pour $k_Q[\underline{X}^{\pm 1}]$.

2.3.3 Proposition. *Soit $k_Q[\underline{X}]$ un e.q.m. associé à $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{M}'_n(k^*)$; alors, $k_Q[\underline{X}^{\pm 1}]$ est simple si et seulement si Q satisfait à la propriété $(\mathcal{S})$ suivante :*
$(\mathcal{S})$ $\forall m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbf{Z}^n$, la condition

$$\forall i \in \mathbf{N}_n, \ \prod_{l=1}^{n} q_{il}^{m_l} = 1$$

entraine $m = 0$.

Preuve : C'est la proposition 1.3 de [11]. □

Nous introduisons à présent la notion d'espace quantique multiparamétré associé à une algèbre de Weyl quantique.

2.3.4 Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_n) \in (k^*)^n$, $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathcal{M}'_n(k^*)$ et $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ l'algèbre de Weyl quantique associée. On considère la matrice*

$$Q_n = \begin{pmatrix} 1 & q_1^{-1} & \lambda_{12} & \lambda_{12}^{-1}q_1^{-1} & \lambda_{13} & \lambda_{13}^{-1}q_1^{-1} & ... & ... & \lambda_{1n} & \lambda_{1n}^{-1}q_1^{-1} \\ q_1 & 1 & \lambda_{12}^{-1} & \lambda_{12}q_1 & \lambda_{13}^{-1} & \lambda_{13}q_1 & ... & ... & \lambda_{1n}^{-1} & \lambda_{1n}q_1 \\ \lambda_{12}^{-1} & \lambda_{12} & 1 & q_2^{-1} & \lambda_{23} & \lambda_{23}^{-1}q_2^{-1} & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{12}q_1 & \lambda_{12}^{-1}q_1^{-1} & q_2 & 1 & \lambda_{23}^{-1} & \lambda_{23}q_2 & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{13}^{-1} & \lambda_{13} & \lambda_{23}^{-1} & \lambda_{23} & 1 & q_3^{-1} & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{13}q_1 & \lambda_{13}^{-1}q_1^{-1} & \lambda_{23}q_2 & \lambda_{23}^{-1}q_2^{-1} & q_3 & 1 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{1n}^{-1} & \lambda_{1n} & \lambda_{2n}^{-1} & \lambda_{2n} & ... & ... & ... & ... & 1 & q_n^{-1} \\ \lambda_{1n}q_1 & \lambda_{1n}^{-1}q_1^{-1} & \lambda_{2n}q_2 & \lambda_{2n}^{-1}q_2^{-1} & ... & ... & ... & ... & q_n & 1 \end{pmatrix}.$$

On appelle e.q.m. attaché à $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ l'algèbre à 2n générateurs $k_{Q_n}[Y_1, X_1, ..., Y_n, X_n]$ notée en abrégé $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]$.

2.3.5 Remarque. De façon équivalente, on peut définir $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]$ comme l'algèbre à $2n$ générateurs :

$$Y_1, ..., Y_n, X_1, ..., X_n,$$

soumis aux relations :
pour $(i, j) \in \mathbf{N}_n^2$ tq $i < j$:

$$X_iX_j = \lambda_{ij}q_iX_jX_i, \quad X_iY_j = \lambda_{ij}^{-1}Y_jX_i, \quad Y_iY_j = \lambda_{ij}Y_jY_i, \quad Y_iX_j = \lambda_{ij}^{-1}q_i^{-1}X_jY_i,$$

et pour $i \in \mathbf{N}_n$:

$$X_iY_i = q_iY_iX_i.$$

2.3.6 Remarque. De la remarque 2.3.5, on déduit facilement que $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et $\forall (i, j) \in \mathbf{N}_n^2$, si $Z_i = X_iY_i - Y_iX_i$:

1. $Z_iX_j = X_jZ_i$ et $Z_iY_j = Y_jZ_i$ lorsque $i < j$,
2. $Z_iX_j = q_j^{-1}X_jZ_i$ et $Z_iY_j = q_jY_jZ_i$ lorsque $i \geq j$.

2.3.7 Remarque. A tout couple $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de parties de $\mathbf{N}_n$, on peut associer l'idéal $I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ de $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]$ engendré par les Y_j pour $j \in \mathcal{J}$ et les X_i pour $i \in \mathcal{I}$. Il est clair que le quotient $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ s'identifie à la sous-algèbre de $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]$ engendrée par les Y_j pour $j \notin \mathcal{J}$ et par les X_i pour $i \notin \mathcal{I}$, qui est aussi un e.q.m associé à une matrice extraite de Q_n. Par la suite, cette identification sera faite systématiquement.

En particulier, $I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ est complètement premier.

2.3.8 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ une algèbre de Weyl quantique. On considère $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathbf{N}_n$ telles que $\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J} \leq 2n-2$, et on note S la partie multiplicative de $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]$ engendrée par k^*, les X_i pour $i \notin \mathcal{I}$ et les Y_j pour $j \notin \mathcal{J}$.*

Si Γ_n *est libre de rang* $\frac{1}{2}n(n+1)$*, alors* $(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]S^{-1})/(I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}S^{-1})$ *est simple.*

Preuve : D'après la remarque 2.3.7, $I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ est complètement premier. Il s'ensuit que si T désigne l'image de S par la projection canonique de $k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]$ sur $k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]\ /I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$, on a d'après [3], proposition 3.6.15, un isomorphisme d'algèbres entre $(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]S^{-1})/(I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}S^{-1})$ et $(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]\ /I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1}$.

Il s'agit donc de prouver que la matrice extraite de Q_n associée à $k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ (voir remarque 2.3.7) vérifie la propriété $(\mathcal{S})$ de la proposition 2.3.3. Comme par hypothèse, $\#\mathcal{I}+\#\mathcal{J}\leq 2n-2$, il suffit de prouver que toute matrice de $\mathcal{M}'_n(k^*)$ extraite de Q_n d'ordre au moins 2 vérifie $(\mathcal{S})$.

Nous procédons par récurrence sur n.

Pour $n=1$, c'est clair. En effet, comme rang $\Gamma_1\ =\ 1$, q_1 n'est pas racine de l'unité.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$ et soit Q' une matrice de $\mathcal{M}'_r(k^*)$ extraite de Q_n, pour $2\leq r\leq 2n$. Si dans Q' les deux dernières lignes et colonnes de Q_n n'apparaissent pas, Q' est une matrice de $\mathcal{M}'_r(k^*)$ extraite de Q_{n-1} d'ordre $r\geq 2$. Et comme rang $\Gamma_n\ =\ \frac{1}{2}n(n+1)$ entraine rang $\Gamma_{n-1}\ =\ \frac{1}{2}n(n-1)$, Q' vérifie $(\mathcal{S})$ par hypothèse de récurrence. Si $Q'=\begin{pmatrix}1 & q_n^{-1}\\ q_n & 1\end{pmatrix}$, il est clair qu'elle vérifie $(\mathcal{S})$. Dans tous les autres cas, $Q'=(q_{i,j})\in\mathcal{M}'_r(k^*)$ est soit du <u>type 1</u>:

$$Q'=\begin{pmatrix} & Q'' & & . & & \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & . & 1 & q_n^{-1}\\ & & & . & q_n & 1\end{pmatrix},$$

soit du <u>type 2</u>:

$$Q'=\begin{pmatrix} & Q'' & & . & \\ & & & . & \\ & & & . & \\ . & . & . & . & . \\ & & & . & 1\end{pmatrix},$$

où Q'' est une matrice de $\mathcal{M}'_s(k^*)$ extraite de Q_{n-1} avec $1\leq s\leq 2(n-1)$.

Dans le cas 'type 1', si l'ordre de Q'' est au moins 2, on observe que dans les deux dernières lignes de Q', $q_n^{\pm 1}$ ne figure qu'en position $(n,n-1)$ et $(n-1,n)$. Donc, si $m=(m_1,...,m_r)\in\mathbf{Z}^r$, $\prod_{j=1}^r q_{i,j}^{m_j}=1$ pour tout $i\in\mathbf{N}_r$ entraine $m_{r-1}=m_r=0$. Et comme Q'' vérifie $(\mathcal{S})$, par hypothèse de récurrence, $m=0$.

Sinon,

$$Q'=\begin{pmatrix}1 & \lambda_{in}^{\pm 1} & \lambda_{in}^{\mp 1}q_i^{\mp 1}\\ * & 1 & q_n^{-1}\\ * & q_n & 1\end{pmatrix}$$

pour $i<n$; il est alors facile de prouver qu'elle vérifie $(\mathcal{S})$.

Dans le cas 'type 2', $q_{1,r}$ est égal à un $\lambda_{in}^{\pm 1} q_i^{\pm 1}$ ou à un $\lambda_{in}^{\mp 1}$ avec $i < n$. Donc, sachant que λ_{in} ne figure dans aucune position $(1, j)$ pour $j < r$, on a avec les notations précédentes, $m_r = 0$. Là encore, si Q'' est d'ordre au moins 2, elle vérifie $(\mathcal{S})$, par hypothèse de récurrence, et par conséquent Q' aussi, puisque $m_r = 0$. Sinon, $Q' = \begin{pmatrix} 1 & q_{1,2} \\ q_{1,2}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$, où $q_{1,2} \in \Gamma_n$ n'est pas racine de l'unité ; donc à nouveau, Q' vérifie $(\mathcal{S})$. □

3. Spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$

En 3.1 est introduite une famille particulière d'idéaux premiers de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$: les idéaux algorithmiques. Nous prouvons en 3.2 que lorsque k est algébriquement clos de caractéristique 0, et Γ_n libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, il suffit de leur ajouter les idéaux maximaux (eux mêmes décrits explicitement) pour obtenir le spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

Dans la suite de cet article, toutes les algèbres de Weyl $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) envisagées sont soumises à l'hypothèse suivante : pour tout $i \in \mathbf{N}_n$, les q_i intervenant dans leur définition sont distincts de 1.

3.1 Spectre algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$

3.1.1 Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et I un idéal $(\tau_{n+1}, \sigma_{n+1}, \delta_{n+1})$-stable de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$; on appelle étendus de I les idéaux $I' = (I, \alpha_{n+1})$ de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, engendrés par I et α_{n+1} où :*

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \emptyset, \{x_{n+1}\}, \{y_{n+1}\} \text{ ou } \{x_{n+1}, y_{n+1}\} & \text{si } z_n \in I, \\ \emptyset \text{ ou } \{z_{n+1}\} & \text{si } z_n \notin I. \end{cases}$$

3.1.2 Lemme *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si I est un idéal $(\tau_{n+1}, \sigma_{n+1}, \delta_{n+1})$-stable de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ et $I' = (I, \alpha_{n+1})$ un étendu de I, on a :*
(i) *$I' = (I, \alpha_{n+1}) A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, idéal à droite engendré par $I \cup \alpha_{n+1}$;*
(ii) *$I' \cap A_n^{\bar{q},\Lambda} = I$;*
(iii) *si I est premier (resp. complètement premier), alors I' est premier (resp. complètement premier).*

3.1.3 Remarque. En contraste avec le théorème 2.1.6, on ne suppose pas, dans le lemme 3.1.2, que Γ_n est sans torsion, d'où l'intérêt de séparer les cas premier et complètement premier dans (iii).

Preuve du lemme 3.1.2 : Comme I est $(\tau_{n+1}, \sigma_{n+1}, \delta_{n+1})$-stable, on peut considerer $\overline{\tau}_{n+1}$, automorphisme de $A_n^{\bar{q},\Lambda}/I$ induit par τ_{n+1}. On peut aussi considerer $(\overline{\sigma}_{n+1}, \overline{\delta}_{n+1})$, dérivation tordue induite sur $(A_n^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1}; \overline{\tau}_{n+1}]$ par $(\sigma_{n+1}, \delta_{n+1})$. La projection canonique :

$$\begin{aligned} p \ : \ A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} &\longrightarrow (A_n^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1}; \overline{\tau}_{n+1}][x_{n+1}; \overline{\sigma}_{n+1}, \overline{\delta}_{n+1}] \\ \sum a_{ij} y_{n+1}^j x_{n+1}^i &\longmapsto \sum (a_{ij} + I) y_{n+1}^j x_{n+1}^i \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres, dont le noyau est $IA_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$. Il s'ensuit que l'idéal à droite $IA_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ est en réalité un idéal bilatère. Il vient alors que :

$$A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/IA_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} \quad \longrightarrow \quad (A_n^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1};\overline{\tau}_{n+1}][x_{n+1};\overline{\sigma}_{n+1},\overline{\delta}_{n+1}]$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Dans le cas où $\alpha_{n+1}=\emptyset$, on en déduit (i), (ii) et (iii).

Supposons à présent que $z_n \in I$, alors $\overline{\delta}_{n+1}=0$. Il s'ensuit que l'application composée:

$$\begin{array}{c} A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} \xrightarrow{p} (A_n^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1};\overline{\tau}_{n+1}][x_{n+1};\overline{\sigma}_{n+1}] \xrightarrow{p_1} (A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1};\overline{\tau}_{n+1}] \\ \sum a_{ij}y_{n+1}^j x_{n+1}^i \longmapsto \sum (a_{ij}+I)y_{n+1}^j x_{n+1}^i \longmapsto \sum (a_{0j}+I)y_{n+1}^j \end{array}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres.

Il est clair que l'idéal à droite $(I,x_{n+1})A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ est inclus dans le noyau de ce morphisme. D'autre part, l'image de $\sum a_{ij}y_{n+1}^j x_{n+1}^i = \sum a_{0j}y_{n+1}^j + \sum_{i\neq 0} a_{ij}y_{n+1}^j x_{n+1}^i$ est $\sum (a_{0j}+I)y_{n+1}^j$. Donc, $\ker p_1 \circ p = IA_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} + A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}x_{n+1}$. Mais, comme pour tout a dans $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, on a (d'après la relation (1) preuve de 2.1.5) :

$$\begin{aligned} ay_{n+1}^j x_{n+1}^i x_{n+1} &= a(y_{n+1}^j x_{n+1})x_{n+1}^i \\ &= aq_{n+1}^{-j}(x_{n+1}y_{n+1}^j - (j)_{q_{n+1}} z_n y_{n+1}^{j-1})x_{n+1}^i \\ &= x_{n+1}q_{n+1}^{-j}\sigma_{n+1}^{-1}(a)y_{n+1}^j x_{n+1}^i - aq_{n+1}^{-j}(j)_{q_{n+1}} z_n y_{n+1}^{j-1} x_{n+1}^i. \end{aligned}$$

Il vient, puisque $z_n \in I$:

$$A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}x_{n+1} \subseteq x_{n+1}A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} + IA_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}.$$

Donc $\ker p_1 \circ p = (x_{n+1},I)A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$. Finalement, on obtient l'isomorphisme d'algèbres :

$$(A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1};\overline{\tau}_{n+1}] \ \cong A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/(x_{n+1},I)A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda},$$

dont on déduit (i), (ii) et (iii) lorsque $z_n \in I$ et $\alpha_{n+1}=\{x_{n+1}\}$.

Un raisonnement semblable prouve l'assertion lorsque $z_n \in I$ et $\alpha_{n+1}=\{y_{n+1}\}$.

Considérons à présent l'application :

$$\begin{array}{c} A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} \xrightarrow{p} (A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/I)[y_{n+1};\overline{\tau}_{n+1}][x_{n+1};\overline{\sigma}_{n+1}] \xrightarrow{p_2} A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/I \\ \sum a_{ij}y_{n+1}^j x_{n+1}^i \longmapsto \sum (a_{ij}+I)y_{n+1}^j x_{n+1}^i \longmapsto a_{00}+I. \end{array}$$

C'est un morphisme surjectif d'algèbres, dont le noyau contient l'idéal à droite $(I,x_{n+1},y_{n+1})A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$. Or, le noyau de $p_2\circ p$ est $IA_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}+A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}x_{n+1}+A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}y_{n+1}$. Nous avons déjà prouvé que $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}x_{n+1}$ et $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}y_{n+1}$ sont inclus respectivement dans $(I,x_{n+1})A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ et $(I,y_{n+1})A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, donc finalement : $\ker p_2 \circ p = (I,x_{n+1},y_{n+1})A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$. On en déduit le lemme lorsque $z_n \in I$ et $\alpha_{n+1}=\{x_{n+1},y_{n+1}\}$ de la même manière que précédemment.

Il reste à examiner le cas où $z_n \notin I$ et $\alpha_{n+1} = \{z_{n+1}\}$.

Nous avons déjà prouvé que $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} I \subseteq I A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, comme de plus z_{n+1} est normal dans $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, il vient : $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}(I, z_{n+1}) \subseteq (I, z_{n+1}) A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ ce qui donne le point (i) du lemme.

Mais alors, si $a \in I'$:

$$a = \sum_{i,j} a_{ij} y_{n+1}^j x_{n+1}^i + z_{n+1} \sum_{i,j} b_{ij} y_{n+1}^j x_{n+1}^i \quad \text{où} \quad a_{ij} \in I \quad \text{et} \quad b_{ij} \in A_n^{\bar{q},\Lambda}.$$

Supposons $a \in A_n^{\bar{q},\Lambda}$, alors a est de degré 0 pour la $\mathbf{Z}$-graduation de 2.1.5, donc en posant $a_i = a_{ii}$ et $b_i = b_{ii}$, il vient :

$$\begin{aligned}
a &= \sum_i a_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i + z_{n+1} \sum_i b_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i \\
&= \sum_i a_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i + z_n \sum_i b_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i + (q_{n+1} - 1) y_{n+1} x_{n+1} \sum_i b_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i \\
&= \sum_i a_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i + \sum_i z_n b_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i \\
&\quad + (q_{n+1} - 1) \sum_i \tau_{n+1} \circ \sigma_{n+1}(b_i) y_{n+1} (q_{n+1}^i y_{n+1}^i x_{n+1} + (i)_{q_{n+1}} z_n y_{n+1}^{i-1}) x_{n+1}^i,
\end{aligned}$$

et ceci, compte tenu des relations (4) remarque 2.1.2 et (1) preuve du lemme 2.1.5. En notant $b_i' = \tau_{n+1} \circ \sigma_{n+1}(b_i)$, on obtient au moyen des relations (5) de la remarque 2.1.2 :

$$\begin{aligned}
a &= \sum_i a_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i + \sum_i z_n b_i y_{n+1}^i x_{n+1}^i \\
&\quad + (q_{n+1} - 1) \sum_i (q_{n+1}^i b_i' y_{n+1}^{i+1} x_{n+1}^{i+1} + (i)_{q_{n+1}} b_i' z_n y_{n+1}^i x_{n+1}^i).
\end{aligned}$$

Mais, comme $a \in A_n^{\bar{q},\Lambda}$, et comme $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ est un $A_n^{\bar{q},\Lambda}$-module libre à gauche de base $\{y_{n+1}^j x_{n+1}^i, \ (i,j) \in \mathbf{N}^2\}$, on obtient les équations suivantes :

$$(E_0) \quad : \quad a = a_0 + z_n b_0.$$

Et, pour $r \in \mathbf{N}^*$:

$$(E_r) \quad : \quad a_r + z_n b_r + (q_{n+1} - 1)(q_{n+1}^{r-1} b_{r-1}' + (r)_{q_{n+1}} b_r' z_n) = 0.$$

Soit p le plus petit entier tel que $b_j = 0$ pour $j \geq p$. Si $p = 0$, alors $a = a_0 \in I$. Sinon, comme $q_{n+1} \neq 1$, de (E_p) on déduit que $b_{p-1} \in I$. Et pour $r > 0$, comme $q_{n+1} \neq 1$, l'équation (E_r) assure que si $b_r \in I$, alors $b_{r-1} \in I$. On en déduit finalement que $b_0 \in I$. Par suite, d'aprés (E_0), $a \in I$, et le point (ii) du lemme est prouvé.

Il reste à prouver (iii). On considère, pour ce faire la projection canonique :

$$\Pi \quad : \quad A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} \longrightarrow A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda} / I'.$$

Des relations $x_{n+1}y_{n+1} - y_{n+1}x_{n+1} = z_{n+1}$ et $x_{n+1}y_{n+1} - q_{n+1}y_{n+1}x_{n+1} = z_n$, on déduit en posant $X = \Pi(x_{n+1})$ et $Y = \Pi(y_{n+1})$ que :

$$XY = YX \text{ et } YX = (1 - q_{n+1})^{-1}\Pi(z_n).$$

Par suite, tout élément de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/I'$ s'écrit :

$$a_{-p}X^p + ... + a_{-1}X + a_0 + a_1Y + ... + a_mY^m,$$

avec $\forall i \in \{-p, ..., 0, ..., m\}$, $a_i \in \Pi(A_n^{\bar{q},\Lambda})$. De plus, une telle écriture est unique puisque I' est un idéal gradué de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, et ceci pour la $\mathbf{Z}$-graduation de 2.1.5. Rappelons par ailleurs que $\Pi(A_n^{\bar{q},\Lambda}) \cong A_n^{\bar{q},\Lambda}/I' \cap A_n^{\bar{q},\Lambda} = A_n^{\bar{q},\Lambda}/I$. Soient alors a et b deux éléments non nuls de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}/I'$:

$$a = a_{-p}X^p + ... + a_{-1}X + a_0 + a_1Y + ... + a_mY^m$$
$$\text{et } b = b_{-r}X^r + ... + b_{-1}X + b_0 + b_1Y + ... + b_lY^l.$$

On note i (resp. j) le plus grand indice de $\{-p, ..., m\}$ (resp. $\{-r, ..., l\}$) tel que $a_i \neq 0$ (resp. $b_j \neq 0$). De plus, on pose $s = 0$ si $ij \geq 0$ et $s = \inf(|i|, |j|)$ sinon. On constate aisément qu'alors, le coefficient du terme de plus haut degré dans ab est, à un multiple scalaire non nul près : $a_ib'_j\Pi(z_n)^s$, où $b'_j = \overline{\tau}_{n+1}^i(b_j)$ si $i \geq 0$ et $b'_j = \overline{\sigma}_{n+1}^{-i}(b_j)$ si $i < 0$. Si l'on suppose alors que I est premier, comme $\Pi(z_n)$ est normal dans $\Pi(A_n^{\bar{q},\Lambda})$, on a $\Pi(z_n)^s \neq 0$, et il existe donc c' et d dans $\Pi(A_n^{\bar{q},\Lambda})$ tels que $a_ic'b'_jd\Pi(z_n)^s \neq 0$. La normalité de $\Pi(z_n)$ assure alors : $a_ic'b'_j\Pi(z_n)^s \neq 0$.

Dans ces conditions, posons $c = \overline{\tau}_{n+1}^{-i}(c')$ si $i \geq 0$ et $c = \overline{\sigma}_{n+1}^{i}(c')$ si $i < 0$. Il est facile de prouver que le coefficient du terme de plus haut degré de acb est, à un multiple scalaire non nul près, $a_ic'b'_j\Pi(z_n)^s$. Donc $acb \neq 0$ et par suite, I' est premier. Naturellement, le même procédé effectué avec $c = 1$ prouve que si I est complètement premier, I' l'est aussi. □

3.1.4 Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; un idéal I de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est dit algorithmique, s'il existe une suite d'idéaux I_i de $A_i^{\bar{q},\Lambda}$, pour $i \in \mathbf{N}_n$, tels que :*
(i) $I_1 = (0)$ ou (z_1) ;
(ii) I_{i+1} soit un étendu de I_i, pour $i \in \mathbf{N}_{n-1}$;
(iii) $I_n = I$.

D'après le lemme 3.1.2 (ii), si une telle suite existe, on a :

$$\forall j \in \mathbf{N}_n, \ \ I_j = I \cap A_j^{\bar{q},\Lambda}.$$

En particulier, la famille $\{I_1, ..., I_n\}$ est unique ; on l'appellera *famille associée* à l'idéal algorithmique I.

L'ensemble des idéaux algorithmiques de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est appelé *spectre algorithmique* de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, et noté specalg$(A_n^{\bar{q},\Lambda})$.

Il est clair qu'un étendu d'un idéal algorithmique est lui même algorithmique.

3.1.5 Exemples. Le spectre algorithmique de $A_1^{\bar{q},\Lambda}$ est $\{(0),(z_1)\}$. Celui de $A_2^{\bar{q},\Lambda}$ est $\{(0),(z_1),(z_2),(x_2),(y_2),(x_2,y_2)\}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'idéal $(x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$ est un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ et contient tous les idéaux algorithmiques de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

3.1.6 Remarque. Puisque l'on suppose $q_1 \neq 1$, les idéaux (0) et (z_1) de $A_1^{\bar{q},\Lambda}$, sont complètement premiers et propres. Il s'ensuit, par le lemme 3.1.2, que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les idéaux algorithmiques de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, sont complètement premiers et propres.

3.1.7 Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et J un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. On pose :*

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma}_n(J) = \emptyset \text{ si } z_n \notin J,\\
&\bar{\gamma}_n(J) = \{z_n\} \text{ si } z_n \in J,\ \ x_n \ \text{ et } \ y_n \notin J,\\
&\bar{\gamma}_n(J) = \{x_n\} \text{ si } z_n \in J,\ \ x_n \in J \ \text{ et } \ y_n \notin J,\\
&\bar{\gamma}_n(J) = \{y_n\} \text{ si } z_n \in J,\ \ y_n \in J \ \text{ et } \ x_n \notin J,\\
&\bar{\gamma}_n(J) = \{x_n, y_n\} \text{ si } z_n \in J,\ \ x_n \ \text{ et } \ y_n \in J.
\end{aligned}$$

Et, pour $i \in \mathbf{N}_n$, on pose :

$$\gamma_i(J) = \bar{\gamma}_i(J \cap A_i^{\bar{q},\Lambda}).$$

Notons que, comme J est propre, de $x_1y_1 - q_1y_1x_1 = 1$ on déduit $\gamma_1(J) = \emptyset$ ou $\{z_1\}$, puisqu'alors J ne peut contenir ni x_1, ni y_1.

On note d'autre part : $\gamma(J) = \{\gamma_i(J),\ \ i \in \mathbf{N}_n\}$.

3.1.8 Proposition - Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et J un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. Alors, $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i(J)$ est une famille génératrice de J. Pour cette raison, $\gamma(J)$ est appelée la famille complète de générateurs de J.*

D'autre part, on appelle taille de J, l'entier noté $\#J$ égal à $\sum_{i=1}^n \#\gamma_i(J)$.

Preuve : Par définition, un idéal algorithmique est engendré par une famille exclusivement constituée de z_i, x_i et y_i pour $1 \leq i \leq n$. Or, par définition de $\gamma_i(J)$, si un tel élément est dans J, il figure dans l'idéal engendré par $\gamma_i(J)$. Donc, l'idéal engendré par $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i(J)$ contient une famille génératrice de J. □

3.1.9 Définition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; on note $\mathcal{F}_n$, le sous ensemble de*

$$\{\emptyset, \{z_1\}\} \times \prod_{i=2}^n \{\emptyset, \{z_i\}, \{x_i\}, \{y_i\}, \{x_i, y_i\}\},$$

constitué des éléments $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ qui satisfont aux deux règles suivantes, pour $1 \leq i \leq n-1$:
Règle 1 : $\alpha_i \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \alpha_{i+1} \neq \{z_{i+1}\}$,
Règle 2 : $\alpha_i = \emptyset \ \Rightarrow \ \alpha_{i+1} = \emptyset$ ou $\{z_{i+1}\}$.

3.1.10 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; alors :*
(i) si J est un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, $\gamma(J) \in \mathcal{F}_n$.
(ii) Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dans $\mathcal{F}_n$; posons $\beta_i = \bigcup_{j=1}^{i} \alpha_j$ et L_i l'idéal de $A_i^{\bar{q},\Lambda}$ engendré par β_i pour $1 \leq i \leq n$. Alors, L_i est algorithmique de famille associée $\{L_1, ..., L_i\}$, pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve : (i) Nous avons déjà remarqué que $\gamma_1(J) \in \{\emptyset, \{z_1\}\}$. Il reste donc à prouver que les règles 1 et 2 (définition 3.1.9) sont respectées.

Soit $i \in \mathbf{N}_{n-1}$, supposons $\gamma_i(J) \neq \emptyset$, alors $z_i \in J$ puisque $z_i = x_i y_i - y_i x_i$ (voir 2.1.2). Supposons de plus $\gamma_{i+1}(J) \neq \emptyset$; comme $z_{i+1} - z_i = (q_{i+1} - 1) y_{i+1} x_{i+1}$, il vient $y_{i+1} x_{i+1} \in J$. Comme J est complètement premier, il s'ensuit que la règle 1 est vérifiée.

Supposons à présent $\gamma_i(J) = \emptyset$; si $\gamma_{i+1}(J) = \{x_{i+1}\}$, $\{y_{i+1}\}$ ou $\{x_{i+1}, y_{i+1}\}$, de $x_{i+1} y_{i+1} - q_{i+1} y_{i+1} x_{i+1} = z_i$, on déduit que $z_i \in J$. Mais alors, par définition de $\gamma_i(J)$, on doit avoir $\gamma_i(J) \neq \emptyset$. Il y a donc contradiction, et la règle 2 est satisfaite.

En conclusion, on a bien $\gamma(J) \in \mathcal{F}_n$.

(ii) Signalons d'emblée que $\forall i \in \mathbf{N}_n$, les L_i sont $(\tau_{i+1}, \sigma_{i+1}, \delta_{i+1})-$stables.

Etant donné $n \in \mathbf{N}^*$, nous procédons par récurrence finie sur $i \in \mathbf{N}_n$.

Par hypothèse, $\alpha_1 = \emptyset$ ou $\{z_1\}$, donc $L_1 = (0)$ ou (z_1).

Supposons le résultat acquis à l'ordre i pour $i \in \mathbf{N}_{n-1}$. Il s'agit de prouver que L_{i+1} est un étendu de L_i.

On a $L_{i+1} = (L_i, \alpha_{i+1})$ par construction.

1-er cas : Supposons que $z_i \notin L_i$; alors $\alpha_i = \emptyset$ et donc, d'après la règle 2, $\alpha_{i+1} = \emptyset$ ou $\{z_{i+1}\}$. Ceci assure que L_{i+1} est un étendu de L_i.

2-ème cas : Supposons que $z_i \in L_i$; si l'on prouve que $\alpha_i \neq \emptyset$, la règle 1 assurera que $\alpha_{i+1} \neq \{z_{i+1}\}$, et L_{i+1} sera bien un étendu de L_i.

Supposons donc $z_i \in L_i$ et $\alpha_i = \emptyset$. Pour $i = 1$, ceci conduit à $z_1 \in (0)$ ce qui est absurde. On se place donc dans le cas $i \geq 2$. Par hypothèse de récurrence, L_i est un étendu de L_{i-1}, donc d'aprés le lemme 3.1.2, $L_i = L_{i-1} A_i^{\bar{q},\Lambda}$. Donc, il vient :

$$z_i = \sum_{k,l} a_{kl} y_i^l x_i^k, \quad \text{où} \quad a_{kl} \in L_{i-1}.$$

En remplaçant z_i par $z_{i-1} + (q_i - 1) y_i x_i$ (voir 2.1.2 (4)), et en utilisant le fait que $A_i^{\bar{q},\Lambda}$ est un $A_{i-1}^{\bar{q},\Lambda}$-module libre à gauche de base $\{y_i^l x_i^k,\ (k,l) \in \mathbf{N}^2\}$, on obtient : $a_{kl} = 0$ si $(k,l) \neq (0,0)$ ou $(1,1)$ et $a_{11} \in k^*$. Mais alors, $L_{i-1} = A_{i-1}^{\bar{q},\Lambda}$, ce qui est impossible puisque par hypothèse de récurrence, L_{i-1} est un idéal algorithmique et donc un idéal propre. Donc, si $z_i \in L_i$, $\alpha_i \neq \emptyset$. □

L'idéal L_n construit dans la proposition 3.1.10 (ii) sera noté $L(\alpha)$; on dispose alors des deux applications :

$$\begin{array}{rcl} \gamma & : & specalg(A_n^{\bar{q},\Lambda}) \longrightarrow \mathcal{F}_n \\ & & J \longmapsto \gamma(J) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} L & : & \mathcal{F}_n \longrightarrow specalg(A_n^{\bar{q},\Lambda}) \\ & & \alpha \longmapsto L(\alpha) \end{array}.$$

L'objectif est, à présent, de prouver que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. Il en découlera que la famille $\mathcal{F}_n$ paramètre le spectre algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

Il est clair, dès à présent, que $L \circ \gamma = \mathrm{id}$: soit en effet J un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, comme $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i(J)$ engendre J, il vient $L(\gamma(J)) = J$.

Il reste à établir que $\gamma \circ L = id$.

3.1.11 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; si I est un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ (et donc $(\tau_{n+1}, \sigma_{n+1}, \delta_{n+1})$-stable) et si $I' = (I, \alpha_{n+1})$ est un étendu de I, alors $\gamma_{n+1}(I') = \alpha_{n+1}$.*

Preuve : Nous procédons au cas par cas suivant les différentes valeurs possibles de $\gamma_{n+1}(I')$. Remarquons que I' étant un étendu de I, il est algorithmique et le lemme 3.1.2 assure que I' est égal à l'idéal à droite $(I, \alpha_{n+1})A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$.

1-er cas : $\gamma_{n+1}(I') = \emptyset$. Il est clair alors que $\alpha_{n+1} = \emptyset$, car sinon on aurait $z_{n+1} \in I'$ et donc $\gamma_{n+1}(I') \neq \emptyset$. Ainsi, $\gamma_{n+1}(I') = \emptyset$ entraine $\alpha_{n+1} = \emptyset$.

2-ème cas : $\gamma_{n+1}(I') = \{z_{n+1}\}$. Par définition de $\gamma_{n+1}(I')$, cette situation interdit d'avoir $\alpha_{n+1} = \{x_{n+1}\}, \{y_{n+1}\}$ ou $\{x_{n+1}, y_{n+1}\}$. Il reste alors à montrer que $\alpha_{n+1} \neq \emptyset$. Supposons donc $\alpha_{n+1} = \emptyset$; alors de $z_{n+1} \in I'$, on déduit :

$$z_{n+1} = \sum_{k,l} a_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k, \quad \text{où } a_{kl} \in I.$$

Nous avons déjà vu (preuve de la proposition 3.1.10) que cela impose $a_{11} \in k^*$ et donc $I = A_n^{\bar{q},\Lambda}$, ce qui est absurde puisque I est algorithmique. Donc, $\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1}(J)$.

3-ème cas : $\gamma_{n+1}(I') = \{x_{n+1}\}$. Par définition de $\gamma_{n+1}(I')$, cette situation interdit d'avoir $\alpha_{n+1} = \{y_{n+1}\}$ ou $\{x_{n+1}, y_{n+1}\}$. De plus, on a $z_{n+1} \in I'$, ce qui écarte la possibilité d'avoir $\alpha_{n+1} = \emptyset$ d'après la preuve du 2-ème cas. Supposons donc $\alpha_{n+1} = \{z_{n+1}\}$, seul cas restant en dehors de celui souhaité. Alors :

$$x_{n+1} = \sum_{k,l} a_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k + z_{n+1} \sum_{k,l} b_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k, \quad \text{où } a_{kl} \in I \text{ et } b_{kl} \in A_n^{\bar{q},\Lambda}.$$

Compte tenu de la $\mathbf{Z}$-graduation de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, on doit avoir :

$$x_{n+1} = \sum_{l \geq 0} a_{l+1,l} y_{n+1}^l x_{n+1}^{l+1} + z_{n+1} \sum_{l \geq 0} b_{l+1,l} y_{n+1}^l x_{n+1}^{l+1}.$$

$A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ est intègre, on peut donc simplifier par x_{n+1} ; il vient :

$$1 = \sum_{l} a_{l+1,l} y_{n+1}^l x_{n+1}^l + z_{n+1} \sum_{l} b_{l+1,l} y_{n+1}^l x_{n+1}^l.$$

On en déduit que $1 \in I'$, ce qui est absurde car il est algorithmique.

4-ème cas : $\gamma_{n+1}(I') = \{y_{n+1}\}$. La situation est analogue à celle du 3-ème cas. En particulier, on peut exclure d'emblée $\alpha_{n+1} = \emptyset$, $\{x_{n+1}\}$ ou $\{x_{n+1}, y_{n+1}\}$. Il reste donc à prouver que $\alpha_{n+1} \neq \{z_{n+1}\}$. Dans le cas contraire, il vient :

$$y_{n+1} = \sum_{k,l} a_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k + z_{n+1} \sum_{k,l} b_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k, \quad \text{où } a_{kl} \in I \text{ et } b_{kl} \in A_n^{\bar{q},\Lambda}.$$

Compte tenu de la **Z**-graduation de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$, on doit avoir :

$$y_{n+1} = \sum_k a_{k,k+1} y_{n+1}^{k+1} x_{n+1}^k + z_{n+1} \sum_k b_{k,k+1} y_{n+1}^{k+1} x_{n+1}^k.$$

Ce dont on déduit (voir (5) de la remarque 2.1.2) :

$$y_{n+1} = y_{n+1} \sum_k \tau_{n+1}^{-1}(a_{k,k+1}) y_{n+1}^k x_{n+1}^k + q_{n+1} y_{n+1} z_{n+1} \sum_k \tau_{n+1}^{-1}(b_{k,k+1}) y_{n+1}^k x_{n+1}^k.$$

Une simplification par y_{n+1} conduit à la même contradiction que dans le cas précédent.

5-ème cas : $\gamma_{n+1}(I') = \{x_{n+1}, y_{n+1}\}$. L'éventualité $\alpha_{n+1} = \emptyset$ ou $\{z_{n+1}\}$ est exclue par les cas 2 et 3. Supposons $\alpha_{n+1} = \{y_{n+1}\}$, on doit alors avoir :

$$x_{n+1} = \sum_{k,l} a_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k + y_{n+1} \sum_{k,l} b_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k, \quad \text{où} \quad a_{kl} \in I \quad \text{et} \quad b_{kl} \in A_n^{\bar{q},\Lambda}.$$

Des considérations de degrés donnent alors :

$$x_{n+1} = \sum_{l \geq 0} a_{l+1,l} y_{n+1}^l x_{n+1}^{l+1} + y_{n+1} \sum_{l \geq 0} b_{l+2,l} y_{n+1}^l x_{n+1}^{l+2}.$$

Et on tombe sur la contradiction que $1 \in I'$.

Seul le cas $\alpha_{n+1} = \{x_{n+1}\}$ reste à examiner. On doit alors avoir :

$$y_{n+1} = \sum_{k,l} a_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k + x_{n+1} \sum_{k,l} b_{kl} y_{n+1}^l x_{n+1}^k, \quad \text{où} \quad a_{kl} \in I \quad \text{et} \quad b_{kl} \in A_n^{\bar{q},\Lambda}.$$

Des considérations de degrés donnent alors :

$$y_{n+1} = \sum_{k \geq 0} a_{k,k+1} y_{n+1}^{k+1} x_{n+1}^k + x_{n+1} \sum_{k \geq 0} b_{k,k+2} y_{n+1}^{k+2} x_{n+1}^k.$$

Ce dont on déduit :

$$y_{n+1} = y_{n+1} \sum_{k \geq 0} \tau_{n+1}^{-1}(a_{k,k+1}) y_{n+1}^k x_{n+1}^k + x_{n+1} y_{n+1}^2 \sum_{k \geq 0} \tau_{n+1}^{-2}(b_{k,k+2}) y_{n+1}^k x_{n+1}^k.$$

Compte tenu de la relation (1) de la preuve du lemme 2.1.5, il s'ensuit :

$$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & y_{n+1} \sum_{k \geq 0} \tau_{n+1}^{-1}(a_{k,k+1}) y_{n+1}^k x_{n+1}^k \\ & + (q_{n+1}^2 y_{n+1}^2 x_{n+1} + (2)_{q_{n+1}} z_n y_{n+1}) \sum_{k \geq 0} \tau_{n+1}^{-2}(b_{k,k+2}) y_{n+1}^k x_{n+1}^k. \end{aligned}$$

En observant alors (voir (5) remarque 2.1.2) que z_n commute à y_{n+1}, on voit que l'on peut simplifier par y_{n+1}. Il s'ensuit que $1 \in I'$ puisque x_{n+1} et donc z_n sont dans I'. $\square$

3.1.12 Corollaire. *$\forall n \in \mathbf{N}^*$, γ et L sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

Preuve : Montrons que $\gamma \circ L = id$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathcal{F}_n$; nous utilisons les notations de la proposition 3.1.10 (ii). La famille $\{L_1, ..., L_n\}$ est constituée d'idéaux algorithmiques tels que pour $1 \leq i < n$, $L_{i+1} = (L_i, \alpha_{i+1})$ soit un étendu de L_i. D'après le lemme 3.1.2 et la définition 3.1.4, on a donc $\gamma_i(L_i) = \gamma_i(L(\alpha))$ pour $1 \leq i \leq n$. D'après la proposition 3.1.11 et l'égalité $L_{i+1} = (L_i, \alpha_{i+1})$, on a $\gamma_{i+1}(L_{i+1}) = \alpha_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. Par conséquent, $\gamma_i(L(\alpha)) = \alpha_i$ pour $2 \leq i \leq n$.

Enfin, comme d'une part, $\gamma_1(L_1) = \gamma_1(L(\alpha))$ et d'autre part $L_1 = (\alpha_1) = (0)$ ou (z_1), il vient $\gamma_1(L(\alpha)) = \alpha_1$ $\square$

3.1.13 Lemme. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et I un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ tel que $\#I > 0$; alors, il existe un idéal algorithmique J de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ tel que $J \subset I$ et $\#J$=$\#I$-1.*

Preuve : On pose $\gamma(I) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $k = \sup\{i \in \mathbf{N}_n \ / \alpha_i \neq \emptyset\}$.

Si $\alpha_k = \{x_k, y_k\}$, on pose $\alpha'_k = \{x_k\}$; sinon, $\alpha'_k = \emptyset$. Alors, si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha'_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_n)$, on prouve aisément que $\alpha \in \mathcal{F}_n$. Il s'ensuit, d'après 3.1.10 et 3.1.12, que $L(\alpha)$ est un idéal algorithmique dont la famille complète de générateurs est α. Il est donc de taille $\#I - 1$ et est strictement inclus dans I. $\square$

3.1.14 Corollaire. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et I un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$; alors ht $I \geq \#I$.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate du lemme 3.1.13. $\square$

3.1.15 Remarque. Il est immédiat, d'après les définitions 3.1.1 et 3.1.4, que le cardinal du spectre algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est fini pout tout $n \in \mathbf{N}^*$.

La proposition 3.1.16 permet de le calculer explicitement.

3.1.16 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, si c_n désigne le cardinal du spectre algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$,*

$$c_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n].$$

Preuve : On va montrer que la suite finie $(c_m)_{m \in \mathbf{N}_n}$ est une suite récurrente linéaire.

On fixe $m \in \mathbf{N}_{n-1}$. Soit J un idéal algorithmique de $A_{m+1}^{\bar{q},\Lambda}$. Par définition (voir 3.1.4), il existe J_0 idéal algorithmique de $A_m^{\bar{q},\Lambda}$ tel que J soit un étendu de J_0 ; en outre, d'après le lemme 3.1.2, $J \cap A_m^{\bar{q},\Lambda} = J_0$. Il s'ensuit que si J_0 et J'_0 sont deux idéaux algorithmiques distincts de $A_m^{\bar{q},\Lambda}$, l'ensemble des étendus de J_0 est disjoint de l'ensemble des étendus de J'_0.

Soit alors J_0 idéal algorithmique de $A_m^{\bar{q},\Lambda}$. Si $z_m \notin J$, il existe deux étendus de J_0, tandis que si $z_m \in J_0$, il en existe quatre (voir 3.1.1). D'autre part, 3.1.11 assure que les divers étendus obtenus dans chaque cas sont deux à deux distincts.

Par suite, si e_m désigne le nombre d'idéaux algorithmiques de $A_m^{\bar{q},\Lambda}$ qui ne contiennent pas z_m, on a :

$$c_{m+1} = 4(c_m - e_m) + 2e_m = 2(2c_m - e_m).$$

Supposons à présent $m \geq 2$; si J_0 est un idéal algorithmique de $A_m^{\bar{q},\Lambda}$, $z_m \notin J$ équivaut à $\gamma_m(J_0) = \emptyset$. Par ailleurs, J_0 est un étendu d'un idéal algorithmique J_1 de $A_{m-1}^{\bar{q},\Lambda}$: $J_0 = (J_1, \alpha_m)$. Mais alors, d'après 3.1.11, $\alpha_m = \emptyset$.

Réciproquement, l'idéal engendré dans $A_m^{\bar{q},\Lambda}$ par un idéal algorithmique donné de $A_{m-1}^{\bar{q},\Lambda}$ est un idéal algorithmique qui ne contient pas z_m. D'après le lemme 3.1.2, il s'ensuit une correspondance bijective, entre le spectre algorithmique de $A_{m-1}^{\bar{q},\Lambda}$ et l'ensemble des idéaux algorithmiques de $A_m^{\bar{q},\Lambda}$ qui ne contiennent pas z_m. Ainsi $e_m = c_{m-1}$.

Il vient alors, pour $m \geq 2$:

$$c_{m+1} = 2(2c_m - c_{m-1}).$$

Compte tenu du fait que $c_1 = 2$ et $c_2 = 6$ (voir 3.1.5), on en déduit que :

$$\forall m \in \mathbf{N}_n \quad : \quad c_m = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{2})^m + (2-\sqrt{2})^m]. \qquad \square$$

3.1.17 Remarque. Il est immédiat d'après 3.1.16 que le cardinal du spectre algorithmique de $A_3^{\bar{q},\Lambda}$, $A_4^{\bar{q},\Lambda}$ et $A_5^{\bar{q},\Lambda}$ est respectivement, 20, 68 et 232.

3.2 Spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Etant donné un idéal algorithmique J de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, on note :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \{j \in \mathbf{N}_n \ / \ y_j \in J\} \\ \text{et } \mathcal{I} &= \{i \in \mathbf{N}_n \ / \ (x_i \in J) \text{ ou } (z_i \in J \text{ et } z_{i-1} \notin J)\}. \end{aligned}$$

Il est aisé de prouver que $\mathcal{I} = \emptyset$ si et seulement si $J = (0)$. Enfin, on note S la partie multiplicative de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ engendrée par k^* et les y_j, $j \in \mathbf{N}_n$, qui ne sont pas dans J. C'est une partie de Ore à droite de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ en vertu du lemme 2.2.1. Comme J est complètement premier d'après la remarque 3.1.6, $J \cap S = \emptyset$. Donc, d'après la proposition 3.6.15 de [3], si $\overline{S}$ désigne l'image de S par la projection canonique $A_n^{\bar{q},\Lambda} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow A_n^{\bar{q},\Lambda}/J$, on a $(A_n^{\bar{q},\Lambda}S^{-1})/(JS^{-1}) \cong (A_n^{\bar{q},\Lambda}/J)\overline{S}^{\,-1}$.

Enfin, avec les notations du paragraphe 2.3, on considère la partie multiplicative T de $k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ engendrée par les Y_j pour $j \notin \mathcal{J}$. De plus, on pose $Z_i = X_iY_i - Y_iX_i$ pour $i \in \mathbf{N}_n$ et par convention $z_0 = Z_0 = 1$.

Dans ces conditions, il existe un homomorphisme d'algèbres Ψ_J, de $A_n^{\bar{q},\Lambda}S^{-1}$ dans $(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1}$ tel que :

$\Psi_J(x_i) = \Psi_J(y_i) = 0$ pour $x_i \in J$ et $y_i \in J$,

$\Psi_J(y_i) = Y_i$ pour $y_i \notin J$,
et tel que si $x_i \notin J$:

1. $\Psi_J(x_i) = X_i - (q_i - 1)^{-1} Y_i^{-1} Z_{i-1}$ lorsque $z_i\ ,\ z_{i-1} \notin J$,
2. $\Psi_J(x_i) = X_i$ lorsque $z_{i-1} \in J$,
3. $\Psi_J(x_i) = -(q_i - 1)^{-1} Y_i^{-1} Z_{i-1}$ lorsque $z_{i-1} \notin J$ et $z_i \in J$.

Notons que ces trois cas sont distincts, envisagent toutes les possibilités et sont tous possibles, comme on le voit si l'on examine l'image de x_2 par Ψ_J pour $J = (0)$, (z_1) et (z_2) dans $A_2^{\bar{q},\Lambda}$.

Il est clair, d'autre part, que l'homomorphisme Ψ_J est surjectif.

Rappelons, par ailleurs, que comme l'idéal J est algorithmique, il est engendré par une famille exclusivement composée de x_i, y_i et z_i, pour $i \in \mathbf{N}_n$, par exemple par $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i(J)$.

Mais, soit $i \in \mathbf{N}_n$ tel que $z_i \in J$. Si x_i ou $y_i \in J$, par définition de Ψ_J, $\Psi_J(z_i) = 0$. Sinon, $\gamma_i(J) = \{z_i\}$, ce qui, en vertu de la relation $z_i - z_{i-1} = (q_i - 1) y_i x_i$ (voir (4) remarque 2.1.2), impose que $z_{i-1} \notin J$ puisque J est complètement premier. On a donc $\Psi_J(y_i) = Y_i$ et $\Psi_J(x_i) = -(q_i - 1)^{-1} Y_i^{-1} Z_{i-1}$. De la remarque 2.3.6, on déduit alors que $\Psi_J(z_i) = 0$.

Finalement, il vient que tout élément de la famille $\bigcup_{i=1}^n \gamma_i(J)$ (qui engendre JS^{-1}) est envoyé sur 0 par Ψ_J. Donc, Ψ_J induit un morphisme surjectif d'algèbres :

$$\overline{\Psi}_J \ : \ (A_n^{\bar{q},\Lambda} S^{-1})/(JS^{-1}) \longrightarrow (k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1}.$$

3.2.1 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et J un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. Avec les notations du paragraphe 3.2, $\overline{\Psi}_J$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Preuve : Il reste à démontrer que $JS^{-1} = \ker \Psi_J$.

D'après la remarque 2.3.7, $k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ est un e.q.m. à $2n - (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J})$ générateurs, et il est bien connu qu'alors, $GKdim\ (k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1} = 2n - (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J})$ (voir par exemple 5.1 [11]). Ainsi :

$$GKdim\ (A_n^{\bar{q},\Lambda} S^{-1})/\ker \Psi_J \ = \ GKdim\ (k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1} \ = \ 2n - (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}).$$

D'autre part, $\#J = \#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}$. C'est une observation qui découle facilement des définitions de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ ainsi que de la définition d'idéal algorithmique.

Par conséquent, d'après le corollaire 3.1.14, ht$J \geq \#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}$, et comme $J \cap S = \emptyset$, ceci implique ht$JS^{-1} \geq \#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}$. Mais alors, d'après le corollaire 3.16 de [10],

$$GKdim(A_n^{\bar{q},\Lambda} S^{-1})/JS^{-1} \ \leq \ 2n - (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}).$$

Or $JS^{-1} \subseteq \ker \Psi_J$, entraine que

$$GKdim(A_n^{\bar{q},\Lambda} S^{-1})/JS^{-1} \geq GKdim(A_n^{\bar{q},\Lambda} S^{-1})/\ker \Psi_J = 2n - (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}).$$

Ceci conduit donc à $GKdim\ (A_n^{\bar{q},\Lambda}S^{-1})/\ker\Psi_J \;=\; GKdim\ (A_n^{\bar{q},\Lambda}S^{-1})/JS^{-1}$ et comme JS^{-1} est complètement premier, on en déduit $JS^{-1} = \ker\Psi_J$. $\square$

3.2.2 Remarque. Il est bien connu (corollaire 8.5 de [4]) que si k est algébriquement clos et q_1 non racine de l'unité, le spectre de $A_1^{\bar{q},\Lambda}$ est réduit au schéma suivant :

$$\begin{array}{c} (z_1\ ,\ x_1-\alpha)_{\alpha\in k^*} \\ | \\ (z_1) \\ | \\ (0) \end{array}$$

On observe en particulier qu'il est composé d'un treillis fini constitué par (0) et (z_1) qui sont les idéaux algorithmiques de $A_1^{\bar{q},\Lambda}$, et d'une famille à un paramètre α décrivant k^* qui constitue l'ensemble des idéaux maximaux.

C'est ce résultat que la proposition suivante généralise sous certaines hypothèses.

3.2.3 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$; on suppose le corps k algébriquement clos et de caractéristique 0, et Γ_n libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$. Alors le spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est composé des idéaux algorithmiques et des idéaux (maximaux) de la forme $(x_1-\alpha\ ,\ x_2\ ,\ y_2\ ,\dots,\ x_n\ ,\ y_n)$ pour $\alpha \in k^*$.*

Preuve : Elle se fait par récurrence sur n.

La façon dont le spectre de $A_2^{\bar{q},\Lambda}$ se déduit du spectre de $A_1^{\bar{q},\Lambda}$ est en tout point semblable à la façon dont le spectre de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ se déduit du spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ pour $n \geq 2$. Nous ne donnons donc pas le détail de la preuve qui conduit au spectre de $A_2^{\bar{q},\Lambda}$:

Supposons donc que pour $n \in \mathbf{N}^*$, la proposition 3.2.3 soit vraie.

1. Determination du spectre de $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda} = A_n^{\bar{q},\Lambda}[y_{n+1};\tau_{n+1}]$.

Comme Γ_{n+1} est libre et $\mathrm{car}(k)=0$ les idéaux premiers de $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ et ceux de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ sont complètement premiers, en vertue du théorème 2.1.6. On peut donc appliquer les résultats du théorème 1.2 puisque de plus, $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ est une extension 1-tordue de type $(*,0)$ de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

Pour dresser la liste exhaustive des idéaux premiers de $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$, il suffit de déterminer pour tout $Q \in \mathrm{Spec}A_n^{\bar{q},\Lambda}$, l'ensemble des idéaux $P \in \mathrm{Spec}A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ tels que $P \cap A_n^{\bar{q},\Lambda} = Q$ (on dira que P se contracte à Q) ; pour ceci, nous allons utiliser le théorème 1.2.

Soit J un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

On remarque d'emblée que $\#\mathcal{I}+\#\mathcal{J} \leq 2n-1$. En effet, nous avons déjà remarqué (preuve de 3.2.1) que $\#\mathcal{I}+\#\mathcal{J} = \#J = \sum_{i=1}^{n}\#\gamma_i(J)$. Or, $\gamma_1(J) \leq 1$ et $\forall i \in \mathbf{N}_n \setminus \{1\}$, $\gamma_i(J) \leq 2$; d'où $\#\mathcal{I}+\#\mathcal{J} \leq 1+2(n-1) = 2n-1$.

Compte tenu de la définition de J, il est τ_{n+1}-stable (voir, par exemple, sa famille complète de générateurs). On note $F = \mathrm{Frac}(A_n^{\bar{q},\Lambda}/J)$; τ_{n+1} induit sur F un automorphisme encore noté τ_{n+1}. On note $E = F[Y_{n+1}^{\pm 1};\tau_{n+1}]$. Dans les notations de la proposition 3.2.1, on dispose d'un isomorphisme $\overline{\Psi}_J$ entre $(A_n^{\bar{q},\Lambda}S^{-1})/(JS^{-1})$ et $(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1}$, qui se prolonge à un isomorphisme entre F et $\mathrm{Frac}(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})$; il suffit pour cela d'utiliser l'isomorphisme déjà cité au paragraphe 3.2 entre $(A_n^{\bar{q},\Lambda}S^{-1})/(JS^{-1})$ et $(A_n^{\bar{q},\Lambda}/J)\overline{S}^{-1}$.

Finalement, nous obtenons $E \cong \mathrm{Frac}(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})[Y_{n+1}^{\pm 1};\tau'_{n+1}]$, où $\tau'_{n+1} = \overline{\Psi}_J \circ \tau_{n+1} \circ \overline{\Psi}_J^{-1}$ est l'isomorphisme induit par τ_{n+1} sur $\mathrm{Frac}(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})$ au moyen de $\overline{\Psi}_J$.

Examinons l'action de τ'_{n+1} sur $\mathrm{Frac}(k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})$ en rappelant (voir 2.3.7) que $k_{Q_n}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ est identifié à un e.q.m..

Soit $j \in \mathbf{N}_n \setminus \mathcal{J}$, $\overline{\Psi}_J(\ y_j+J\ ) = Y_j$ et $\tau_{n+1}(\ y_j+J\ ) = \lambda_{j,n+1}^{-1}(\ y_j+J\ )$; donc $\tau'_{n+1}(Y_j) = \lambda_{j,n+1}^{-1}Y_j$. Soit $i \in \mathbf{N}_n \setminus \mathcal{I}$, en examinant toutes les possibilités pour $\overline{\Psi}_J(\ x_i+J\ )$, on prouve aisément que $\tau'_{n+1}(X_i) = \lambda_{i,n+1}X_i$.

Mais alors, E est isomorphe à un localisé de $E' = (k_{Q_{n+1}}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I}\cup\{n+1\},\mathcal{J}})T'^{-1}$ où T' désigne la partie de Ore de $k_{Q_{n+1}}[\underline{Y},\underline{X}]/I_{\mathcal{I}\cup\{n+1\},\mathcal{J}}$ engendrée par les Y_j, $j \in \mathbf{N}_{n+1} \setminus \mathcal{J}$ et X_j, $j \in \mathbf{N}_n \setminus \mathcal{I}$.

Or, par hypothèse, Γ_{n+1} est libre de rang $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. D'autre part, comme $\#\mathcal{I}+\#\mathcal{J} \leq 2n-1$ (voir le début de cette preuve), il est immédiat que $\#\mathcal{I}\cup\{n+1\}+\#\mathcal{J} \leq 2n = 2(n+1)-2$. Nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 2.3.8 qui assure que E' est simple ; par suite, E est simple. De ce fait on déduit, en utilisant le théorème 1.3, que l'automorphisme τ_{n+1} induit sur F n'a pas de puissances intérieures. Mais alors, d'après le (iii) du théorème 1.2, il existe au plus deux idéaux (complètement) premiers de $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ qui se contractent à J.

Notons $J_{1/2}$ et $(J,y_{n+1})_{1/2}$ les idéaux de $A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$ engendrés respectivement par J et $J\cup\{y_{n+1}\}$. Comme J est τ_{n+1}-stable, on dispose des trois applications π, π' et $\pi''=\pi'\circ\pi$ définies par :

$$\begin{aligned} \pi'' \quad : \; A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2} &\stackrel{\pi}{\longrightarrow} (A^{\bar{q},\Lambda}_{n}/J)[y_{n+1};\tau_{n+1}] \stackrel{\pi'}{\longrightarrow} A^{\bar{q},\Lambda}_{n}/J \\ \sum a_i y^i_{n+1} &\longmapsto \sum (a_i + J) y^i_{n+1} \longmapsto a_0 + J. \end{aligned}$$

Comme pour la preuve du lemme 3.1.2, on montre facilement que π et π'' sont des morphismes surjectifs d'algèbres et que leurs noyaux sont les idéaux $J_{1/2}$ et $(J, y_{n+1})_{1/2}$ respectivement. Il s'ensuit de manière immédiate que $J_{1/2}$ et $(J, y_{n+1})_{1/2}$ sont complètement premiers, distincts et se contractent à J. Ce sont donc les seuls idéaux complètement premiers de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}$ qui se contractent à J.

Soit $J = (x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) \in \mathrm{Spec} A^{\bar{q},\Lambda}_{n}$, $\alpha \in k^*$.

Le fait qu'un tel idéal n'est pas τ_{n+1}-stable est une conséquence simple du fait qu'il est propre. Donc, d'après le (ii) du théorème 1.2, il existe au plus un idéal premier de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}$ qui se contracte à J. Or, $(x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, y_{n+1})$ convient. C'est donc le seul.

Ainsi, sous l'hypothèse que l'énoncé de 3.2.3 est vrai pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, et que Γ_{n+1} est libre de rang $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, nous avons prouvé que le spectre de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}$ est constitué des idéaux $J_{1/2}$ et $(J, y_{n+1})_{1/2}$ où J décrit le spectre algorithmique de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n}$ et des idéaux maximaux $(x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, y_{n+1})$ où α décrit k^*.

2. Détermination du spectre de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$.

Là encore, comme Γ_{n+1} est libre et $\mathrm{car}(k) = 0$, les idéaux premiers de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$ sont complètement premiers. La méthode utilisée pour passer du spectre de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}$ à celui de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$ est bien sûr la même que précédemment. Elle est légitime puisque $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1} = A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}[x_{n+1};\sigma_{n+1},\delta_{n+1}]$ où $(\sigma_{n+1},\delta_{n+1})$ est une dérivation q_{n+1}-tordue de type $(*,0)$ (q_{n+1} n'étant pas racine de l'unité).

Soit J un idéal algorithmique de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n}$. Nous lui avons associé deux idéaux premiers dans $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}$: $J_{1/2}$ et $(J, y_{n+1})_{1/2}$.

Idéaux de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$ *se contractant à* $(J, y_{n+1})_{1/2}$.

Il est clair que $(J, y_{n+1})_{1/2}$ est σ_{n+1}-stable. Donc pour qu'il puisse être la contraction d'un idéal de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$, il est nécéssaire qu'il soit δ_{n+1}-stable, et ceci en vertu du théorème 1.2 (i), ce qui revient à dire que $z_n \in J$. Nous supposons donc que $z_n \in J$.

Soit alors $F = \mathrm{Frac}(A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}/(J, y_{n+1})_{1/2})$. Il est clair que $F \cong \mathrm{Frac}(A^{\bar{q},\Lambda}_{n}/J)$, et si $E = F[X^{\pm 1}_{n+1};\sigma_{n+1}]$, en procédant comme ci-dessus, on prouve que E est simple. Donc il existe au plus deux idéaux premiers de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$ qui se contractent à $(J, y_{n+1})_{1/2}$. Or, les idéaux (J, y_{n+1}) et (J, y_{n+1}, x_{n+1}) de $A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1}$, engendrés respectivement par $J \cup \{y_{n+1}\}$ et $J \cup \{y_{n+1}, x_{n+1}\}$, sont des étendus de J (puisque $z_n \in J$) et par suite, ils sont algorithmiques et complètement premiers. De la proposition 3.1.11, on déduit que ces deux idéaux n'ont pas même famille complète de générateurs et par suite qu'ils sont distincts. Notons J' l'un ou l'autre de ces deux idéaux ; d'après le lemme 3.1.2, $J' \cap A^{\bar{q},\Lambda}_{n} = J$. Donc, $J' \cap A^{\bar{q},\Lambda}_{n+1/2}$ est un idéal complètement premier qui contient y_{n+1} et dont la contraction à $A^{\bar{q},\Lambda}_{n}$ est J. D'après ce que nous avons dit plus haut, le seul idéal ayant toutes ces propriétés est $(J, y_{n+1})_{1/2}$. Par conséquent, les idéaux (J, y_{n+1}) et (J, y_{n+1}, x_{n+1}) sont les deux idéaux complètement premiers de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ se contractant à $(J, y_{n+1})_{1/2}$.

Idéaux de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ *se contractant à* $J_{1/2}$.

$J_{1/2}$ est clairement $(\sigma_{n+1}, \delta_{n+1})$-stable. On note $F = \mathrm{Frac}(A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}/J_{1/2}) \cong \mathrm{Frac}((A_n^{\bar{q},\Lambda}/J)[y_{n+1}; \tau_{n+1}])$ puisque J est τ_{n+1}-stable.

Avec les notations de la proposition 3.2.1, on dispose d'un isomorphisme :

$\overline{\Psi}_J : (A_n^{\bar{q},\Lambda} S^{-1})/(JS^{-1}) \cong (A_n^{\bar{q},\Lambda}/J)\overline{S}^{-1} \longrightarrow (k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1}$,

qui se prolonge par $y_{n+1} \longmapsto Y_{n+1}$ en un isomorphisme :

$\overline{\Psi}'_J : ((A_n^{\bar{q},\Lambda}/J)\overline{S}^{-1})[y_{n+1}; \tau_{n+1}] \longrightarrow ((k_{Q_n}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T^{-1})[Y_{n+1}; \tau'_{n+1}]$,

où τ'_{n+1} a été défini au 1. de cette preuve. Par ailleurs, comme $\tau_{n+1}(\overline{S}) = \overline{S}$ et $\tau'_{n+1}(T) = T$, on a finalement (d'après [4] Lemme 1.4) un isomorphisme :

$\overline{\Psi}'_J : (A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}/J_{1/2})\overline{S}^{-1} \longrightarrow (k_{Q_{n+1}}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I}\cup\{n+1\},\mathcal{J}})T^{-1}$,

où $\mathcal{J}$ est vue comme une partie de $\mathbf{N}_{n+1}$. Par l'intermédiaire de $\overline{\Psi}'_J$, l'application induite par σ_{n+1} sur $(A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}/J_{1/2})\overline{S}^{-1}$ induit à son tour un automorphisme $\sigma'_{n+1} = \overline{\Psi}'_J \circ \sigma_{n+1} \circ (\overline{\Psi}'_J)^{-1}$ de $(k_{Q_{n+1}}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I}\cup\{n+1\},\mathcal{J}})T^{-1}$, et comme au 1., $E = F[X_{n+1}^{\pm 1}; \sigma_{n+1}]$ apparait comme un localisé de l'anneau $(k_{Q_{n+1}}[\underline{Y}, \underline{X}]/I_{\mathcal{I},\mathcal{J}})T_0^{-1}$ où T_0 est la partie multiplicative engendrée par les Y_j, $j \in \mathbf{N}_{n+1} \setminus \mathcal{J}$ et les X_i, $i \in \mathbf{N}_{n+1} \setminus \mathcal{I}$ (où $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont vues comme des parties de $\mathbf{N}_{n+1}$).

Or, comme $\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J} \leq 2n - 1 \leq 2(n+1) - 2$, cet anneau est simple d'après la proposition 2.3.8. Comme au 1., on conclu qu'au plus deux idéaux premiers de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ se contractent en $J_{1/2}$.

Si $z_n \in J$, les idéaux premiers engendrés respectivement par J et $J \cup \{x_{n+1}\}$ conviennent.

Si $z_n \notin J$, les idéaux premiers engendrés respectivement par J et $J \cup \{z_{n+1}\}$ conviennent.

Pour le prouver, il suffit de raisonner comme nous l'avons fait ci-avant pour les idéaux se contractant à $(J, y_{n+1})_{1/2}$.

Soit $J = (x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, y_{n+1}) \in \mathrm{Spec} A_{n+1/2}^{\bar{q},\Lambda}$, $\alpha \in k^*$.

On montre aisément que J n'est pas σ_{n+1}-stable et que l'idéal complètement premier de $A_{n+1}^{\bar{q},\Lambda}$ $(x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1})$ se contracte en J. C'est donc le seul.

Ceci achève la preuve. $\square$

3.2.4 Remarque. La proposition 3.2.3 prouve que, si k est algébriquement clos de caractéristique 0 et si Γ_n est libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, le spectre premier de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est composé d'un treillis fini, qui n'est autre que le spectre algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, et d'un ensemble à un paramètre dans k^*, formé par les idéaux maximaux. La proposition 3.1.16 donne le cardinal de ce treillis.

4. Applications

Dans cette dernière section, nous prouvons que sous les hypothèses de généricité de la proposition 3.2.3, l'algèbre $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est caténaire. Sous les mêmes hypothèses, nous calculons son groupe d'automorphismes.

4.1 Caténarité de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$

Nous allons utiliser de façon constante, les notations introduites au paragraphe 3.1.

4.1.1 Lemme. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, si I et J sont deux idéaux algorithmiques de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ tels que $I \subseteq J$, alors :*
(i) $\#I \leq \#J$, *et*
(ii) $\#I = \#J \implies I = J$.

Preuve : On pose $\gamma(I) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $\gamma(J) = (\beta_1, ..., \beta_n)$; $\gamma(I)$ et $\gamma(J)$ sont dans $\mathcal{F}_n$ (proposition 3.1.10 (i)). Dire que $I \subseteq J$ équivaut à la condition :

$$(\mathcal{C})\ \ \forall i \in \mathbf{N}_n \qquad \begin{aligned} &\alpha_i = \emptyset \Longrightarrow \beta_i \in \{\emptyset, \{z_i\}, \{x_i\}, \{y_i\}, \{x_i, y_i\}\}, \\ &\alpha_i = \{z_i\} \Longrightarrow \beta_i \in \{\{z_i\}, \{x_i\}, \{y_i\}, \{x_i, y_i\}\}, \\ &\alpha_i = \{x_i\} \Longrightarrow \beta_i \in \{\{x_i\}, \{x_i, y_i\}\}, \\ &\alpha_i = \{y_i\} \Longrightarrow \beta_i \in \{\{y_i\}, \{x_i, y_i\}\}, \\ &\alpha_i = \{x_i, y_i\} \Longrightarrow \beta_i \in \{\{x_i, y_i\}\}. \end{aligned}$$

Donc, par définition de la taille d'un idéal algorithmique, $\#I \leq \#J$.

Si de plus $\#I = \#J$, on doit avoir $\#\alpha_i = \#\beta_i$, $\forall i \in \mathbf{N}_n$. Donc, le seul cas où $\alpha_i = \beta_i$ n'est pas évident à priori est celui où $\alpha_i = \{z_i\}$, avec $i > 1$. Mais dans ce cas, la règle 1 (définition 3.1.9) impose que $\alpha_{i-1} = \emptyset$. Supposons que $\beta_i \in \{\{x_i\}, \{y_i\}\}$, alors la règle 2 impose que $\beta_{i-1} \neq \emptyset$, et on a $\#\beta_{i-1} > \#\alpha_{i-1}$, ce qui est une contradiction. $\square$

4.1.2 Corollaire. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; on suppose que k est algébriquement clos, de caractéristique 0 et que Γ_n est libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$. Alors :*
(i) si I est un idéal algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, ht $I = \#I$;
(ii) les idéaux maximaux de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ sont de hauteur $2n$.

Preuve : Vues les hypothèses faites sur k et Γ_n, le spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est celui décrit dans la proposition 3.2.3. Rappelons par ailleurs (corollaire 3.1.14), que pour un idéal algorithmique J, $\#J \leq \mathrm{ht}J$. En particulier, tout idéal algorithmique de hauteur 1 est de taille 1.

Nous allons prouver, par récurrence sur la hauteur, que pour tout idéal algorithmique J, $\#J = \mathrm{ht}J$.

Pour un idéal de hauteur 1, c'est la remarque ci-dessus. Supposons donc le résultat acquis pour tous les idéaux algorithmiques de hauteur au plus égale à un entier h fixé. Soit alors J un idéal algorithmique de hauteur $h+1$. Il existe un idéal premier J' inclus dans J, de hauteur h, qui d'après la forme du spectre premier de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ (proposition 3.2.3) est algorithmique. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $\#J' = \mathrm{ht}J - 1$. On a alors, d'après 4.1.1 et 3.1.14 :

$$\#J' + 1 \leq \#J \leq \mathrm{ht}J = \#J' + 1,$$

ce qui conduit à $\#J = \mathrm{ht}J$, et clot la preuve du point (i).

De plus, l'idéal $K = (x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$ contient tous les idéaux algorithmiques de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ et $\gamma(K) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ où $\alpha_1 = \{z_1\}$ et $\alpha_i = \{x_i, y_i\}$ pour $i \geq 2$. Donc sa hauteur est $2n - 1$. Comme les seuls idéaux premiers contenant K strictement sont les idéaux maximaux, le point (ii) est démontré. □

4.1.3 Proposition. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et I, J deux idéaux algorithmiques de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ tels que $I \subset J$ et $\#J - \#I \geq 2$; alors il existe un idéal algorithmique K de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ tel que $I \subset K \subset J$.*

Preuve : Remarquons que les hypothèses entrainent $n \geq 2$ puisque, si $n = 1$, les seuls idéaux algorithmiques sont (0) et (z_1).

Posons $\gamma(I) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $\gamma(J) = (\beta_1, ..., \beta_n)$ (ce sont des éléments de $\mathcal{F}_n$). Nous allons construire explicitement un idéal K tel que $I \subset K \subset J$.

Rappelons que $I \subset J$ entraine que, $\forall i \in \mathbf{N}_n$, $\#\alpha_i \leq \#\beta_i$ (condition $(\mathcal{C})$ du lemme 4.1.1).

1-er cas : Il existe $i_0 \in \mathbf{N}_n$ tel que $\#\beta_{i_0} = \#\alpha_{i_0} + 2 = 2$. Notons qu'alors $i_0 > 1$. Dans ces conditions, $\beta_{i_0} = \{x_{i_0}, y_{i_0}\}$ et $\alpha_{i_0} = \emptyset$. Si l'on pose alors $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{i_0-1}, \{x_{i_0}\}, \beta_{i_0+1}, ..., \beta_n)$, il est clair que les règles 1 et 2 sont satisfaites par β. Ainsi, $\beta \in \mathcal{F}_n$ et d'après le corollaire 3.1.12, $L(\beta)$ est un idéal algorithmique de famille complète de générateurs β.

Il vient alors, d'après la condition $(\mathcal{C})$ de la preuve de 4.1.1, que $I \subset L(\beta) \subset J$.

2-ème cas : $\forall i \in \mathbf{N}_n$, $0 \leq \#\beta_i - \#\alpha_i \leq 1$. Alors il existe $i_1 < i_2$ tels que $\#\beta_{i_r} = \#\alpha_{i_r} + 1$ pour $r = 1, 2$.

1-er sous-cas : $\alpha_{i_r} = \{z_{i_r}\}$, $r = 1$ ou 2 ; notons qu'alors $i_r \neq 1$. Dans ces conditions, $\beta_{i_r} = \{x_{i_r}, y_{i_r}\}$, et si l'on pose $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{i_r-1}, \{x_{i_r}\}, \beta_{i_r+1}, ..., \beta_n)$, il est aisé de montrer que $\beta \in \mathcal{F}_n$. L'idéal $L(\beta)$ est algorithmique et sa famille complète de générateurs est β, donc $I \subset L(\beta) \subset J$, (condition $(\mathcal{C})$ de la preuve de 4.1.1).

2-ème sous-cas : $\alpha_{i_r} \neq \{z_{i_r}\}$, pour $r = 1$ et 2. Là encore, deux cas sont à envisager :

i) $\alpha_{i_2} = \emptyset$. Notons que $\beta_{i_2} \neq \emptyset$, et posons $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{i_2-1}, \emptyset, \alpha_{i_2+1}, ..., \alpha_n)$. Il est clair que $\beta \in \mathcal{F}_n$. $L(\beta)$ est donc algorithmique de famille complète de générateurs β et $I \subset L(\beta) \subset J$.

ii) $\alpha_{i_2} \neq \emptyset$. On a alors, $\beta_{i_2} = \{x_{i_2}, y_{i_2}\}$, ce qui impose (règle 2) $\beta_{i_2-1} \neq \emptyset$. Posons $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{i_2-1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_n)$; d'après nos hypothèses, $\alpha_{i_2} = \{x_{i_2}\}$ ou $\{y_{i_2}\}$, donc $\beta \in \mathcal{F}_n$. Alors, $L(\beta)$ est algorithmique de famille complète de générateurs β et $I \subset L(\beta) \subset J$. □

Le corollaire suivant retrouve dans le cas de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, et pour Γ_n libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, un résultat récent très général de K.R. Goodearl et T.H. Lenagan (voir [5]) démontré par des méthodes différentes.

4.1.4 Corollaire. *Soit $n \in \mathbf{N}^*$; on suppose k algébriquement clos, de caractéristique 0, et Γ_n libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$. Alors, $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est caténaire.*

Preuve : Il suffit de prouver que pour deux idéaux premiers I et J tels que $I \subsetneq J$ et $\mathrm{ht}(J/I) = 1$, on a $\mathrm{ht}J = \mathrm{ht}I + 1$.

Si I et J sont tous deux algorithmiques, c'est une conséquence immédiate de la proposition 4.1.3, où d'après le corollaire 4.1.2 (i), $\#$ peut être remplacée par ht.

Sinon, la description du spectre de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ assure que J est un idéal maximal : $J = (x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$, $\alpha \in k^*$, et $I = (x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$. Or $\mathrm{ht}(x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) = 2n$ et $\mathrm{ht}(x_2, y_2, ..., x_n, y_n) = 2n - 1$. Ceci achève la preuve. □

4.2 Automorphismes de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$

Dans cette section, on suppose que le corps k est algébriquement clos et de caractérisque 0. On considère $n \in \mathbf{N}^*$ et on lui attache une algèbre de Weyl quantique $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ telle que le groupe Γ_n soit libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$. Sous ces hypothèses, on décrit le groupe des automorphismes de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ (théorème 4.2.5). Le procédé utilisé s'appui sur le fait que, d'après la proposition 3.2.3 et le corollaire 4.1.2, l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est l'ensemble des (z_i), $i \in \mathbf{N}_n$. Rappelons que les z_i, $i \in \mathbf{N}_n$, sont normaux, (voir 2.1.2 (5)).

Enfin, on définit l'application

$$d : A_n^{\bar{q},\Lambda} \longrightarrow \mathbf{N}$$

telle que, pour $a = \sum a_{ij} y_n^j x_n^i \in A_n^{\bar{q},\Lambda}$, ($a_{ij} \in A_n^{\bar{q},\Lambda}$ $\forall (i,j) \in \mathbf{N}^2$), on ait :

$$d(a) = \max\{i + j, (i,j) \in \mathbf{N}^2 \text{ et } a_{ij} \neq 0\}.$$

Alors, $\forall (a,b) \in (A_n^{\bar{q},\Lambda})^2$, $d(ab) = d(a) + d(b)$. C'est une conséquence facile des relations suivantes : $\forall j \in \mathbf{N}$,

$$x_n y_n^j = q_n^j y_n^j x_n + (j)_{q_n} z_{n-1} y_n^{j-1},$$
$$x_n^j y_n = q_n^j y_n x_n^j + (j)_{q_n} z_{n-1} x_n^{j-1}.$$

(Rappelons que, $\forall j \in \mathbf{N}^*$, $(j)_{q_n} = q_n^{j-1} + q_n^{j-2} + ... + 1$ et $(0)_{q_n} = 0$.)

Dans la suite, on note G_n le groupe des automorphismes de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$, et $V = Vect\{z_i,\ i \in \mathbf{N}_n\}$.

4.2.1 Lemme. *$\forall \sigma \in G_n$, $\forall i \in \mathbf{N}_n$, $\exists j \in \mathbf{N}_n$ et $\lambda \in k^*$ tels que, $\sigma(z_i) = \lambda z_j$.*

Preuve : Fixons $\sigma \in G_n$ et $i \in \mathbf{N}_n$. Comme les (z_l) forment, pour $l \in \mathbf{N}_n$, l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1, $\exists j \in \mathbf{N}_n$ tel que $\sigma((z_i)) = (z_j)$. Et comme par ailleurs , $\forall l \in \mathbf{N}_n$, z_l est normal, $\exists h$ et $h' \in A_n^{\bar{q},\Lambda} \setminus \{0\}$ tels que $\sigma(z_i) = z_j h$ et $\sigma^{-1}(z_j) = z_i h'$. En combinant ces deux relations, on trouve $h' \sigma^{-1}(h) = 1$, d'où $h = \sigma(h')^{-1}$. Comme le groupe des unités de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$ est k^*, il vient $h \in k^*$. □

4.2.2 Lemme. *Soient $a, b \in A_n^{\bar{q},\Lambda} \setminus k$ tels que $ab \in$ V et $d(ab) = 2$, alors il existe μ et $\mu' \in k^*$ tels que $a = \mu x_n$ et $b = \mu' y_n$ ou, $a = \mu y_n$ et $b = \mu' x_n$.*

Preuve : Par hypothèse, $ab = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$ pour $\alpha_i \in k$. Comme $d(ab) \neq 0$, $\alpha_n \neq 0$ et de la relation $z_n = z_{n-1} + (q_n - 1) y_n x_n$, on déduit

$$(E) : ab = \alpha_n (q_n - 1) y_n x_n + c \text{ où } c \in A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}.$$

1-er Cas : $d(a)d(b) = 0$ (pour fixer les idées, $d(a) = 0$ et donc $d(b) = 2$). Alors, $a = g$ et $b = f_0+f_1x_n+f_2y_n+f_3y_nx_n+f_4x_n^2+f_5y_n^2$ où $g,\ f_i \in A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$ pour $i \in \mathbf{N}_5\cup\{0\}$. Comme $g \neq 0$, une identification à l'aide de (E) conduit à $f_1 = f_2 = f_4 = f_5 = 0$ et $gf_3 \in k^*$ donc g et $f_3 \in k^*$, ce qui est contraire aux hypothèses.

2-ème Cas : $d(a) = d(b) = 1$. Alors $a = g_0+g_1x_n+g_2y_n$ et $b = f_0+f_1x_n+f_2y_n$ où g_i, $f_i \in A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$ pour $i \in \mathbf{N}_2\cup\{0\}$. Par identification à l'aide de (E), on trouve $g_0f_1+g_1\sigma_n(f_0) = 0$, $g_0f_2 + g_2\tau_n(f_0) = 0$, $g_2\tau_n(f_1) + q_ng_1\sigma_n(f_2) \in k^*$, $g_1\sigma_n(f_1) = 0$ et $g_2\tau_n(f_2) = 0$. Supposant $g_1 \neq 0$, on obtient $a \in k^*x_n$ et $b \in k^*y_n$. Supposant $g_1 = 0$, on obtient $a \in k^*y_n$ et $b \in k^*x_n$. □

4.2.3 Proposition. *Soit $\sigma \in G_n$, il existe μ et $\mu' \in k^*$ tels que $\sigma(x_n) = \mu x_n$ et $\sigma(y_n) = \mu' y_n$.*

Preuve : D'après le lemme 4.2.1, il existe $i \in \mathbf{N}_n$ et $\lambda \in k^*$ tels que $\sigma(z_i) = \lambda z_n$ et pour $j \neq i$, $\sigma(z_j) \in \mathrm{Vect}\{z_r,\ r = 1, ..., n-1\} \subseteq A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$. De la relation $z_i - z_{i-1} = (q_i - 1)y_ix_i$ (voir 2.1.2 (4)), on déduit donc que :

$$\lambda z_n - \sigma(z_{i-1}) = (q_i - 1)\sigma(y_i)\sigma(x_i),$$

puis que :

$$\lambda(q_n - 1)y_nx_n + c = (q_i - 1)\sigma(y_i)\sigma(x_i),$$

où $c \in A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$. Donc $\sigma(y_i)\sigma(x_i) \in V$ et $d(\sigma(y_i)\sigma(x_i)) = 2$.

Supposons à présent $i < n$. Le même procédé appliqué à $z_{i+1}-z_i = (q_{i+1}-1)y_{i+1}x_{i+1}$ conduit à $\sigma(y_{i+1})\sigma(x_{i+1}) \in V$ et $d(\sigma(y_{i+1})\sigma(x_{i+1})) = 2$. Il s'ensuit, d'aprés le lemme 4.2.2, que x_n par exemple a deux antécédents par σ, ce qui est impossible. Donc $i = n$ et il existe μ et μ' dans k^* tels que $\sigma(x_n) = \mu x_n$ et $\sigma(y_n) = \mu' y_n$ ou, $\sigma(x_n) = \mu y_n$ et $\sigma(y_n) = \mu' x_n$. Mais cette dernière possibilité conduit, compte tenu de la relation $x_ny_n - q_ny_nx_n = z_{n-1}$, à $(q_n^{-1} - q_n)y_nx_n \in \mathrm{Vect}\{z_r\ ,\ r = 1, ..., n-1\} \subseteq A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$, ce qui est absurde puisque $q_n^2 \neq 1$. □

4.2.4 Corollaire. *Soit $\sigma \in G_n$, $\sigma(A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}) \subseteq A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$.*

Preuve : Soit $i \in \mathbf{N}_{n-1}$, $z_i - z_{i-1} = (q_i - 1)y_ix_i$. De plus, d'après la proposition 4.2.3, $\exists\lambda \in k^*$ tel que $\sigma(z_n) = \lambda z_n$. Il s'ensuit que $\forall i \in \mathbf{N}_{n-1}$, $\sigma(z_i) \in A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$. Par conséquent, dans la relation ci-dessus, σ envoit le membre de gauche dans $A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$, donc $d(\sigma(y_i)\sigma(x_i)) = d(\sigma(y_i)) = d(\sigma(x_i)) = 0$. □

4.2.5 Théorème. *$G_n \cong (k^*)^n$. Plus précisément : $\forall\sigma \in G_n, \exists!\bar{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n) \in (k^*)^n$ tel que : $\sigma(x_i) = \mu_ix_i$ et $\sigma(y_i) = \mu_i^{-1}y_i$, $\forall i \in \mathbf{N}_n$.*

Preuve : Nous procédons par récurrence sur n. La proposition 4.2.3, appliquée au rang $n = 1$, assure qu'il existe μ et μ' dans k^* tels que $\sigma(x_1) = \mu x_1$ et $\sigma(y_1) = \mu' y_1$. Mais $x_1y_1 - q_1y_1x_1 = 1$, d'où $\mu\mu'(x_1y_1 - q_1y_1x_1) = 1$ et finalement $\mu\mu' = 1$. Le résultat est donc vrai pour $n = 1$.

Supposons à présent le résultat vrai au rang $n-1$ et remarquons que comme Γ_n est libre de rang $\frac{1}{2}n(n+1)$, Γ_{n-1} est libre de rang $\frac{1}{2}n(n-1)$. D'après le corrolaire 4.2.4, $\sigma \in G_n$ induit un automorphisme de $A_{n-1}^{\bar{q},\Lambda}$ et par hypothèse de récurrence, $\forall i \in \mathbf{N}_{n-1}$, il existe $\mu_i \in k^*$ tel que $\sigma(x_i) = \mu_i x_i$ et $\sigma(y_i) = \mu_i^{-1} y_i$. Donc $\sigma(z_i) = z_i$, $\forall i \in \mathbf{N}_{n-1}$. Comme d'après la propriété 4.2.3, il existe μ, $\mu' \in k^*$ tels que $\sigma(x_n) = \mu x_n$ et $\sigma(y_n) = \mu' y_n$, la relation $x_n y_n - q_n y_n x_n = z_{n-1}$ conduit à $\mu\mu' = 1$. □

4.2.6 Remarque. Compte tenu du théorème 4.2.5, il est immédiat que G_n agit trivialement sur le spectre algorithmique de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. En revanche, G_n n'agit pas trivialement sur le spectre maximal de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$.

En effet, si l'on note $M(\alpha)$ l'idéal $(x_1 - \alpha, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$ pour $\alpha \in k^*$, il est clair que si $\sigma \in G_n$ s'identifie (via le théorème 4.2.5) à $(\mu_1, ..., \mu_n) \in (k^*)^n$, on a : $\sigma(M(\alpha)) = M(\alpha/\mu_1)$.

Il est clair, dans ces conditions, que G_n agit transitivement sur le spectre maximal de $A_n^{\bar{q},\Lambda}$. Il faut remarquer néanmoins, que cette action n'est pas fidèle puisque l'image de $M(\alpha)$ par σ ne dépend que de μ_1.

Références bibliographiques

[1] J. Alev et F. Dumas. *Sur le corps de fractions de certaines algèbres quantiques.* J. of Algebra **170**, 229-265 (1994).

[2] M. Akhavizadegan and D.A. Jordan. *Prime ideals of quantized Weyl algebras.* Preprint.

[3] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars éditeur (1974).

[4] K.R. Goodearl. *Prime ideals in skew polynomial rings and quantized Weyl algebras.* J. of Algebra **150**, 324-377 (1992).

[5] K.R. Goodearl and T.H. Lenagan. *Catenarity in quantum algebras.* Preprint.

[6] K.R. Goodearl and E. S. Letzter. *Prime ideals in skew and q-skew polynomial rings.* Memoirs of the A.M.S. **521** (1994).

[7] K.R. Goodearl and E. S. Letzter. *Prime factor algebras of the coordinate ring of quantum matrices.* Preprint.

[8] D.A. Jordan. *Simple skew Laurent polynomial rings.* Comm. in Alg. **12**(2) 135-137 (1984).

[9] D.A. Jordan. *A simple localization of the quantized Weyl algebra.* A paraitre dans J. of Algebra.

[10] G.R. Krause and T.H. Lenagan. *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension. Research notes in Math.* **116**, Pitman London (1985).

[11] J.C. Mc Connel and J.J. Pettit. *Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras.* J. London Math. Soc. (2) **38** (1988) 47-55.

Reçu: 20.1.95