Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 37 (1996), No. 1, 9-15.

Invariante Beleuchtung konvexer Körper

Benulf Weißbach

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik, Institut für Algebra und Geometrie
Postschließfach 41 20, D–39016 Magdeburg

Abstract. To each convex body K one can assign an isometrical invariant $L^*(K)$, which is the smallest number of directions illuminating the boundaries of all congruent copies of K. The main result of the present paper is an upper bound for $L^*(K)$ if K belongs to the set of bodies of constant width in a d-dimensional euclidean space. Besides a proof is given for the assertion by M. Lassak that each three-dimensional body of constant width can be illuminated by six directions, mutually orthogonal or opposite.
MSC 1991: 52A40

1. Begriff und Einordnung

Unter einem konvexen Körper in einem d-dimensionalen reellen affinen Raum A^d wird eine kompakte konvexe Menge mit inneren Punkten verstanden. Ist K ein konvexer Körper, ist x ein Randpunkt von K und ist schließlich p ein Strahl, so heiße x aus der durch p bestimmten Richtung beleuchtet, wenn der mit p gleichgerichtete und in x beginnende Strahl innere Punkte von K trifft. Zu jedem konvexen Körper K lassen sich endlich viele Richtungen finden, so daß jeder Randpunkt von K zumindest aus einer dieser Richtungen beleuchtet wird. Die kleinste Zahl von Richtungen, die man benötigt, um auf diese Weise den ganzen Rand von K zu beleuchten, werde mit $L(K)$ bezeichnet. Ist $\psi : A^d \to A^d$ eine reguläre Affinität, so gilt gemäß dieser Erklärung offenbar $L(\psi(K)) = L(K)$. Die Zahl $L(K)$ steht in enger Beziehung zu anderen Kennzahlen, die konvexen Körpern zugewiesen werden können. Einen guten Überblick über ältere und neueste Aussagen, die sich auf diese Zahlen beziehen, nebst einer umfassenden Liste einschlägiger Literatur, findet man in einer Abhandlung von K. Bezdek [1].

Nach Auszeichnung eines Punktes o als Ursprung kann der affine Raum A^d als ein Vektorraum angesehen werden. Ein konvexer Körper B mit dem Mittelpunkt o ermöglicht, in diesem Raum eine Metrik zu erklären. Andererseits sind durch die Randpunkte von B die Richtungen eindeutig erfaßbar. Dieser Sachverhalt legt nahe, der affinen Invariante $L(K)$ eines konvexen Körpers K eine metrische Invariante $L^*(K)$ zur Seite zu stellen, von einer bezüglich der Isometrien invarianten Beleuchtung des Körpers zu sprechen. Ist p ein im Ursprung beginnender Strahl, der $\partial B =: S^{d-1}$ im Punkt u trifft (im weiteren wird einschränkend angenommen, daß B ein Ellipsoid sei, mithin ein euklidischer Raum E^d vorliegt), so möge die Richtung von p mit $[u]$ bezeichnet werden. Sind $u_1, \ldots, u_n$ Punkte von S^{d-1}, so soll ein konvexer Körper $K \subset E^d$ bezüglich der Richtungen $[u_1], \ldots, [u_n]$ invariant beleuchtet heißen, wenn bei jeder Isometrie φ, die den Ursprung fest läßt, die Richtungen $[\varphi(u_1)], \ldots, [\varphi(u_n)]$ zur Beleuchtung des Randes von K ausreichen. Selbstverständlich kann stattdessen auch verlangt werden, daß durch die Richtungen $[u_1], \ldots, [u_n]$ der Rand jedes zu K kongruenten Körpers beleuchtet wird. Die kleinste natürliche Zahl n, zu der es noch eine invariante Beleuchtung von K aus n Richtungen gibt, heiße $L^*(K)$.

Offensichtlich gilt

$$L^*(K) \geq L(K). \tag{1}$$

Gleichheit tritt im allgemeinen nicht ein. Beispielsweise hat man $L(Q) = 4$ für ein Quadrat Q, jedoch $L^*(Q) = 5$; und für ein Reuleaux-Dreieck R ist $L(R) = 3$, aber $L^*(R) = 4$.

2. Erste Aussagen

Es stehe $\mathcal{K}^d$ für die Gesamtheit aller konvexen Körper im eukldischen Raum E^d. Während das Funktional L auf $\mathcal{K}^d$ beschränkt ist, kann man zu jeder natürlichen Zahl $n \geq d+1$ konvexe Körper mit $L^*(K) \geq n$ finden. Mithin ist die Frage nach oberen Schranken für $L^*(K)$ allenfalls dann sinnvoll, wenn an K zusätzliche Forderungen gestellt werden. Hier wäre zu erwähnen, daß $L^*(K) = L(K) = d+1$ gilt, falls der Rand von K glatt ist. Wie V. G. Boltjanski [2] zeigte, kann man mit den Richtungen $[u_o], \ldots, [u_d]$ jeden konvexen Körper mit glattem Rand im E^d beleuchten, sobald nur der Ursprung im Inneren der konvexen Hülle der Punkte $u_i \epsilon S^{d-1}$ liegt. Die Aussage $L^*(K) = L(K) = d+1$ bleibt auch noch gültig, wenn der Rand von K nur mäßig starke Singularitäten aufweist [8].

Invariante Beleuchtungen eines konvexen Körpers K lassen sich mit Überdeckungen von Sphären durch kongruente Kappen in Verbindung bringen. Die Strahlen, die von einem Randpunkt x eines konvexen Körpers K ausgehen und dessen Inneres treffen, bilden einen konvexen Kegel $P(x, K)$. Dieser Kegel, dem der Punkt x angehört, soll hier Projektionenkegel von K mit der Spitze x heißen, obwohl man darunter zumeist den Abschluß dieses Kegels versteht. Mit $D(x, \alpha)$ sei im weiteren stets ein abgeschlossener Drehkegel gemeint, dessen Erzeugenden mit der Achse einen Winkel der Größe α bilden, und dessen Spitze der Punkt x ist. Schließlich sei $C(u, \alpha)$ eine Kappe von S^{d-1} mit dem Mittelpunkt u und dem sphärischen Radius α. Zunächst findet man

Lemma 1 *Überdecken die abgeschlossenen Kappen $C(u_1, \alpha), \ldots, C(u_n, \alpha)$ die Sphäre S^{d-1} und enthält der einem Randpunkt x eines konvexen Körpers K zugewiesene Kegel $P(x, K)$*

einen abgeschlossenen Drehkegel $D(x,\alpha)$, so wird der Punkt x aus mindestens einer Richtung $[u_i]$, $i\epsilon\{1,\dots,n\}$ beleuchtet.

Der Beweis liegt auf der Hand. Der Kegel $D(x,\alpha)-x$, dessen Spitze im Ursprung liegt, schneidet S^{d-1} nach einer Kappe $C(u,\alpha)$. Der Mittelpunkt u dieser Kappe muß in wenigstens einer Kappe $C(u_i,\alpha)$ liegen. Da $C(u,\alpha)$ abgeschlossen ist, muß dann aber der Punkt u_i zu dieser Kappe gehören. Folglich liegt der vom Ursprung ausgehende und den Punkt u_i treffende Strahl in $D(x,\alpha)-x$. Der gleichgerichtete und in x beginnende Strahl beleuchtet diesen Randpunkt von K, da er in $D(x,\alpha)$ liegt.

Wird unter $\bar{N}_d(\alpha)$ die kleinste natürliche Zahl n verstanden, zu der es noch eine Überdeckung einer $(d-1)$-dimensionalen Sphäre durch n abgeschlossene Kappen vom sphärischen Radius α gibt, so gewinnt man über das Lemma unmittelbar

Satz 1 *Ist $K\subset E^d$ ein konvexer Körper, bei dem jeder Projektionenkegel $P(x,K)$ einen abgeschlossenen Drehkegel $D(x,\alpha)$ enthält, so gilt*

$$L^*(K)\leq \bar{N}_d(\alpha). \tag{2}$$

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß das Funktional L^* auf $\mathcal{K}^d$ nicht beschränkt ist. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß man zu jedem konvexen Körper K eine affine Abbildung ψ_K finden kann, so daß $L^*(\psi_K\ (K))$ eine allein von der Dimension abhängende Schranke nicht übersteigt.

Satz 2 *Es sei ε eine positive Zahl. Ist $K\subset E^d$ ein konvexer Körper, dann gibt es eine nicht von ε abhängende reguläre Affinität ψ_K, so daß*

$$L^*(\psi_K(K))\leq \bar{N}_d(\arcsin\frac{1}{(1+\varepsilon)d}) \tag{3}$$

ausfällt.

Der Sachverhalt ergibt sich aus Satz 1 und dem bekannten Satz von F. John, welcher besagt, daß es zu einem konvexen Körper $K\,\epsilon\,\mathcal{K}^d$ ein Ellipsoid E gibt, so daß $E\subseteq K\subset dE$ gilt, falls man den Mittelpunkt von E als Ursprung wählt. Ist ψ_K die Affinität, die E in die Einheitskugel überführt, so liegen die Randpunkte des Körpers $\psi_K\ (K)$ zwischen bzw. auf den konzentrischen Sphären S^{d-1} und dS^{d-1}, und eine abgeschlossene Kugel vom Radius $(1+\varepsilon)^{-1}$ um den Ursprung liegt ganz im Innern dieses Körpers. Folglich enthält der einem Randpunkt x von $\psi_K\ (K)$ zugewiesene Projektionenkegel einen abgeschlossenen Drehkegel $D(x,\gamma)$ mit $\sin\gamma\geq((1+\varepsilon)\parallel x\parallel)^{-1}\geq((1+\varepsilon)d)^{-1}$. Aus dem damit bewiesenen Satz 2 gewinnt man:

Folgerung 1 *Zu jedem konvexen Bereich $K\subset E^2$ gibt es eine reguläre Affinität ψ_K, so daß $L^*(\psi_K\ (K))\leq 7$ gilt. Die obere Schranke kann nicht herabgesetzt werden.*

Wegen $\bar{N}_2(\frac{\pi}{6})=6$ ist für hinreichend kleine Werte von ε sicher

$$\bar{N}_2(\arcsin(2+2\varepsilon)^{-1})=7.$$

Andererseits gilt für ein Dreieck T stets $L^*(T)\geq 7$. Bedeutsamer ist

Folgerung 2 *Auf $\mathcal{K}^d$ ist $L(K)$ beschränkt, und es gilt*

$$(\max\{L(K) : K \epsilon \mathcal{K}^d\})^{\frac{1}{d}} \leq d(1 + o(1)), \;\; d \to \infty \tag{4}$$

Der erste Teil dieser Aussage ergibt sich mit (1) und (3) sofort aus der Invarianz von $L(K)$ gegenüber Affinitäten. Ergebnisse von C. A. Rogers [5] gestatten den Schluß auf

$$(\bar{N}_d(\alpha))^{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\sin\alpha}(1 + o(1)), \;\; d \to \infty. \tag{5}$$

Setzt man $\varepsilon = \varepsilon_d$ mit $\lim\limits_{d\to\infty} \varepsilon_d = 0$, so gewinnt man damit aus (3) die Beziehung (4).

Die durch (3) gegebene obere Schranke für $\{L(K) : K \epsilon \mathcal{K}^d\}$ ist verständlicherweise nicht sonderlich gut. Bemerkenswert scheint hingegen, daß man auf dem eingeschlagenen Wege die Beschränktheit dieser Menge recht schnell und einfach nachweisen kann. Daß das Funktional L auf $\mathcal{K}^d$ beschränkt ist, wurde erstmals wohl durch M. Lassak [3] gezeigt. Die von ihm gefundene Abschätzung

$$L(K) \leq (d+1)d^{d-1} - (d-1)(d-2)^{d-1} \sim d^d(1 - e^{-2}), \tag{6}$$

aus der man für $d = 2, 3, 4$ die Schranken $6, 34, 296$ entnimmt, liefert für das asymptotische Verhalten von $(\max\{L(K) : K \epsilon \mathcal{K}^d\})^{\frac{1}{d}}$ auch nur die in (4) festgehaltene Aussage. Die berühmte, zumeist nach H. Hadwiger benannte, Vermutung

$$(\max\{L(K) : K \epsilon \mathcal{K}^d\})^{\frac{1}{d}} = 2 \tag{7}$$

ist bisher allein für $d = 2$ bestätigt.

3. Invariante Beleuchtung der Körper fester Breite

In der metrischen Geometrie der konvexen Körper spielen die Körper fester Breite eine besondere Rolle. Ihre Gesamtheit sei hier mit $\tilde{\mathcal{K}}^d$ bezeichnet; $\tilde{\mathcal{K}}^d(\delta) \subset \tilde{\mathcal{K}}^d$ umfasse die Körper mit vorgegebener Breite δ. Wie O. Schramm [6] zeigte, gilt für $K \epsilon \tilde{\mathcal{K}}^d$ stets

$$L(K) < 5d\sqrt{d}(4 + log\, d)(\frac{3}{2})^{\frac{d}{2}}. \tag{8}$$

Es folgt

$$(\max\{L(K) : K \epsilon \tilde{\mathcal{K}}^d\})^{\frac{1}{d}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}(1 + o(1)), \;\; d \to \infty \tag{9}$$

und demnach gilt für Körper fester Breite im E^d sicher $L(K) < 2^d$, sobald nur d groß genug ist. Gewiß ist dies, wie man nachrechnend bestätigt, für $d \geq 16$ der Fall. Für kleine Werte von d ist O. Schramms Abschätzung ziemlich schlecht; für $d = 2, 3, 4$ erhält man der Reihe nach die Schranken $99, 243, 484$, die sogar noch oberhalb der von M. Lassak angegebenen Schranken für L auf $\mathcal{K}^d$ liegen.

Bemerkenswerterweise läßt sich ohne sonderliche Anstrengung nachweisen, daß auch das Funktional L^* auf $\tilde{\mathcal{K}}^d$ beschränkt ist. Dieser Sachverhalt kommt zum Ausdruck in

Satz 3 *Es gehöre K zu $\tilde{\mathcal{K}}^d$. Für jede positive Zahl ε gilt dann*

$$L^*(K) \leq \bar{N}_d(\arcsin \frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{d+1}{2d}}). \tag{10}$$

Diese Beziehung besteht für einen zu $\tilde{\mathcal{K}}^d(\delta)$ gehörenden Körper K auch noch mit $\varepsilon = 0$, sobald K kein reguläres Simplex mit Kanten der Länge δ enthält.

Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 1 und dem folgenden Lemma.

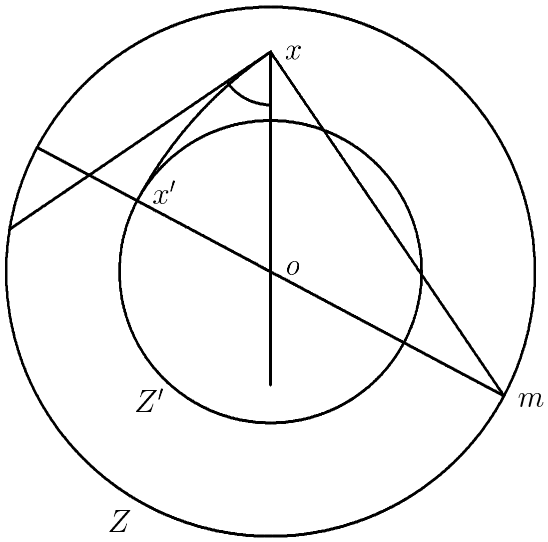
Lemma 2 *Gehört K zu $\tilde{\mathcal{K}}^d(\delta)$, so enthält der irgend einem Randpunkt x von K zugeordnete Kegel $P(x,K)$ zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > o$ stets einen abgeschlossenen Drehkegel $D(x, \arcsin \frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{d+1}{2d}})$. Für $\varepsilon = 0$ ist dies einzig dann nicht der Fall, wenn K ein reguläres Simplex mit Kanten der Länge δ enthält, und x eine Ecke dieses Simplex ist.*

Zum Beweis hat man nur einige wohlbekannte Eigenschaften der Körper fester Breite zu nutzen. Sind x_1 und x_2 Punkte eines zu $\tilde{\mathcal{K}}^d(\delta)$ gehörenden Körpers K, so enthält K auch jeden x_1 mit x_2 verbindenden Kreisbogen vom Radius δ, der nicht länger als ein Halbkreis ist. Ferner gilt für die Radien von Um- und Inkugel $\rho + \rho' = \delta$.

Der Satz von Jung liefert für den Umkugelradius noch die Abschätzungen

$$\rho \leq \sqrt{\frac{d}{2d+2}}\delta < \frac{\sqrt{2}}{2}\delta.$$

Das Gleichheitszeichen ist genau dann zu beanspruchen, wenn K ein reguläres Simplex mit Kanten der Länge δ enthält. Der Mittelpunkt der Umkugel von K werde als Ursprung gewählt. Der Schnitt von Um- und Inkugel mit einem zweidimensionalen Unterraum durch x liefert konzentrische Kreise Z bzw. Z' mit den Radien ρ und ρ'. Durch x lege man dann einen Kreis vom Radius δ, der den Kreis Z' enthält und ihn in einem Punkt x' berührt. Der Mittelpunkt m eines derartigen Kreises muß auf Z liegen (Abbildung).



Der Körper K enthält die konvexe Hülle seiner Inkugel und deren „Haube“, die durch Rotation des Bogens $\widehat{xx'}$ um die den Ursprung mit x verbindende Gerade entsteht. Ein in x

beginnender Strahl gehört danach sicher zu $P(x, K)$, sobald er mit dem Strahl durch den Ursprung einen Winkel bildet, der kleiner als jener Winkel γ ist, den die Halbtangente an den Bogen $\widehat{xx'}$ mit eben diesem Strahl einschließt. Mit $\| x \| =: \xi$ findet man

$$\sin\gamma = \frac{\xi^2 + \delta^2 - \rho^2}{2\xi\delta} =: f(\xi)$$

Im zulässigen Intervall $\rho' \leq \xi \leq \rho < \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$ ist $f(\xi)$ streng monoton fallend. Folglich gilt

$$\sin\gamma \geq \frac{\delta}{2\rho} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\delta}{2\rho} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{d+1}{2d}},$$

und damit ist alles gezeigt. Mit $\varepsilon = o$ kann man weiter auf $\sin\gamma > 2^{-\frac{1}{2}}$ schließen. Damit erhält man in gleicher Weise

Satz 4

$$\textit{Für } K \,\epsilon\, \tilde{\mathcal{K}}^d \textit{ gilt } L^*(K) \leq \bar{N}_d(\frac{\pi}{4}). \tag{11}$$

Selbstverständlich ist diese Aussage schon in Satz 3 enthalten. Es ist aber zweckmäßig, sie gesondert hervorzuheben, denn sie führt mit (5) zur

Folgerung 3 *Es gilt*

$$(\max\{L^*(K) : K\epsilon\tilde{\mathcal{K}}^d\})^{\frac{1}{d}} \leq \sqrt{2}(1 + o(1)), \;\; d \to \infty. \tag{12}$$

Körper fester Breite im E^d können demnach sogar invariant aus weniger als 2^d Richtungen beleuchtet werden, sobald nur die Dimension groß genug ist. Es braucht nicht sonderlich hervorgehoben zu werden, daß nach den beiden letzten Sätzen $L^*(K) \leq 4$ für $K \,\epsilon\, \tilde{\mathcal{K}}^2$ gilt. Satz 3 zeigt, daß allein bei den Reuleaux-Dreiecken vier Richtungen zur invarianten Beleuchtung benötigt werden.

Bekanntlich gilt $\bar{N}_3(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\,) = \bar{N}_3(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6$. Die Mittelpunkte von sechs Kappen vom sphärischen Radius $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, die die Sphäre S^2 überdecken, sind Eckpunkte eines ihr einbeschriebenen regulären Oktaeders. Für $\arctan(\sqrt{5}-1) \leq \alpha < \arctan\sqrt{2} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ gilt $\bar{N}_3(\alpha) = 7$, ([7]). Man gewinnt damit über Satz 3 die Aussage, daß für $K \,\epsilon\, \tilde{\mathcal{K}}^3$ stets $L^*(K) \leq 7$ ausfällt, und daß bereits sechs Richtungen zur invarianten Beleuchtung ausreichen, wenn K ein Körper fester Breite δ ist, der kein reguläres Tetraeder mit Kanten der Länge δ enthält. Hiervon ausgehend erhält man

Folgerung 4 *Ist K ein Körper fester Breite δ im E^3 und ist $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine orthonormierte Basis dieses Raumes, dann gibt es eine Isometrie φ_K mit $\varphi_K\ (o) = o$, so daß der Rand von K aus den sechs Richtungen*

$$[\pm\varphi_K\ (e_i)], i = 1, 2, 3$$

beleuchtet wird.

Dies wurde von M. Lassak bereits vor geraumer Zeit behauptet [3], im Schrifttum ist ein Beweis allerdings nicht zu finden. Hier bedarf es dazu nur noch weniger Worte.

Enthält K kein reguläres Tetraeder T vom Durchmesser δ, so liegen die Verhältnisse bereits klar. Auch im verbleibenden Fall werden gemäß Lemma 1 und Lemma 2 bei jeder Isometrie φ mit $\varphi(o) = o$ alle Punkte des Randes von K, die nicht Ecke von T sind, aus wenigstens einer Richtung $[\pm\varphi(e_i)]$, $i = 1, 2, 3$ beleuchtet. Es kommt nur noch darauf an, durch geeignete Wahl von $\varphi = \varphi_K$ auch die Ecken von T zu beleuchten. Dies ist sicher der Fall, wenn zwei Diagonalen des Oktaeders mit den Ecken $\pm\varphi_K\ (e_i)$ zu Gegenkanten von T parallel sind. Die inneren Punkte der Kanten von T sind innere Punkte von K, da der Rand eines Körpers fester Breite keine Strecken enthält.

Abschließend noch ein Blick auf den Fall $d = 4$. Man erhält eine Überdeckung von S^3 durch Kappen vom sphärischen Radius $\frac{\pi}{4}$, wenn man die Mittelpunkte der Kappen in die Ecken eines dieser Sphäre einbeschriebenen regulären 24-Zells legt. Satz 4 erlaubt für $K \in \tilde{\mathcal{K}}^4$ auf $L(K) \leq L^*(K) \leq 24$ zu schließen. Kenntnis von $\bar{N}_4(\arcsin\sqrt{\frac{5}{8}}\,)$ könnte u. U. zu einer besseren Abschätzung führen.

Literatur

[1] Bezdek, K.: *Hadwiger-Levi's Covering Problem Revisited.* In: New Trends in Discrete and Computational Geometry. Ed. by J. Pach. Springer-Verlag, Berlin usw. 1993; 199 - 234

[2] Boltjanski, V. G.: *Das Problem der Beleuchtung des Randes eines konvexen Körpers (in Russisch).* Istvestija Mold. Fil. Akad. Nauk SSSR **76** no 10 (1960); 77 - 84

[3] Lassak, M.: *Covering three dimensional convex bodies with smaller homothetical copies.* Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagung Konvexe Körper 1984, Tagungsbericht

[4] Lassak, M.: *Covering the boundary of a convex set by tiles.* Proc. Amer. Math. Soc. **104** no 1 (1988); 269 - 272

[5] Rogers, C. A.: *Covering a sphere with spheres.* Mathematika **10** (1963); 157 - 164

[6] Schramm, O.: *Illuminating sets of constant width.* Mathematika **35** (1988); 180 - 189

[7] Schütte, K.: *Überdeckung der Kugel mit 8 Kreisen.* Math. Annalen **129** (1955); 101 - 106

[8] Weißbach, B.: *Eine Bemerkung zur Überdeckung beschränkter Mengen durch Mengen kleineren Durchmessers.* Beiträge zur Algebra und Geometrie **11** (1981); 119 - 122

Eingegangen am 21. Mai 1995