Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 44 (2003), No. 1, 263-283.

L-Gruppoide: Algebraische und topologische Eigenschaften spezieller Gruppoide

W. Guggenberger **J. Rung**

Burghausener Str. 2a, 80634 München, Germany
e-mail: guggenbergerw@aol.com

Katharina-Geisler-Str. 23, 85356 Freising, Germany

Abstract. In this paper we study groupoids with the following property: every element is idempotent and for all elements a, b, c we have $(ab)c = ac$. We also obtain a few results if the operations are continuous or differentiable. Some open problems are formulated.

Einleitung

Von einer „Laufsituation" zu einem Gruppoid

Die folgenden mathematischen Ausführungen wurden motiviert durch die Frage einer Germanistin. Bei einer Seminarfahrt nach Wien ärgerte sich die Dame nämlich immer über einen Kollegen, wenn sie - mit ihrer kleineren Schrittlänge - mit seinem Laufschritt von deutlich größerer Weite Schritt halten musste. Sie fragte nach einer „Laufsituation" für den Kollegen, damit dieser sich in ihre „Laufsituation" einzufühlen vermag. Die nicht ganz ernst gemeinte Antwort (des zweiten Autors) war schließlich folgende

Definition und Notiz. *Eine Laufsituation ist ein Paar $(s, f) \in \mathbb{R}_+^2$ mit s als Schrittlänge (etwa in cm) und f als Schrittanzahl pro Sekunde (Schrittfrequenz). Die Laufgeschwindigkeit ist dann $v := s \cdot f$ (in cm/sec).*

Unter dem Anpassen einer Laufsituation (s_2, f_2) an die Laufsituation (s_1, f_1) wird in einem vereinfachten Modell das Anpassen von f_2 an f_1 unter Beibehaltung der Schrittlänge s_2 verstanden. Dabei ergibt sich die neue Laufsituation

$$(s_2, f_1) =: (s_2, f_2) * (s_1, f_1)$$

0138-4821/93 \$ 2.50

mit der Geschwindigkeit $s_2 \cdot f_1 = \frac{s_2}{s_1} v_1$. *Zwei Personen haben in diesem Modell das selbe „Laufgefühl", wenn ihre Schrittfrequenzen übereinstimmen.*

Zwei Merkmale (siehe Definition 1.2) dieser Verknüpfung $*$ sollen in dieser Arbeit im allgemeineren Rahmen auf algebraische und topologische Eigenschaften genauer untersucht werden.

1. L-Gruppoide

1.1. Definition und Grundlagen

Definition 1.1. *Ein Gruppoid* $(M, *)$ *ist eine Menge* M *mit einer Verknüpfung*

$$* : M \times M \to M, \quad (x, y) \mapsto x * y.$$

Definition 1.2. *Sei* $M \neq \emptyset$ *eine Menge. Ein Gruppoid* $(M, *)$ *heißt L-Gruppoid, wenn es die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:*

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \textit{für alle } x \in M \textit{ gilt: } x * x = x \\ \text{(II)} & \textit{für alle } x, y, z \in M \textit{ gilt: } (x * y) * z = x * z \end{array}$$

Bemerkung 1.3. Entsprechend kann man R-Gruppoide $(M, \bullet)$ definieren durch

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \text{für alle } x \in M \text{ gilt: } x \bullet x = x \\ (\text{II}_R) & \text{für alle } x, y, z \in M \text{ gilt: } x \bullet (y \bullet z) = x \bullet z \end{array}$$

Ein Gruppoid $(M, *)$ ist genau dann ein L-Gruppoid, wenn das Opposit-Gruppoid $(M, *^{\text{opp}})$ ein R-Gruppoid ist. Ein L-Gruppoid ist genau dann R-Gruppoid, wenn $*$ assoziativ ist.

Notiz 1.4. *In einem L-Gruppoid* $(M, *)$ *gilt für alle* $x, y \in M$

$$\text{(II')} \quad x * (x * y) = x * y.$$

Beweis. $x * (x * y) = (x * y) * (x * y) = x * y$, wobei bei der ersten Gleichheit Eigenschaft (II) verwendet wurde, bei der zweiten (I). □

Bemerkung 1.5. 1. Nach Notiz 1.4 gilt (I)$\wedge$(II)$\Rightarrow$(II'). Folgendes Beispiel zeigt, dass (I) und (II') nicht hinreichend für (II) sind: Sei $(M, *)$ das durch $M = \{1, 2, 3\}$ und die Verknüpfungstafel

$*$	1	2	3
1	1	2	2
2	1	2	3
3	3	2	3

definierte Gruppoid, dann sind (I) und (II') erfüllt, aber es ist $(3*2)*1 = 2*1 = 1 \neq 3 = 3*1$.

2. Zum Beweis von Notiz 1.4 genügt schon (I) und die abgeschwächte Forderung ($\tilde{\text{II}}$): *Für alle* $x, y \in M$ *gilt* $(x * y) * x = x * x$. Für alle $x, y \in M$ ist dann nämlich $x * (x * y) = ((x * y) * x) * (x * y) = (x * y) * (x * y) = x * y$.

Notiz 1.6. *Sei $(M,*)$ ein L-Gruppoid und $a,b \in M$, dann gilt: Ist $a*b = b*a$, dann ist $a = b$.*

Beweis. Ist $a*b = b*a$, dann folgt $a = (a*b)*a = (b*a)*a = b*a = a*b = (a*b)*b = (b*a)*b = b$. □

Definition 1.7. *Sei M eine nichtleere Menge. Auf ihr definieren wir die trivialen Verknüpfungen $*_1$ und $*_2$ (Projektion auf den ersten bzw. zweiten Faktor) durch*

$$x *_1 y = x \text{ und } x *_2 y = y \text{ für alle } x,y \in M.$$

Beispiel 1.8. Für jede nichtleere Menge M sind $(M,*_1)$ und $(M,*_2)$ L-Gruppoide. Sie heißen die trivialen (L-)Gruppoide.

Beispiel 1.9. L-Gruppoide müssen nicht assoziativ sein, denn $M = \{1,2,3\}$ ist mit der Verknüpfungstafel

$*$	1	2	3
1	1	3	3
2	2	2	2
3	1	3	3

ein L-Gruppoid, und es gilt $(1*2)*1 = 3*1 = 1 \neq 3 = 1*2 = 1*(2*1)$.

Definition 1.10. *Für ein L-Gruppoid $(M,*)$ und $a \in M$ definieren wir die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit a durch*

$$\lambda_a(x) = a*x \text{ und } \rho_a(x) = x*a \text{ für alle } x \in M.$$

Für die Bilder und die Fixpunktmengen von λ_a und ρ_a verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
a*M &:= \{a*m : m \in M\} = \lambda_a(M)\\
M*a &:= \{m*a : m \in M\} = \rho_a(M)\\
\mathrm{Fix}(\lambda_a) &:= \{x \in M : \lambda_a(x) = x\}\\
\mathrm{Fix}(\rho_a) &:= \{x \in M : \rho_a(x) = x\}
\end{aligned}$$

Notiz 1.11. *Sei $(M,*)$ ein L-Gruppoid. Für alle $a,b \in M$ gilt*

1. $\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_a$
2. $\rho_a \circ \rho_b = \rho_a$
3. $(\rho_a \circ \lambda_b)(x) = b*a$ *für alle $x \in M$.*

Beweis. Für alle $x \in M$ gilt:

(1.) $(\lambda_a \circ \lambda_a)(x) = a*(a*x) = a*x = \lambda_a(x)$ wegen (II'), siehe Notiz 1.4.
(2.) $(\rho_a \circ \rho_b)(x) = (x*b)*a = x*a = \rho_a(x)$ wegen (II).
(3.) $(\rho_a \circ \lambda_b)(x) = (b*x)*a = b*a$ wegen (II). □

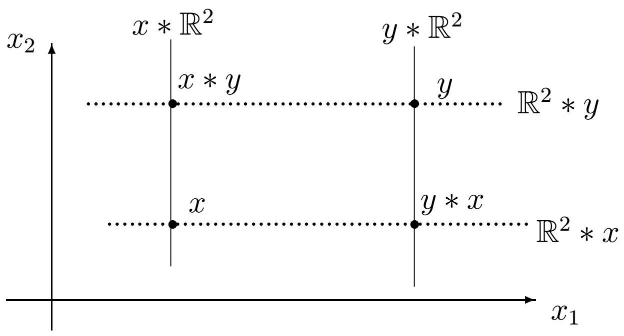

Abbildung 1: Das Eckardtsche Einschneideverfahren

Beispiel 1.12. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, \ldots, n\}$. Dann ist $(\mathbb{R}^n, *)$ mit der Verknüpfung

$$(x_1, \ldots, x_n) * (y_1, \ldots, y_n) := (x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_n)$$

ein L-Gruppoid.

- Für $n = 2$ und $r = 1$ ist diese Verknüpfung aus der Darstellenden Geometrie als *Eckartsches Einschneideverfahren* auf dem $\mathbb{R}^2$ bekannt (siehe Abb. 1).
- Für $r = 0$ bzw. $r = n$ erhält man als Spezialfall gerade die beiden trivialen Gruppoide $(\mathbb{R}^n, *_2)$ bzw. $(\mathbb{R}^n, *_1)$.
- Für alle n, r ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{R}^n, *) & \to & (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}, *_1 \times *_2) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \big((x_1, \ldots, x_r), (x_{r+1}, \ldots, x_n)\big) \end{array}$$

  ein Gruppoid-Isomorphismus, das heißt $(\mathbb{R}^n, *)$ ist isomorph zu einem direkten Produkt trivialer Guppoide. Dies motiviert die folgende allgemeinere Definition.

Definition 1.13. *Ein L-Gruppoid $(M, *)$ heißt Einschneideverfahren, wenn es isomorph ist zu einem direkten Produkt trivialer Gruppoide.*

Beispiel 1.14. Sei $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\| = 1$ fest gewählt, dann ist $(\mathbb{R}^n, *)$ mit der Verknüpfung

$$x * y := \begin{cases} \|x\| \cdot \frac{y}{\|y\|} & \text{für} \quad y \neq 0 \\ \|x\| \cdot e & \text{für} \quad y = 0 \end{cases}$$

ein L-Gruppoid, aber kein Einschneideverfahren. Man erhält jedoch ein Einschneideverfahren, wenn man die Verknüpfung auf die Menge $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einschränkt.

Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ ergeben die Mengen $x * \mathbb{R}^2$ konzentrische Kreise und $\mathbb{R}^2 * y$ radiale Strahlen.

Definition 1.15. *Ein Gruppoid $(M, *)$ heißt flexibel, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x * (y * x) = (x * y) * x$.*

Notiz 1.16. *Jedes assoziative Gruppoid ist flexibel. Ein L-Gruppoid $(M, *)$ ist genau dann flexibel, wenn $x * (y * x) = x$ für alle $x, y \in M$ ist, d.h. wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $(\lambda_x \circ \rho_x)(y) = x$.*

Bemerkung 1.17. Der Begriff *flexibel* ist aus der Theorie der Algebren entlehnt: Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *alternativ,* wenn für alle $x, y \in \mathcal{A}$ die beiden folgenden schwachen Assoziativitätsgesetze gelten: $x * (x * y) = (x * x) * y$ und $(x * y) * y = x * (y * y)$. Alternative Algebren sind dann automatisch auch *flexibel,* das heißt es gilt: $x * (y * x) = (x * y) * x$ (siehe [4], S. 28). In Gruppoiden dagegen ist dieses Flexibilitätsgesetz i.a. unabhängig von den ersten beiden Beziehungen, welche bei L-Gruppoiden ohnehin immer gelten: $x * (x * y) = x * y = (x * x) * y$ und $(x * y) * y = x * y = x * (y * y)$.

[Für einen Zusammenhang flexibler L-Gruppoide mit der Automatentheorie vergleiche den Hinweis am Schluss.]

Beispiel 1.18. Seien A, B zwei Mengen, $M := A \times B$ und B^B die Menge der Abbildungen $B \to B$. Weiter sei $\alpha : A \times A \to B^B$ eine Abbildung mit $\alpha(a, a) = \mathrm{id}_B$ für alle $a \in A$. Dann ist durch die Verknüpfung

$$* : M \times M \to M, \quad (a_1, b_1) * (a_2, b_2) := \big(a_1, \alpha(a_1, a_2)(b_2)\big)$$

ein L-Gruppoid $(M, *)$ gegeben. Dieses ist genau dann flexibel, wenn $\alpha(a_1, a_2) \circ \alpha(a_2, a_1) = \mathrm{id}_B$ für alle $a_1, a_2 \in A$ und assoziativ genau dann, wenn $\alpha(a_1, a_2) \circ \alpha(a_2, a_3) = \alpha(a_1, a_3)$ gilt für alle $a_1, a_2, a_3 \in A$.

Sei nun speziell $A = B = \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion mit $f(0) = 0$. Setzt man $\alpha(a_1, a_2)(b) := f(a_1 - a_2) + b$, so erhält man ein L-Gruppoid $(\mathbb{R}^2, *)$ mit der Verknüpfung

$$x * y = (x_1, x_2) * (y_1, y_2) := \big(x_1, f(x_1 - y_1) + y_2\big).$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ ist $x * \mathbb{R}^2$ die Parallele zur x_2-Achse durch x und $\mathbb{R}^2 * y$ der um y verschobene Graph von f. Wie man leicht nachrechnet, ist $*$ genau dann assoziativ, wenn f linear ist und genau dann flexibel, wenn $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Lemma 1.19. *Sei $(M, *)$ ein L-Gruppoid und $a \in M$. Dann gilt:*

1. $a * M = \lambda_a(M) = \mathrm{Fix}(\lambda_a) = \rho_a^{-1}(\{a\})$
2. $M * a = \rho_a(M) = \mathrm{Fix}(\rho_a)$
3. $(M, *)$ *ist genau dann flexibel, wenn für alle $y \in M$ gilt:*

$$M * y = \rho_y(M) = \mathrm{Fix}(\rho_y) \overset{!}{=} \lambda_y^{-1}(\{y\})$$

Beweis. 1. Wir zeigen $\lambda_a(M) \overset{(1)}{\subset} \mathrm{Fix}(\lambda_a) \overset{(2)}{\subset} \rho_a^{-1}(\{a\}) \overset{(3)}{\subset} \lambda_a(M)$: (1) ergibt sich aus Notiz 1.11.1. (2) Sei $a * x = x$, dann folgt $x * a = (a * x) * a = a * a = a$.
(3) Ist $x * a = a$, so ist $x = x * x = (x * a) * x = a * x \in \lambda_a(M)$.

2. $\rho_a(M) = \mathrm{Fix}(\rho_a)$: $\subset$ folgt wegen Notiz 1.11.2, $\supset$ ist klar.

3. Da $M * y = \{x \in M : x * y = x\}$ wegen (2.) für jedes L-Gruppoid gilt, ist zu zeigen: $(M, *)$ flexibel $\Leftrightarrow \{x \in M : x * y = x\} = \{x \in M : y * x = y\}$. Ist $(M, *)$ flexibel, dann folgt für alle $x, y \in M$: $(x * y = x \Rightarrow y * x = y * (x * y) = (y * x) * y = y * y = y)$. Sei umgekehrt $\rho_y(M) = \lambda_y^{-1}(\{y\})$ für alle $y \in M$, dann gilt für alle $x, y \in M$: $y * (x * y) = \lambda_y(\rho_y(x)) \in \lambda_y(\rho_y(M)) = \lambda_y(\lambda_y^{-1}(\{y\})) = \{y\}$, also $y * (x * y) = y$. □

Damit erhalten wir eine nützliche Charakterisierung der trivialen L-Gruppoide:

Lemma 1.20. *Sei $(M,*)$ ein L-Gruppoid und $a \in M$. Dann gilt:*

1. *Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad (M,*) = (M,*_2), \text{ d.h. für alle } x,y \in M \text{ gilt: } x*y=y \\ &(2) \quad a \text{ ist linksneutral, d.h. für alle } y \in M \text{ gilt: } a*y=y \\ &(3) \quad a*M=M \\ &(4) \quad M*a=\{a\} \end{aligned}$$

2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad (M,*) = (M,*_1), \text{ d.h. für alle } x,y \in M \text{ gilt: } x*y=x \\ &(2) \quad a \text{ ist rechtsneutral, d.h. für alle } x \in M \text{ gilt: } x*a=x \\ &(3) \quad M*a=M \end{aligned}$$

Ist (1), (2) *oder* (3) *erfüllt, dann gilt außerdem*

$$(4) \quad a*M=\{a\}$$

Ist $*$ flexibel, so sind die Aussagen (1) *bis* (4) *äquivalent.*

Beweis. 1. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial. (3) $\Rightarrow$ (4): Ist $a*M=M$, so gilt $m*a=a$ nach Lemma 1.19.1 für alle $m \in M$, also ist $M*a=\{a\}$. (4) $\Rightarrow$ (1): Sei $m*a=a$ für alle $m \in M$, dann folgt für alle $x,y \in M$: $x*y=(x*a)*y=a*y=(y*a)*y=y*y=y$.

2. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial. (3) $\Rightarrow$ (1): Ist $M*a=M$, so gilt $m*a=m$ nach Lemma 1.19.2 für alle $m \in M$. Für alle $x,y \in M$ folgt dann aber: $x*y=(x*y)*a=x*a=x$. (1) $\Rightarrow$ (4) ist trivial. Ist $*$ flexibel, dann gilt (4) $\Rightarrow$ (3), denn nach Lemma 1.19.3 folgt aus $a*x=a$ dann auch $x*a=x$ für jedes $x \in M$. □

Notiz 1.21. *Sei $(M,*)$ ein L-Gruppoid, dann gilt für alle $c \in M$:*

$$\{(x,y) \in M \times M : x*y=c\} = \rho_c^{-1}(\{c\}) \times \lambda_c^{-1}(\{c\}).$$

Beweis. ($\subset$:) Sei $x*y=c$, dann ist $x*c=x*(x*y)=x*y=c$, das heißt $x \in \rho_c^{-1}(\{c\})$. Ebenso gilt $c*y=(x*y)*y=x*y=c$, das heißt $y \in \lambda_c^{-1}(\{c\})$.
($\supset$:) Sei $(x,y) \in \rho_c^{-1}(\{c\}) \times \lambda_c^{-1}(\{c\})$, also $x*c=c$ und $c*y=c$, dann folgt $x*y=(x*c)*y=c*y=c$. □

Notiz 1.22. *Sei $(M,*)$ ein L-Gruppoid. Für alle $a,b \in M$ gilt*

$$(a*M) \cap (M*b) = \{a*b\}.$$

Beweis. $a*b \in (a*M) \cap (M*b)$ ist klar. Sei umgekehrt $x \in (a*M) \cap (M*b)$, dann gilt $a*x=x$ und $x*b=x$, also folgt $x=x*b=(a*x)*b=a*b$. □

Notiz 1.23. *Sei $(M,*)$ ein L-Gruppoid und $a,b \in M$. Dann ist die Abbildung*

$$\rho_b|_{(M*a)} : (M*a) \to (M*b), \quad x \mapsto x*b$$

eine Bijektion und es gilt $|M*a|=|M*b|$.

Beweis. Die Abbildung $\rho_a|_{(M*b)} : (M * b) \to (M * a), x \mapsto x * a$ ist invers zu $\rho_b|_{(M*a)}$, denn für alle $x \in M$ gilt $(\rho_a \circ \rho_b)(x * a) = x * a$ nach Notiz 1.11.2. □

Lemma 1.24. *Sei $(M, *)$ ein L-Gruppoid und $a, b \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad b \in a * M \\ &(2) \quad a \in b * M \\ &(3) \quad a * x = b * x \textit{ für alle } x \in M \\ &(4) \quad a * M = b * M \\ &(5) \quad (a * M) \cap (b * M) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Beweis.
(1) ⇒ (2) : Sei $b \in a * M$. Wegen Lemma 1.19.1 gilt dann $a = b * a \in b * M$.
(2) ⇒ (3) : Sei $a \in b * M$, dann ist $a = b * a$ nach Lemma 1.19.1. Für alle $x \in M$ folgt daher $a * x = (b * a) * x = b * x$. (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ist trivial.
(5) ⇒ (1) : Sei $x \in (a * M) \cap (b * M)$. Nach Lemma 1.19.1 gilt dann $b = x * b$ und $x = a * x$, also: $b = x * b = (a * x) * b = a * b \in a * M$. □

Korollar 1.25. *Sei $(M, *)$ ein L-Gruppoid.*

1. *Durch $x \sim y :\Longleftrightarrow x \in y * M$ ist eine Äquivalenzrelation auf M definiert. Die Äquivalenzklassen sind gerade die Mengen $[x] = x * M$.*
2. *Die Äquivalenzrelation $\sim$ ist mit $*$ verträglich. Daher ist $(M/\sim, \star)$ mit der Verknüpfung $[x] \star [y] := [x * y] = [x]$ ein L-Gruppoid.*
3. *Für jedes $a \in M$ ist die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi : M \to (M/\sim)$ auf $M * a$*
$$\pi|_{(M*a)} : M * a \to (M/\sim), \quad x \mapsto [x]$$
eine Bijektion und somit $|M/\sim| = |M * a|$.

Beweis. 1. Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Relation sowie $[x] = x * M$ folgen aus Lemma 1.24.

2. Die Verknüpfung $\star$ auf $(M/\sim)$ ist wohldefiniert, denn seien $x \sim x'$ und $y \sim y'$, dann ist $(x * y) * M = x * M = x' * M = (x' * y') * M$, also $x * y \sim x' * y'$. Weiter gilt: $[x * y] = (x * y) * M = x * M = [x]$.

3. $\pi|_{(M*a)}$ ist injektiv: Nach Lemma 1.19.2 gilt $x = x * a$ und $y = y * a$ für alle $x, y \in M * a$. Seien also $x, y \in M * a$ mit $[x] = [y]$, so folgt $x = x * a = y * a = y$ wegen Lemma 1.24 (3). $\pi|_{(M*a)}$ ist auch surjektiv, denn für alle $x \in M$ gilt $\pi(x * a) = [x * a] = [x]$. □

1.2. Charakterisierung aller L-Gruppoide

Die beiden Sätze in diesem Abschnitt liefern Konstruktionsverfahren und gleichzeitig eine Beschreibung aller L-Gruppoide.

Satz 1.26. *Seien M eine beliebige nichtleere Menge und $\sim$ irgendeine Äquivalenzrelation auf M. Bezeichnet man die Äquivalenzklassen mit $[x] := \{m \in M : m \sim x\}$ und die Menge der Äquivalenzklassen mit $M/\sim$, dann ist*

$$M = \dot{\bigcup_{[x]\in M/\sim}} [x].$$

Nun wählt man eine Abbildung $f : (M/\sim) \times M \to M$, die für alle $x, y \in M$

$$\begin{array}{ll} (i) & f([x], x) = x \\ (ii) & f([x], y) \in [x] \end{array}$$

erfüllt. Definiert man damit die Verknüpfung

$$x * y := f([x], y),$$

dann ist $(M, *)$ ein L-Gruppoid. Umgekehrt erhält man auf diese Art und Weise jedes L-Gruppoid mit zugrundeliegender Menge M, nämlich durch die Wahl von $[x] := x * M$ und $f([x], y) := x * y$.

Beweis. Sei $*$ konstruiert wie oben angegeben, dann ist $(M, *)$ ein L-Gruppoid, denn für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$\begin{array}{ll} (I) & x * x = f([x], x) = x \\ (II) & (x * y) * z = f\big(\underbrace{[f([x], y)]}_{\in[x]}, z\big) = x * z. \end{array}$$

Sei umgekehrt $(M, *)$ ein L-Gruppoid, dann ist nach Korollar 1.25.1 durch $x \sim y :\Leftrightarrow x \in y*M$ eine Äquivalenzrelation mit den Klassen $[x] = x * M$ definiert. Die Abbildung $f : (M/\sim) \times M \to M$ ist durch $f([x], y) := x * y$ wohldefiniert, denn seien $x, x' \in M$ mit $[x] = [x']$, dann gilt nach Lemma 1.24 (3) $x * y = x' * y$ für alle $y \in M$. Außerdem erfüllt f die geforderten Eigenschaften, denn für alle $x, y \in M$ gilt: $f([x], y) = x * y \in x * M = [x]$ und $f([x], x) = x * x = x$. $\square$

Satz 1.27. *Sei M eine nichtleere Menge. Wähle zu jedem $x \in M$ Teilmengen $xM \subset M$ und $Mx \subset M$, die folgende Eigenschaften erfüllen:*

(1) *Die Mengen xM bilden eine Zerlegung von M (d.h. $M = \bigcup_{x\in M} xM$ und für alle $x, x' \in M$ ist $xM \cap x'M = \emptyset$ oder $xM = x'M$.)*

(2) *Für jedes $x \in M$ ist $x \in xM \cap Mx$ und Mx ist Transversale der Zerlegung (d.h. $|xM \cap My| = 1$ für alle $x, y \in M$.)*

Definiert man für $x, y \in M$ die Verknüpfung

$$x * y := \text{ das in } xM \cap My \text{ enthaltene Element},$$

dann ist $(M, *)$ ein L-Gruppoid mit $x * M = xM$ und $M * x = Mx$. Umgekehrt erhält man jedes L-Gruppoid $(M, *)$ mit Hilfe dieser Konstruktion, indem man $xM := x * M$ und $Mx := M * x$ setzt.

Beweis. Sei $*$ konstruiert wie oben angegeben, dann gilt für alle $x, y, z \in M$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & x * x \in xM \cap Mx = \{x\} \text{ wegen (2) und auch} \\ \text{(II)} & (x * y) * z \in (x * y)M \cap Mz = xM \cap Mz = \{x * z\}, \end{array}$$

denn mit $(x * y) \in (x * y)M \cap xM$ folgt $(x * y)M = xM$ wegen (1). Somit ist $(M, *)$ ein L-Gruppoid mit $x * M = xM \cap M = xM$ und $M * x = M \cap Mx = Mx$.

Sei umgekehrt ein L-Gruppoid $(M, *)$ gegeben. Setzt man $xM := x*M$ und $Mx := M*x$ für alle $x \in M$, dann gilt (1) wegen Korollar 1.25.1, $xM \cap My = \{x*y\}$ nach Notiz 1.22 und $xM \cap Mx = \{x\}$ wegen (I). □

1.3. Flexible und assoziative L-Gruppoide

Lemma 1.28. *Sei $(M, *)$ ein flexibles L-Gruppoid und $a, b \in M$. Dann sind die beiden Abbildungen*

$$\begin{array}{rcl} \lambda_b|_{(a*M)} : a * M & \to & b * M \\ x & \mapsto & b * x \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{rcl} \phi_a : M & \to & (M * a) \times (a * M) \\ x & \mapsto & (x * a, a * x) \end{array}$$

bijektiv, also folgt $|a * M| = |b * M|$ und $|M| = |M * a| \cdot |a * M|$.

Beweis. Sei $*$ flexibel, dann ist $\lambda_a|_{(b*M)} : b * M \to a * M$, $x \mapsto a * x$ invers zu $\lambda_b|_{(a*M)}$, denn für alle $x \in M$ ist

$$(\lambda_a \circ \lambda_b)(a * x) = a * (b * (a * x)) = (a * x) * (b * (a * x)) = a * x.$$

Weiter ist die Abbildung $\psi_a : (M * a) \times (a * M) \to M$, $(x * a, a * y) \mapsto (x * a) * (a * y)$ invers zu ϕ_a, denn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} (\psi_a \circ \phi_a)(x) & = & (x * a) * (a * x) = x * (a * x) = x \\ (\phi_a \circ \psi_a)(x * a, a * y) & = & \big(((x * a) * (a * y)) * a, a * ((x * a) * (a * y))\big) \\ & = & \big((x * a) * a, (a * y) * ((x * a) * (a * y))\big) \\ & = & (x * a, a * y). \end{array}$$

□

Notiz 1.29. *Sei $(M, *)$ ein flexibles L-Gruppoid und $a \in M$ mit $|M * a| = 2$. Dann ist $(M, *)$ assoziativ.*

Beweis. Seien $x, y, z \in M$. Ist $y * z = z$, so gilt $(x * y) * z = x * z = x * (y * z)$.

Sei nun $y * z \neq z$, dann ist $(x * z) \in M * z = \{z, (y * z)\}$, denn wegen Notiz 1.23 gilt $|M * z| = |M * a| = 2$. Ist $x * z = z$, dann folgt $(x * y) * z = x * z = z = z * (y * z) = (x * z) * (y * z) = x * (y * z)$ aus der Flexibilität von $(M, *)$. Ist $x * z = y * z$, so gilt $(x * y) * z = x * z = x * (x * z) = x * (y * z)$. In jedem Fall ist daher $(M, *)$ assoziativ. □

Korollar 1.30. *Sei $(M, *)$ ein flexibles L-Gruppoid und $n := |M| \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

1. *Ist n eine Primzahl, dann ist $(M, *)$ trivial.*

2. *Für alle $n \leq 5$ ist $(M, *)$ assoziativ.*

Beweis. 1. Sei $a \in M$, dann ist $n = |M * a| \cdot |a * M|$ nach Lemma 1.28. Ist n prim, dann folgt $M * a = \{a\}$ oder $a * M = \{a\}$, also ist $(M, *)$ trivial nach Lemma 1.20.

2. Für $n \in \{1, 2, 3, 5\}$ ist $(M, *)$ wegen (1.) trivial und somit assoziativ. Sei daher $n = 4$ und $(M, *)$ nicht trivial. Wegen Lemma 1.20 und Lemma 1.28 gilt dann $|a * M| = |M * a| = 2$ für alle $a \in M$. Die Behauptung folgt nun aus Notiz 1.29. □

Beispiel 1.31. Für $n = 6$ gibt es ein flexibles aber nicht assoziatives L-Gruppoid, zum Beispiel $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit folgender Verknüpfung:

$*$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2
3	3	4	3	4	4	3
4	3	4	3	4	4	3
5	5	6	6	5	5	6
6	5	6	6	5	5	6

$(M, *)$ ist flexibel nach Lemma 1.19.3, aber nicht assoziativ, denn

$$(1 * 3) * 5 = 1 * 5 = 1 \neq 2 = 1 * 4 = 1 * (3 * 5).$$

Notiz 1.32. *Sei $(M, *)$ ein L-Gruppoid und $a \in M$, dann gilt:*

1. *$(a * M, *) := (a * M, *|_{a*M \times a*M})$ ist das triviale Gruppoid $(a * M, *_2)$.*
2. *Ist $*$ assoziativ, so ist auch $(M * a, *) := (M * a, *|_{M*a \times M*a})$ ein Gruppoid, nämlich das triviale $(M * a, *_1)$.*

Beweis. Für alle $x, y \in M$ gilt $(a * x) * (a * y) = a * (a * y) = a * y$. Ist $*$ assoziativ, so gilt auch $(x * a) * (y * a) = x * (y * a) = (x * y) * a = x * a$. □

Lemma 1.33. *Für ein L-Gruppoid $(M, *)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$(M, *)$ ist assoziativ*

(2) *für alle $a, b \in M$ gilt $(M * a) \cap (M * b) = \emptyset$ oder $M * a = M * b$*

(3) *für jedes $a \in M$ ist λ_a ein Endomorphismus von $(M, *)$*

(4) *für jedes $a \in M$ ist ρ_a ein Endomorphismus von $(M, *)$*

(5) *für jedes $a \in M$ ist die Abbildung*

$$\phi_a : (M, *) \to \big((M * a) \times (a * M), *_1 \times *_2\big), \quad x \mapsto (x * a, a * x)$$

ein Isomorphismus zwischen L-Gruppoiden.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $x \in (M * a) \cap (M * b)$, dann ist $x * a = x = x * b$ nach Lemma 1.19.2. Da $(M, *)$ assoziativ ist, folgt daher $y * a = (y * x) * a = y * (x * a) = y * (x * b) = y * b$ für jedes $y \in M$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Seien $a, b, x \in M$. Wegen $x * b \in (M * (x * b)) \cap (M * b)$ gilt nach Voraussetzung $(M * (x * b)) = (M * b)$. Mit $a * (x * b) \in (M * (x * b))$ folgt daher auch $a * (x * b) \in (M * b)$,

und nach Lemma 1.19.2 gilt dann $(a * (x * b)) * b = a * (x * b)$. Somit ist $*$ assoziativ, denn für alle $a, b, x \in M$ gilt $(a * x) * b = a * b = (a * (x * b)) * b = a * (x * b)$.
(1) $\Leftrightarrow$ (3): λ_a ist genau dann linear für jedes $a \in M$, wenn für alle $a, x, y \in M$ gilt: $(a*x)*y = a * y = a * (a * y) = (a * x) * (a * y) = \lambda_a(x) * \lambda_a(y) = \lambda_a(x * y) = a * (x * y)$.
(1) $\Leftrightarrow$ (4): ρ_a ist genau dann linear für jedes $a \in M$, wenn für alle $a, x, y \in M$ gilt: $(x*y)*a = \rho_a(x * y) = \rho_a(x) * \rho_a(y) = (x * a) * (y * a) = x * (y * a)$.
(1) $\Leftrightarrow$ (5): Wegen (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) und Notiz 1.32 gilt
$\phi_a(x*y) = \big(\rho_a(x*y), \lambda_a(x*y)\big) = \big(\rho_a(x)*\rho_a(y), \lambda_a(x)*\lambda_a(y)\big) = \big(\rho_a(x), \lambda_a(y)\big)$ genau dann, wenn $*$ assoziativ ist. Ist $*$ assoziativ, dann ist ϕ_a bijektiv nach Lemma 1.28. □

Satz 1.34. *Ein L-Gruppoid ist genau dann ein Einschneideverfahren, wenn es assoziativ ist.*

Beweis. Sei $(M, *)$ ein assoziatives L-Gruppoid, dann ist es nach Lemma 1.33 (5) isomorph zu einem direkten Produkt trivialer Gruppoide. Umgekehrt ist jedes direkte Produkt trivialer Gruppoide offensichtlich assoziativ. □

Beispiel 1.35. Sei $(G, +)$ eine (nicht notw. abelsche) Gruppe und $g, h : G \to G$ Gruppenhomomorphismen. Durch die Verknüpfung

$$* : G \times G \to G, \quad x * y := g(x) + h(y)$$

ist ein Gruppoid $(G, *)$ erklärt. Ein auf diese Weise definiertes Gruppoid $(G, *)$ ist genau dann ein L-Gruppoid, wenn die Eigenschaften

$$(1) \qquad g + h = \mathrm{id} \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad (2) \qquad g \circ g = g$$

erfüllt sind. Insbesondere ist die Verknüpfung $*$ in diesem Fall durch g bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } x \in G \text{ gilt } g(x) + h(x) = x \Leftrightarrow (1) \\ \text{(II)} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für alle } x, y, z \in G \text{ gilt } (g \circ g)(x) + (g \circ h)(y) + h(z) = g(x) + h(z) \\ &\Leftrightarrow \quad (2) \text{ und } g \circ h = 0. \end{aligned}$$

Sind (1) und (2) erfüllt, so gilt aber auch $g \circ h = g(\mathrm{id} - g) = g - g \circ g = 0$. □

Hieraus folgt weiter: Sei $(G, *)$ ein Gruppoid wie oben, dann gilt
1. Ist $(G, *)$ ein L-Gruppoid, so gilt $g \circ h = h \circ g = 0$ und $h \circ h = h$.
2. Jedes L-Gruppoid $(G, *)$ ist assoziativ.
3. Gibt es ein $z_0 \in G$ mit $(x * y) * z_0 = x * z_0$ für alle $x, y \in G$, dann gilt $(x * y) * z = x * z$ für alle $x, y, z \in G$.

Beweis. 1. Da g und h die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, gilt nach obiger Rechnung $g \circ h = 0$ und analog $h \circ g = 0$. Weiter folgt $h \circ h = (\mathrm{id} - g) \circ (\mathrm{id} - g) = (\mathrm{id} - g) + (g \circ g - g) = h$.
2. Ist $(G, *)$ ein L-Gruppoid, so gilt wegen 1. für alle $x, y, z \in G$:
$x * (y * z) = g(x) + (h \circ g)(y) + (h \circ h)(z) = g(x) + h(z) = x * z = (x * y) * z$
3. Sei $z_0 \in G$ mit $(x * y) * z_0 = x * z_0$, also $(g \circ g)(x) + (g \circ h)(y) = g(x)$ für alle $x, y \in G$. Dann gilt $(x * y) * z = (g \circ g)(x) + (g \circ h)(y) + h(z) = g(x) + h(z) = x * z$ für alle $x, y, z \in G$. □

Wegen 2. folgt nach Satz 1.34:

Korollar 1.36. *Sei* $(G, *)$ *ein L-Gruppoid wie in Beispiel* 1.35*, dann ist es ein Einschneideverfahren.*

1.4. Ideale und die stabile Komponente

Definition 1.37. *Sei* $(M, *)$ *ein L-Gruppoid. Eine nichtleere Teilmenge* $I \subset M$ *heißt (Rechts-)Ideal, wenn* $I * M := \{i * m : i \in I, m \in M\} \subset I$ *gilt. Da wir hier nur Rechtsideale betrachten, bezeichnen wir sie kurz als Ideale.*

Ein Ideal I heißt Hauptideal, wenn es von einem einzigen Element erzeugt wird, das heißt wenn es ein $a \in M$ *gibt mit* $I = a * M$.

Notiz 1.38. *Sei* $(M, *)$ *ein L-Gruppoid und* $a \in M$*. Dann gilt:*

1. $a * M$ *ist das von a erzeugte Hauptideal.*
2. *Ist* $I \subset a * M$ *ein Ideal, so ist* $I = a * M$.

Beweis. 1. $a * M$ ist ein Ideal, denn $(a * M) * M = \{(a * m) * n : m, n \in M\} = \{a * n : n \in M\} = a * M$.
2. Sei $i \in I \subset a * M$. Nach Lemma 1.24 folgt dann $a * M = i * M \subset I * M \subset I$. □

Notiz 1.39. *Sei* $(M, *)$ *ein L-Gruppoid,* $I \subset M$ *ein Ideal. Dann gilt:*

1. *Sind* $a, b \in M$ *mit* $a * b \in I$*, dann ist schon* $a \in I$.
2. *Ist* $I \neq M$*, dann ist auch* $M \setminus I$ *ein Ideal.*

Beweis. 1. Seien $a, b \in M$ mit $a * b \in I$, dann ist $a = a * a = \underbrace{(a * b)}_{\in I} * a \in I$.
2. Sei $x \notin I$, dann ist wegen (1.) für alle $m \in M$ auch $x * m \notin I$. □

Definition 1.40. *Sei* $(M, *)$ *ein L-Gruppoid, dann heißt* $S_M := \bigcap_{y \in M} M * y$ *die stabile Komponente von* $(M, *)$.

Bemerkung 1.41. Sei $(M, *)$ ein L-Gruppoid, dann gilt wegen Lemma 1.19.2:

$$S_M = \bigcap_{y \in M} M * y = \bigcap_{y \in M} \mathrm{Fix}(\rho_y) = \{x \in M : x * M = \{x\}\}.$$

Ist $S_M \neq \emptyset$, so ist S_M daher ein Ideal. Nach Notiz 1.39.2 ist dann im Fall $S_M \neq M$ auch $M \setminus S_M$ ein Ideal und $(M \setminus S_M, *) := (M \setminus S_M, *|_{M \setminus S_M \times M \setminus S_M})$ somit ein L-Gruppoid.

Notiz 1.42. *Sei* $(M, *)$ *ein L-Gruppoid mit* $S_M \neq M$*. Dann hat* $(M \setminus S_M, *)$ *keine stabile Komponente* $\neq \emptyset$*, das heißt, es gilt*

$$S_{(M \setminus S_M)} = \emptyset.$$

Beweis. Nach Bemerkung 1.41 ist $S_{(M \setminus S_M)} = \{x \in M \setminus S_M : x * (M \setminus S_M) = \{x\}\}$. Angenommen, es gibt ein $a \in S_{(M \setminus S_M)} \subset (M \setminus S_M)$. Da $(M \setminus S_M)$ nach Bemerkung 1.41 ein Ideal ist, ist $(a * x) \in (M \setminus S_M)$ für jedes $x \in M$. Wegen $a \in S_{(M \setminus S_M)}$ folgt dann aber $a = a * (a * x) = a * x$ für alle $x \in M$. Also ist $a \in S_M$, im Widerspruch zur Annahme. □

Notiz 1.43. *Sei $(M,*)$ ein flexibles L-Gruppoid mit nichtleerer stabiler Komponente S_M. Dann ist $S_M = M$, das heißt $(M,*)$ ist das triviale Gruppoid $(M,*_1)$.*

Beweis. Sei $s \in S_M$, dann gilt $s * M = \{s\}$ wegen Bemerkung 1.41. Da $(M,*)$ flexibel ist, folgt die Behauptung aus Lemma 1.20.2. □

2. Topologische und differenzierbare L-Gruppoide

2.1. Topologische L-Gruppoide

Definition 2.1. *Sei $(M,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(M,*)$ ein L-Gruppoid. $(M,*)$ heißt topologisches L-Gruppoid, wenn die Verknüpfung*

$$* : M \times M \to M, \quad (x,y) \mapsto x * y$$

stetig ist. Dabei ist $M \times M$ mit der Produkttopologie versehen.

Ist M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $*$ differenzierbar, dann heißt $(M,*)$ differenzierbar.

Beispiel 2.2. Seien A, B topologische Räume bzw. differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M = A \times B$. Das L-Gruppoid $(M,*)$ mit $(a_1,b_1) * (a_2,b_2) := \big(a_1, \alpha(a_1,a_2)(b_2)\big)$ aus Beispiel 1.18 ist genau dann topologisch bzw. differenzierbar, wenn die Abbildung $A \times A \times B \to B$ mit $(a_1,a_2,b) \mapsto \alpha(a_1,a_2)(b)$ stetig bzw. differenzierbar ist.

Notiz 2.3. *Sei $(M,*)$ ein topologisches bzw. differenzierbares L-Gruppoid und $a, b \in M$. Dann gilt:*

1. *Die Abbildungen λ_a und ρ_a sind stetig bzw. differenzierbar.*
2. *$M * a$ ist zu $M * b$ homöomorph bzw. diffeomorph.*
3. *Ist $(M,*)$ flexibel, dann ist $a * M$ zu $b * M$ homöomorph bzw. diffeomorph.*
4. *Ist $(M,*)$ flexibel, dann ist M zu $(M * a) \times (a * M)$ homöomorph bzw. diffeomorph.*

Beweis. (1.) ist klar. Aussage (2.) folgt aus Notiz 1.23, (3.) und (4.) aus Lemma 1.28, da die dort angegebenen Bijektionen und ihre Umkehrabbildungen wegen (1.) jeweils stetig bzw. differenzierbar sind. □

Lemma 2.4. *Sei $(M,*)$ ein wegzusammenhängendes topologisches L-Gruppoid und $a, b \in M$. Dann sind $a * M$ und $b * M$ homotopieäquivalent.*

Beweis. Sei $\gamma : [0,1] \to M$ ein stetiger Weg von $\gamma(0) = a$ nach $\gamma(1) = b$. Dann sind die Abbildungen

$$\lambda_a|_{(b*M)} : b * M \to a * M, \qquad b * x \mapsto a * (b * x)$$
$$\lambda_b|_{(a*M)} : a * M \to b * M, \qquad a * x \mapsto b * (a * x)$$

Homotopie-Inverse, denn die Abbildungen

$$H : [0,1] \times (b * M) \to b * M, \qquad (t,x) \mapsto H_t(x) := \lambda_b \circ \lambda_{\gamma(t)}|_{(b*M)}$$
$$\tilde{H} : [0,1] \times (a * M) \to a * M, \qquad (t,x) \mapsto \tilde{H}_t(x) := \lambda_a \circ \lambda_{\gamma(1-t)}|_{(a*M)}$$

sind Homotopien mit

$$\begin{aligned} H_0 &= \lambda_b \circ \lambda_a|_{(b*M)} \quad \text{und} \quad H_1 = \lambda_b \circ \lambda_b|_{(b*M)} = \lambda_b|_{(b*M)} = \mathrm{id}_{(b*M)} \\ \tilde{H}_0 &= \lambda_a \circ \lambda_b|_{(a*M)} \quad \text{und} \quad \tilde{H}_1 = \lambda_a \circ \lambda_a|_{(a*M)} = \lambda_a|_{(a*M)} = \mathrm{id}_{(a*M)}. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.5. *Sei $(M,*)$ ein wegzusammenhängendes topologisches L-Gruppoid und $a, b \in M$. Dann gilt für die Fundamentalgruppen*

$$\pi_1(a * M) \cong \pi_1(b * M).$$

Definition 2.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge und $f : X \to A$ eine stetige Abbildung mit $f|_A = \mathrm{id}_A$. Dann nennt man f eine Retraktion und A einen Retrakt von X.*

Lemma 2.7. *Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(M,*)$ ein L-Gruppoid. Für jedes $a \in M$ gilt: Ist λ_a stetig, dann ist $a * M$ Retrakt von M. Ist ρ_a stetig, dann ist $M * a$ Retrakt von M.*

Beweis. Die Abbildungen $\lambda_a : M \to a * M$ und $\rho_a : M \to M * a$ sind im Falle ihrer Stetigkeit Retraktionen, denn wegen Notiz 1.11 gilt $\lambda_a \circ \lambda_a = \lambda_a$ und $\rho_a \circ \rho_a = \rho_a$. □

Korollar 2.8. *Sei $n \geq 2$ und M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Ist $(M,*)$ ein topologisches L-Gruppoid und $a \in M$, dann gilt:*

Für alle $m \in \{2, \ldots, n\}$ sind die Mengen $a * M$ und $M * a$ nicht Rand eines m-dimensionalen Balles $B^m \subset M$.

Beweis. Angenommen, es wäre $a * M = \partial B^m$ oder $M * a = \partial B^m$, dann wären λ_a bzw. ρ_a wegen Lemma 2.7 Retraktionen $M \to \partial B^m = S^{m-1}$. Somit wären dann auch $\lambda_a|_{B^m}$ bzw. $\rho_a|_{B^m}$ Retraktionen $B^m \to \partial B^m = S^{m-1}$. Aber S^{m-1} ist nicht Retrakt von B^m (siehe [5], Satz 11.1.1). □

Beispiel 2.9. Das L-Gruppoid $(\mathbb{R}^2, *)$ aus Beispiel 1.14 kann nach Korollar 2.8 nicht topologisch sein, denn für $x \neq (0,0)$ ist $x * \mathbb{R}^2$ ein Kreis. (Die Unstetigkeit sieht man natürlich auch an der Definition der Verknüpfung).

Definition 2.10. *Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt Halbhausdorff-Raum, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt: Es gibt eine Umgebung U von x mit $y \notin U$.*

Gibt es zu allen $x, y \in M$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$, dann heißt $(M, \mathcal{T})$ bekanntlich Hausdorff-Raum.

Notiz 2.11. *Bekanntlich gilt:*

1. *In einem Halbhausdorff-Raum sind einpunktige Mengen abgeschlossen.*
2. *Ist $(M, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $f : M \to M$ stetig, dann ist die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(f) := \{x \in M : f(x) = x\}$ abgeschlossen.*

Lemma 2.12. *Sei $(M,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(M,*)$ ein L-Gruppoid. Dann gilt für alle $a \in M$:*

1. *Ist ρ_a stetig und $(M,\mathcal{T})$ halbhausdorffsch, dann ist $a*M$ abgeschlossen.*
   Ist ρ_a stetig und $(M,\mathcal{T})$ hausdorffsch, dann ist $M*a$ abgeschlossen.
2. *Ist M zusammenhängend und λ_a stetig, dann ist $a*M$ zusammenhängend.*
   Ist M zusammenhängend und ρ_a stetig, dann ist $M*a$ zusammenhängend.
3. *Ist M kompakt und λ_a stetig, dann ist $a*M$ kompakt.*
   Ist M kompakt und ρ_a stetig, dann ist $M*a$ kompakt.

Beweis. 1. Nach Lemma 1.19 ist $a*M=\rho_a^{-1}(\{a\})$ und $M*a=\mathrm{Fix}(\rho_a)$. Sei ρ_a stetig und $(M,\mathcal{T})$ halbhausdorffsch, dann ist $a*M$ wegen Notiz 2.11.1 als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter ρ_a abgeschlossen. Ist $(M,\mathcal{T})$ hausdorffsch, dann ist auch $M*a$ wegen Notiz 2.11.2 abgeschlossen.

2. Sind λ_a bzw. ρ_a stetig und M zusammenhängend, dann sind auch die stetigen Bilder $a*M=\lambda_a(M)$ bzw. $M*a=\rho_a(M)$ zusammenhängend.

3. Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt. □

Lemma 2.13. *Sei $(M,\mathcal{T})$ ein zusammenhängender Halbhausdorff-Raum. Sei weiter $(M,*)$ ein topologisches L-Gruppoid und $a,b\in M$. Dann gilt:*

1. *Ist $a*b$ innerer Punkt von $a*M$, so ist $M*b=\{b\}$*
2. *Ist $a*b$ innerer Punkt von $M*b$, so ist $a*M=\{a\}$.*

Beweis. 1. Sei $V\subset a*M$ eine offene Umgebung von $a*b$. Da nach Notiz 1.22 $(a*M)\cap(M*b)=\{a*b\}$ gilt, ist $(M*b)\cap V=\{a*b\}$ und somit wegen Notiz 2.11.1 abgeschlossen in $M*b$. Andererseits ist $(M*b)\cap V$ aber auch offen in $M*b$. Da $M*b$ nach Lemma 2.12.2 zusammenhängend ist, folgt $(M*b)=(M*b)\cap V=\{a*b\}$. Wegen $b\in M*b$ gilt $M*b=\{b\}$.

2. Sei $U\subset M*b$ eine offene Umgebung von $a*b$. Mit Notiz 1.22 folgt $(a*M)\cap U=\{a*b\}$. Also ist $(a*M)\cap U$ abgeschlossen in $a*M$, andererseits aber auch offen in $a*M$. Da $a*M$ nach Lemma 2.12.2 zusammenhängend ist, folgt $(a*M)=(a*M)\cap U=\{a*b\}$. Wegen $a\in a*M$ ist also $a*M=\{a\}$. □

Korollar 2.14. *Sei $(M,\mathcal{T})$ ein zusammenhängender Halbhausdorff-Raum, $(M,*)$ ein topologisches L-Gruppoid und $a\in M$. Dann gilt:*
Enthält $a*M$ einen inneren Punkt, so ist $(M,*)$ das triviale Gruppoid $(M,*_2)$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma 2.13.1 und Lemma 1.20.1. □

Definition 2.15. *Ein topologischer Raum $(M,\mathcal{T})$ heißt L-trivial, wenn jedes topologische L-Gruppoid $(M,*)$ schon eines der trivialen Gruppoide $(M,*_1)$ oder $(M,*_2)$ ist.*

Satz 2.16. *Eindimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten sind L-trivial.*

Beweis. Sei M eine eindimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, dann ist M bekanntlich entweder zur eindimensionalen Sphäre S^1 oder zu $\mathbb{R}$ homöomorph (siehe z. B. [2], Th. 5.4.1). Sei nun $(M,*)$ ein von $(M,*_1)$ verschiedenes topologisches L-Gruppoid, dann gibt es $a, x \in M$ mit $a * x \neq a$. Setzen wir $b := a * x$, so gilt: $a, b \in a * M$ und $a \neq b$. Da $a * M$ nach Lemma 2.12.2 zusammenhängend ist, enthält $a * M$ daher einen inneren Punkt. Wegen Korollar 2.14 folgt $(M, *) = (M, *_2)$. □

Bemerkung 2.17. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein unendlicher topologischer Raum, in dem die abgeschlossenen Mengen genau die endlichen Mengen oder M sind. Dann ist M L-trivial.

Beweis. Offensichtlich ist $(M, \mathcal{T})$ ein Halbhausdorff-Raum. Sei $(M, *)$ ein topologisches L-Gruppoid und $a \in M$. Nach Lemma 2.12.1 ist $a*M$ abgeschlossen, also ist nach Voraussetzung entweder $a * M = M$ oder $a * M \neq \emptyset$ endlich. Im ersten Fall ist $(M, *) = (M, *_2)$ trivial nach Lemma 1.20.1.

Sei also nun $a * M$ endlich. Da M unendlich ist, gibt es ein $b \in M$, so dass die Lösungsmenge der Gleichung $a * x = b$, also die abgeschlossene Menge $\lambda_a^{-1}(\{b\})$ unendlich ist. Dann ist $\lambda_a^{-1}(\{b\}) = M$, also $a * M = \{b\}$ und wegen $a \in a * M$ folgt $a * M = \{a\}$. Da aber $a \in M$ beliebig gewählt war, folgt $x * M = \{x\}$ für alle $x \in M$, das heißt $(M, *) = (M, *_1)$. □

Beispiel 2.18. Sei R ein Dedekindring mit unendlichem Spektrum Spec$R$, etwa $R = \mathbb{Z}$. Dann ist Spec$R$ ein topologischer Raum wie in Bemerkung 2.17. Ein weiteres Beispiel sind glatte algebraische Kurven, versehen mit der Zariski-Topologie.

Lemma 2.19. *Sei $(M, \mathcal{T})$ ein zusammenhängender Hausdorff-Raum und $(M, *)$ ein L-Gruppoid mit stabiler Komponente $S_M \neq \emptyset$. Dann gilt:*

1. *$S_M = M \iff (M, *) = (M, *_1) \iff M$ ist flexibel.*
2. *Ist $S_M \neq M$ und $(M, *)$ topologisch, dann ist $(M \setminus S_M, *)$ nicht flexibel.*

Beweis. 1. Ist $S_M = M$, so gilt $x * M = \{x\}$ für alle $x \in M$, also ist $(M, *) = (M, *_1)$ und somit auch flexibel. Ist umgekehrt $(M, *)$ flexibel, so folgt $S_M = M$ wegen $S_M \neq \emptyset$ nach Notiz 1.43.

2. Angenommen, $(M \setminus S_M, *)$ ist flexibel, dann gilt $(\lambda_x \circ \rho_x)(y) = x$ für alle $x, y \in M \setminus S_M$ nach Notiz 1.16, das heißt

$$(\lambda_x \circ \rho_x)(M \setminus S_M) = \{x\} \text{ für alle } x \in M \setminus S_M.$$

Wegen Lemma 2.12.1 ist $S_M = \cap_{y \in M} M * y$ abgeschlossen. Da M zusammenhängend und $\emptyset \neq S_M \neq M$ ist, ist S_M nicht offen. Wir können daher einen Punkt $s \in S_M$ wählen, der Randpunkt von S_M ist. Sei nun $x \in M \setminus S_M$. Wegen der Stetigkeit von $*$ ist die Abbildung $\lambda_x \circ \rho_x$ stetig. Für jede Umgebung U von $(\lambda_x \circ \rho_x)(s)$ ist daher $(\lambda_x \circ \rho_x)^{-1}(U)$ eine Umgebung von s. Da s ein Randpunkt von S_M ist, ist

$$(\lambda_x \circ \rho_x)^{-1}(U) \cap (M \setminus S_M) \neq \emptyset.$$

Wegen $(\lambda_x \circ \rho_x)(M \setminus S_M) = \{x\}$ ist x daher in jeder Umgebung U von $(\lambda_x \circ \rho_x)(s)$ enthalten. Da M ein Halbhausdorff-Raum ist, folgt $x = (\lambda_x \circ \rho_x)(s)$. Wegen $s \in S_M$ gilt daher

$$x = (\lambda_x \circ \rho_x)(s) = x * (s * x) = x * s \text{ für alle } x \in M \setminus S_M.$$

Sei nun $a \in M \setminus S_M$. Da $M \setminus S_M$ nach Bemerkung 1.41 ein Ideal ist, folgt $a * M \subset M \setminus S_M$. Nach Lemma 1.24 (3) gilt daher $x = x * s = y * s = y$ für alle $x, y \in a * M$. Dann ist aber $a * M = \{a\}$ und somit $a \in S_M$ im Widerspruch zur Wahl von a. □

Beispiel 2.20. Das Gruppoid $(\mathbb{R}^2, *)$ aus Beispiel 1.14 besitzt die stabile Komponente $S_{\mathbb{R}^2} = \{(0,0)\}$. Nach obigem Lemma ist $(\mathbb{R}^2, *)$ nicht topologisch, denn $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, *)$ ist assoziativ nach Lemma 1.33.2.

Frage 2.21. Sei $(\mathbb{R}^2, *) \neq (\mathbb{R}^2, *_1)$ ein topologisches L-Gruppoid. Folgt dann für die stabile Komponente $S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$? [Für zusammenhängende *differenzierbare* L-Gruppoide $(M, *)$ wird dies in Korollar 2.25 gezeigt!]

Bemerkung 2.22. Verlangt man von einem topologischen Gruppoid $(M, *)$ nur (II), so kann es durchaus eine nichtleere stabile Komponente $S_M \neq M$ geben. So erfüllt zum Beispiel das Gruppoid $(\mathbb{R}^2, *)$ mit $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := \big(x_1, f(x_1, y_1, y_2)\big)$ für jede Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Bedingung (II). Wählt man speziell $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := \big(x_1, x_1 y_2\big)$ so erhält man $S_{\mathbb{R}^2} = \{(0,0)\}$.

Das Weglassen von (I) entspricht in der Charakterisierung aus Satz 1.27 gerade dem Verzicht auf die Bedingung *Für alle* $x \in M$ *ist* $xM \cap Mx = \{x\}$.

2.2. Differenzierbare L-Gruppoide

Satz 2.23. *Sei M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit, $(M, *)$ ein differenzierbares L-Gruppoid und $a \in M$. Dann sind $a * M$ und $M * a$ abgeschlossene differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von M.*

Beweis. Da $(M, *)$ differenzierbar ist, sind die Abbildungen $\lambda_a : M \to a * M$ und $\rho_a : M \to M * a$ nach Lemma 2.7 differenzierbare Retraktionen. Die Behauptung folgt, denn nach Satz (5.13) aus [1] ist das Bild einer differenzierbaren Retraktion eine abgeschlossene differenzierbare Untermannigfaltigkeit. □

Lemma 2.24. *Sei M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit, $(M, *)$ ein differenzierbares L-Gruppoid und $a, b \in M$. Dann gilt:*

$$\dim(a * M) = \dim(b * M).$$

Beweis. Sei $a \in M$. Für $x \in M$ betrachten wir die Ableitung $(D\lambda_x)_{x*a} : \ T_{x*a}M \to T_{x*a}M$ von λ_x im Punkt $\lambda_x(a)$ und definieren die Abbildung

$$\Lambda : M \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \operatorname{tr}(D\lambda_x)_{x*a}.$$

Für alle $x \in M$ gilt $\lambda_x \circ \lambda_x = \lambda_x$ wegen Notiz 1.11.1. Nach der Kettenregel ist daher $(D\lambda_x)_{x*a} = (D\lambda_x)_{x*(x*a)} \circ (D\lambda_x)_{x*a} = (D\lambda_x)^2_{x*a}$. Aus der Linearen Algebra folgt nun

$$T_{x*a}M = \operatorname{kern}(D\lambda_x)_{x*a} \oplus T_{x*a}(x * M) \text{ und } (D\lambda_x)_{x*a}|_{T_{x*a}(x*M)} = \operatorname{id}|_{T_{x*a}(x*M)}.$$

Daher gilt $\Lambda(x) = \operatorname{rang}(D\lambda_x)_{x*a} = \dim(x * M) \in \mathbb{Z}$. Da Λ stetig und M zusammenhängend ist, muss Λ konstant sein. Somit erhalten wir $\Lambda(x) = \Lambda(a)$ für alle $x \in M$. □

Korollar 2.25. *Besitzt ein zusammenhängendes differenzierbares L-Gruppoid $(M, *)$ eine stabile Komponente $S_M \neq \emptyset$, dann ist $S_M = M$.*

Beweis. Sei $a \in S_M$, dann ist $a * M = \{a\}$. Für alle $x \in M$ folgt dann $x \in S_M$, denn nach Lemma 2.24 ist $\dim(x * M) = \dim(a * M) = 0$ und somit $x * M = \{x\}$. □

Korollar 2.26. *Sei $(M, *)$ ein zusammenhängendes differenzierbares L-Gruppoid und $b \in M$, dann gilt: Enthält $M * b$ einen inneren Punkt, so ist $(M, *)$ das triviale Gruppoid $(M, *_1)$.*

Beweis. Sei $a * b$ ein innerer Punkt von $M * b$, dann gilt $a * M = \{a\}$ nach Lemma 2.13.2, das heißt $a \in S_M$. Mit Korollar 2.25 folgt dann aber schon $S_M = M$, also $(M, *) = (M, *_1)$. (Man erhält dies auch direkt aus Satz 2.23.) □

Der folgende Satz fasst die Ergebnisse von Lemma 2.4 und Lemma 2.24 zusammen:

Satz 2.27. *Sei $(M, *)$ ein zusammenhängendes differenzierbares L-Gruppoid. Dann sind die Untermannigfaltigkeiten $a * M$ für $a \in M$ homotopieäquivalent und von gleicher Dimension.*

Frage 2.28. Sind die $a * M$ sogar diffeomorph?

Beispiel 2.29. Auf dem n-dimensionalen Torus T^n gibt es für jedes $n \geq 2$ nichttriviale differenzierbare L-Gruppoide: Wir identifizieren Punkte des $\mathbb{R}^n$ gemäß der Äquivalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$ und schreiben

$$T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n := \{[x] : x \in \mathbb{R}^n\},$$

wobei $[x] = x + \mathbb{Z}^n$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim$ ist. Sei nun $(\mathbb{R}^n, *)$ ein differenzierbares L-Gruppoid, dessen Verknüpfung mit $\sim$ verträglich ist (d.h für alle $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ mit $x \sim x'$ und $y \sim y'$ folgt $x * y \sim x' * y'$). Dann ist $(T^n, \star)$ mit der Verknüpfung $[x] \star [y] := [x * y]$ ein differenzierbares L-Gruppoid.

- Da das Einschneideverfahren aus Beispiel 1.12 verträglich mit $\sim$ ist, erhalten wir für $n \geq 2$ und $0 < r < n$ durch

  $$[(x_1, \ldots, x_n)] \star [(y_1, \ldots, y_n)] := [(x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}, \ldots, y_n)]$$

  ein nichttriviales differenzierbares L-Gruppoid $(T^n, \star)$.
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 0$ und $(\mathbb{R}^2, *)$ das durch die Verknüpfung $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) := \big(x_1, f(x_1 - y_1) + y_2\big)$ definierte L-Gruppoid aus Beispiel 1.18. Hier ist die Verknüpfung genau dann mit $\sim$ verträglich, wenn $f(t + 1) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. In diesem Fall ist $(T^2, \star)$ mit $[(x_1, x_2)] \star [(y_1, y_2)] := \big[\big(x_1, f(x_1 - y_1) + y_2\big)\big]$ ein L-Gruppoid.
  So führt zum Beispiel die Wahl $f(t) :\equiv 0$ zu obigem Einschneideverfahren. Setzt man $f(t) := \sin(2\pi t)$, dann erhält man ein differenzierbares und flexibles, aber nicht assoziatives L-Gruppoid $(T^2, \star)$. Ein nicht flexibles, differenzierbares L-Gruppoid $(T^2, \star)$ konstruiert man dagegen zum Beispiel durch $f(t) := \cos(2\pi t) - 1$.

Dagegen gilt:

Satz 2.30. *Jedes differenzierbare L-Gruppoid $(S^2, *)$ ist trivial.*

Beweis. Sei S^2 die 2-Sphäre und $(S^2,*)$ ein differenzierbares L-Gruppoid. Für jedes $a \in S^2$ ist $a * S^2$ wegen Lemma 2.12.2 und Satz 2.23 eine zusammenhängende abgeschlossene differenzierbare Untermannigfaltigkeit von S^2.

Angenommen, $(S^2,*)$ ist nicht trivial, dann gibt es ein $a \in S^2$ mit $a * S^2 \neq \{a\}$ und es folgt $\dim(a * S^2) > 0$. Wäre $\dim(a * S^2) = 2$, dann gäbe es einen inneren Punkt in $a * S^2$ und $(S^2,*)$ wäre nach Korollar 2.14 entgegen unserer Annahme trivial. Also ist $\dim(a * S^2) = 1$. Da S^1 und $\mathbb{R}$ bis auf Homöomorphie die einzigen eindimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten sind (siehe z.B. [2], Th. 5.4.1) und $a * S^2$ nach Lemma 2.12.3 kompakt ist, folgt, dass $a * S^2 \subset S^2$ homöomorph zu S^1 ist. Nach dem Jordanschen Kurvensatz (siehe [5], 11.7.6 (b)) zerlegt die Kreislinie $a * S^2$ die Sphäre S^2 in genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, welche nach dem Satz von Schönflies homöomorph zu offenen Bällen sind (siehe [5], 11.7.8 (c), Beweis in [3], §9). Somit erhalten wir einen Widerspruch, denn nach Korollar 2.8 darf $a * S^2$ nicht Rand eines Balles $B^2 \subset S^2$ sein. □

Satz 2.31. *Für den zweidimensionalen reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$ gilt:*
Jedes flexible differenzierbare L-Gruppoid $(\mathbb{R}P^2,*)$ ist trivial.

Beweis. Sei $(\mathbb{R}P^2,*)$ ein flexibles differenzierbares L-Gruppoid und $a \in \mathbb{R}P^2$. Wegen Lemma 2.12.2 und Satz 2.23 ist $a * \mathbb{R}P^2$ eine zusammenhängende abgeschlossene differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}P^2$.

Angenommen, $(\mathbb{R}P^2,*)$ ist nicht trivial, dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}P^2$ mit $a * \mathbb{R}P^2 \neq \{a\}$ und es folgt $\dim(a * \mathbb{R}P^2) > 0$. Wäre $\dim(a * \mathbb{R}P^2) = 2$, dann gäbe es einen inneren Punkt in $a * \mathbb{R}P^2$ und $(\mathbb{R}P^2,*)$ wäre nach Korollar 2.14 entgegen unserer Annahme trivial. Also ist $\dim(a * \mathbb{R}P^2) = 1$, das heißt $a * \mathbb{R}P^2$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1 (siehe [2], Th. 5.4.1). Da mit $\mathbb{R}P^2$ nach Lemma 2.12.3 auch $a * \mathbb{R}P^2$ kompakt ist, muß $a * \mathbb{R}P^2$ homöomorph zu S^1 sein.

Nach Notiz 2.3.4 ist $\mathbb{R}P^2$ homöomorph zu $(\mathbb{R}P^2 * a) \times (a * \mathbb{R}P^2)$ und somit lässt sich auch die Fundamentalgruppe zerlegen in

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2 * a) \times \pi_1(a * \mathbb{R}P^2).$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_1(a * \mathbb{R}P^2)$ ist keine Untergruppe von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2)$. □

Bemerkung 2.32. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $(M,*)$ ein flexibles differenzierbares L-Gruppoid. Da M für jedes $a \in M$ nach Notiz 2.3.4 diffeomorph zu $(M * a) \times (a * M)$ ist und die Faktoren nach Satz 2.23 differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind, folgt

$$\dim M = \dim(M * a) + \dim(a * M).$$

Sei M^n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für die singulären Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ von M^n gilt dann bekanntlich

$$H_k(M^n) = 0, \text{ falls } k > n \text{ oder } k < 0.$$

Im Folgenden sind alle auftretenden Mannigfaltigkeiten differenzierbar und unberandet. Seien X^p, Y^q zwei p- bzw. q-Mannigfaltigkeiten. Dann ist $X^p \times Y^q$ genau dann kompakt und orientierbar, wenn X^p und Y^q kompakt und orientierbar sind, d.h.

$$H_{p+q}(X^p \times Y^q) \neq 0 \Longleftrightarrow H_p(X^p) \neq 0 \text{ und } H_q(Y^q) \neq 0.$$

Definition 2.33. *Eine geschlossene n-Mannigfaltigkeit M^n heißt reelle Homologiesphäre, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} H_k(M^n) &\cong \mathbb{R} \quad \text{für } k = 0 \text{ und } k = n \\ H_k(M^n) &= 0 \quad \text{für } 0 < k < n \end{aligned}$$

Bemerkung 2.34. M^n ist genau dann zusammenhängend, wenn $H_0(M^n) \cong \mathbb{R}$ ist.

Beispiel 2.35. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die n-Sphäre S^n und die ungerade-dimensionalen reellen projektiven Räume $\mathbb{R}P^{2n+1}$ reelle Homologiesphären. (siehe [5] 9.5.3 und 9.9.14).

Lemma 2.36. *Sei M^n eine n-dimensionale reelle Homologiesphäre mit*

$$M^n \cong X^p \times Y^q,$$

d.h. M^n sei diffeomorph zu einem direkten Produkt zweier p- bzw. q-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Dann ist $p = 0$ oder $q = 0$.

Beweis. Es ist

$$H_p(M^n) \cong \bigoplus_{k=0}^{p-1} H_k(X^p) \otimes_{\mathbb{R}} H_{p-k}(Y^b) \bigoplus H_p(X^p) \otimes_{\mathbb{R}} H_0(Y^q).$$

Da Y^q zusammenhängend ist, folgt $H_0(Y^q) \cong \mathbb{R}$. Ferner ist $H_p(X^p) \neq 0$, also ist $H_p(X^p) \otimes_{\mathbb{R}} H_0(Y^q) \cong H_p(X^p) \neq 0$. Wären nun $p > 0$ und $q > 0$, wegen $p + q = n$ also $p < n$, dann folgte $H_p(M^n) = 0$, ein Widerspruch. □

Mit Bemerkung 2.32 folgt:

Korollar 2.37. *Sei M^n eine reelle Homologiesphäre und $(M^n, *)$ ein flexibles differenzierbares L-Gruppoid. Dann ist $(M^n, *) = (M^n, *_1)$ oder $(M^n, *) = (M^n, *_2)$.*

Frage 2.38. Zum Abschluss einige (für uns) offene Probleme über differenzierbare L-Gruppoide:

- Sei S^n die n-Sphäre und $(S^n, *)$ ein differenzierbares L-Gruppoid. Ist $*$ dann trivial?
  [Teilantworten: Ja für $n = 1$ (siehe Satz 2.16) und für $n = 2$ (siehe Satz 2.30). Ja, wenn zusätzlich $*$ als flexibel vorausgesetzt wird, siehe Korollar 2.37.]
- Sei $\mathbb{R}P^{2n}$ ein gerade-dimensionaler reeller projektiver Raum, aufgefaßt als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Sei weiter $(\mathbb{R}P^{2n}, *)$ ein flexibles differenzierbares L-Gruppoid. Ist $*$ dann notwendigerweise trivial?
  [Für $\mathbb{R}P^2$ wurde dies mit Satz 2.31 schon gezeigt. Für $\mathbb{R}P^{2n+1}$ gilt die entsprechende Vermutung nach Korollar 2.37 zusammen mit Beispiel 2.35.]
- Sei $(\mathbb{R}P^n, *)$ ein differenzierbares (bzw. topologisches) L-Gruppoid. Ist dann $*$ schon trivial?
  [Ja für $n = 1$ wegen Satz 2.16, denn $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.]
  Allgemeiner lässt sich (in Hinblick auf Beispiel 2.2) fragen, ob es nichttriviale differenzierbare (bzw. topologische) L-Gruppoide $(M, *)$ gibt, falls M nur in trivialer Weise Produkt von Mannigfaltigkeiten ist, d.h. falls aus $M = A \times B$ (mit Mannigfaltigkeiten A, B) schon $M \cong A$ oder $M \cong B$ folgt.

Literatur

[1] Bröcker, T.; Jänich, K.: *Einführung in die Differentialtopologie.* Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1973. Zbl 0269.57010

[2] Engelking, R.; Sieklucki, K.: *Topology - a geometric approach.* Heldermann, Berlin 1992. Zbl 0808.54001

[3] Moise, E. E.: *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3.* Springer, New York - Heidelberg - Berlin 1977. Zbl 0349.57001

[4] Schafer, R. D.: *An introduction to nonassociative algebras.* Academic Press, New York/London 1966. Zbl 0145.35601

[5] Stöcker, R.; Zieschang, H.: *Algebraische Topologie.* B. G. Teubner, Stuttgart 1988. Zbl 0648.55001

Zusatz: Ist $(M, *)$ ein flexibles L-Gruppoid, dann ist $(M, *, *^{\text{opp}})$ ein idempotentes semizentrales Bigruppoid. Solche Gruppoide treten in der Automatentheorie auf. Vergleiche hierzu T. Boykett: *Efficient exhaustive listings of reversible one dimensional cellular automata.* Manuskript, Januar 2001.

Received Oktober 30, 2001