Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 50 (2009), No. 2, 301-308.

Dérivations de l'Algèbre $U_q^+(B_2)$

L. Ben Yakoub   A. Louly *

Université Abdelmalek Essaâdi
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences de Tétouan
B.P. 2121 Tétouan, Maroc
e-mail: benyakoub@hotmail.com   e-mail: loulyadel@yahoo.fr

Resumée. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie simple de type B_2 sur un corps algèbriquement clos de caractéristique nulle $\mathbb{k}$ et q un élément de $\mathbb{k}^*$ non racine de l'unité. L'objet de cet article est de déterminer toute l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre enveloppante quantique $U_q^+(\mathfrak{g})$ de la partie nilpotente positive.

Introduction

L'algèbre enveloppante quantique, $U_q^+(\mathfrak{g})$, de la partie nilpotente positive d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ a été étudiée par plusieurs auteurs. Dans [4] et [5] Caldero a déterminé son centre et l'ensemble de ses éléments normalisants, ainsi des résultats partiels sur son groupe des automorphismes pour $\mathfrak{g}$ quelconque, et il a déterminé explicitement ce groupe pour $\mathfrak{g}$ de type A_2. Ce résultat est aussi démontré par Alev et Dumas en [1].

Malliavin dans [8] et Kirkman et Small dans [7] ont donné une analyse détaillée de $U_q^+(\mathfrak{sl}(3))$ du point de vue de la théorie des anneaux. Et puis, Malliavin a donné dans [9] une description total du spectre premier de $U_q^+(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ de type B_2. Ainsi Andruskiewitsch et Dumas ont donné dans [2] quelques résultats exploratoires concernant le groupe des automorphismes de cette algèbre.

D'autre part Malliavin et Ben Yakoub ont déterminé explicitement dans [3] l'algèbre de Lie des dérivations de $U_q^+(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ de type A_2.

*Ce travail est partiellement supporté par le projet d'action intégrée MA/01/01.

Alors, dans cet article, nous intéressons à l'étude de l'algèbre de Lie des dérivations de $U_q^+(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ de type B_2.

La première partie de cet article est consacrée à l'étude préliminaire de $U_q^+(\mathfrak{g})$ et de rappeler les résultats données par Andruskiewitsch et Dumas dans [2] concernant une localisation de cette algèbre, ainsi que son centre.

Dans la deuxième partie, nous déterminons, premièrement, l'algèbre de Lie des dérivations de la localisation de $U_q^+(\mathfrak{g})$, donnée dans la première partie. Puis nous donnons l'algèbre de Lie des dérivations de $U_q^+(\mathfrak{g})$.

1. Propriétés préliminaires

Dans toute la suite, $\mathbb{k}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle algébriquement clos, q un élément non nul de $\mathbb{k}$ non racine de l'unité.

Soit $U = U_q^+(\mathfrak{g})$ la $\mathbb{k}$-algèbre enveloppante quantique de la partie positive η^+ d'une algèbre de Lie simple complexe $\mathfrak{g}$ de type B_2.

Par définition U est l'algèbre engendrée sur $\mathbb{k}$ par deux générateurs e_1 et e_2 vérifiant les relations de Serre suivantes:

(S$_1$) $\quad e_1^2e_2 + (q^2+q^{-2})e_1e_2e_1 + e_2e_1^2 = 0$

(S$_2$) $\quad e_2^3e_1 - (q^2+1+q^{-2})e_2^2e_1e_2 + (q^2+1+q^{-2})e_2e_1e_2^2 - e_1e_2^3 = 0$

1.1. Expression de U comme extension de Ore itéré

On pose $y_2 = e_1, y_3 = e_2, y_1 = y_2y_3 - q^2y_3y_2$ et $z_1 = y_3y_1 - q^2y_1y_3$.

Alors on a le résultat suivant:

Proposition 1.1. *U est l'extension de Ore itéré $\mathbb{k}[z_1, y_1][y_2, \sigma][y_3, \tau, \delta]$, où*

σ est l'automorphism de $\mathbb{k}[z_1, y_1]$ défini par $\sigma(z_1) = z_1$ et $\sigma(y_1) = q^{-2}y_1$.

τ est l'automorphism de $\mathbb{k}[z_1, y_1][y_2, \sigma]$ défini par $\tau(z_1) = z_1$, $\tau(y_1) = q^2y_1$ et $\tau(y_2) = q^{-2}$.

δ est la τ-dérivation de $\mathbb{k}[z_1, y_1][y_2, \sigma]$ définie par $\delta(z_1) = 0, \delta(y_1) = z_1$ et $\delta(y_2) = -q^2y_2$.

Par recurrence on trouve:

Proposition 1.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a:*

1. (a) $y_1y_2^n = q^{2n}y_2^ny_1$
   (b) $y_1^ny_2 = q^{2n}y_2y_1^n$.
2. (a) $y_3^{n+1}y_1 = q^{2(n+1)}y_1y_3^{n+1} + \Delta_n^q z_1y_3^n$
   (b) $y_3y_1^{n+1} = q^{2(n+1)}y_1^{n+1}y_3 + \Delta_n^q z_1y_1^n$

   où $\Delta_n^\lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{2i}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{k}$.
3. (a) $y_3y_2^{n+1} = q^{-2(n+1)}y_2^{n+1}y_3 - q^{-2}\Delta_n^{q^{-2}}y_1y_2^n$
   (b) $y_3^{n+2}y_2 = q^{-2(n+2)}y_2y_3^{n+2} - q^{2n}\Delta_{n+1}^{q^{-2}}y_1y_3^{n+1} - q^{-2}\Theta_n^q z_1y_3^n$

   où $\Theta_n^q = \sum_{i=0}^{n} q^{2i}\Delta_i^{q^{-2}}$.

1.2. Une localisation de U

La sous-algèbre de U engendré sur $\Bbbk$ par y_1 et y_2, est le plan quantique (avec $y_1y_2 = q^2y_2y_1$), que l'on notera $\Bbbk_{q^2}[y_1, y_2]$. Son localisé suivant l'ensemble multiplicatif $S = \Bbbk^*\{y_1^iy_2^j/i, j \in \mathbb{N}\}$, est le tore quantique $\Bbbk_{q^2}[y_1^{\pm1}, y_2^{\pm1}]$.

Alors d'après ([2] 3.1.4) on a:

Proposition 1.3. *La localisation de U suivant l'ensemble multiplicatif S est l'extension de Ore itéré $\Bbbk_{q^2}[y_1^{\pm1}, y_2^{\pm1}][y_3, \tau, \delta]$, que l'on notera V, où l'on désigne encore par τ et δ les prolongements canoniques de τ et δ à $\Bbbk_{q^2}[y_1^{\pm1}, y_2^{\pm1}]$. De plus on a $U \subset V = \Bbbk_{q^2}[y_1^{\pm1}, y_2^{\pm1}][z_1, z_2]$, où*

$$z_2 = y_1^2 + q^2(1 + q^2)z_1y_2 + (q^4 - 1)y_1y_2y_3.$$

Corollaire 1.4. *Les familles suivantes*

$$\{z_1^iy_1^jy_2^ky_3^l/\ i, l \in \mathbb{N}\ et\ j, k \in \mathbb{Z}\} \quad et \quad \{z_1^iz_2^jy_1^ky_2^l/\ i, j \in \mathbb{N}\ et\ k, l \in \mathbb{Z}\}$$

sont des bases de P.B.W de V.

1.3. Centre de U et V

On désigne par $N(A)$ l'ensemble des éléments normalisants et par $Z(A)$ le centre d'une $\Bbbk$-algèbre A.

Alors on a:

Proposition 1.5. $N(U) = Z(U) = Z(V) = \Bbbk[z_1, z_2]$.

Démonstration. ([2] Lemme 3.1). □

Remarque 1.6. V est une $Z(V)$-algèbre de base $\{y_1^iy_2^j/i, j \in \mathbb{Z}\}$.

2. Dérivations

Dans tout ce qui suit, si A est une $\Bbbk$-algèbre, nous noterons $Der(A)$ le $Z(A)$-module des dérivations de A, $Derint(A)$ le sous-module des dérivations intérieurs et $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Derint(A)}$.

Une $\Bbbk$-dérivation de A est dite $Z(A)$-dérivation, si elle est $Z(A)$-linéaire (i.e. $D(Z(A)) = 0$).

On note par $Der_{Z(A)}(A)$ l'ensemble des $Z(A)$-dérivations de A. C'est un $Z(A)$-sous module de $Der(A)$, contenant $Derint(A)$.

2.1. Dérivations de V

Il est facile de vérifier qu'il existe des dérivations de V:
D_1, D_2, δ_1 et δ_2, définies par:
$D_i(y_j) = \delta_{ij}y_j \quad D_i(z_j) = 0$ pour $i, j = 1, 2$.
$\delta_i(y_j) = 0 \quad \delta_i(z_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 1, 2$.
On remarque que D_1 et D_2 sont des $Z(V)$-dérivations.

Proposition 2.1. *$Der_{Z(V)}(V) = Z(V)D_1 \oplus Z(V)D_2 \oplus Derint(V)$.*

Démonstration. Même preuve que ([6], théorème 1), en remplaçant $\mathbf{C}$ par $Z(V)$. □

Corollaire 2.2. *$Der(V) = \bigoplus_{i=1}^{2} Z(V)D_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{2} Z(V)\delta_i \oplus Derint(V)$.*

Démonstration. Si D est une dérivation de V, alors $D(Z(V)) \subset Z(V)$ donc il existe a et b de $Z(V)$ tels que la restriction de D sur $Z(V)$ est $a\delta_1 + b\delta_2$ donc $D_1 - a\delta_1 - b\delta_2$ est une $Z(V)$-dérivation de V, alors d'après la proposition précédente on trouve le résultat. □

Corollaire 2.3. *$H^1(V) \simeq Z(V)^4$.*

2.2. Dérivations de U

On sait que toute dérivation de U se prolonge uniquement en une dérivation de V, alors on a $Der(U) \subset Der(V)$. Donc, dans cette partie, nous utiliserons les résultats de la section précédente pour déterminer $Der(U)$.

Il est facile de vérifier qu'il existe des dérivation de U définies par:

$$\gamma_1(y_1) = y_1 \ , \gamma_1(y_2) = 0 \ , \gamma_1(y_3) = y_3 \text{ et } \gamma_1(z_1) = 2z_1$$

$$\gamma_2(y_1) = 0 \ , \gamma_2(y_2) = y_2 \ , \gamma_2(y_3) = -y_3 \text{ et } \gamma_2(z_1) = -z_1.$$

Lemme 2.4. *Soit $a, b \in \Bbbk_{q^2}[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 2}][z_1]$ tel que pour un $n \in \mathbb{N}$ on a:*

$$q^{2n} a y_1 - y_1 a \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \Bbbk[z_1] y_1^i y_2^j \ (\textit{resp. } q^{-2n} b y_1 - y_1 b \in \Bbbk_{q^2}[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 2}][z_1]).$$

Alors

$$a \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \Bbbk[z_1] y_1^i y_2^j \ (\textit{resp } b \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i \geq 0}} \Bbbk[z_1] y_1^i y_2^j).$$

Démonstration. 1. Soit $a = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_{ij} y_1^i y_2^j$ avec $a_{ij} \in \Bbbk[z_1]$
alors

$$q^{2n} a y_1 - y_1 a = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (q^{2(n-j)} - 1) a_{ij} y_1^{i+1} y_2^j \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \Bbbk[z_1] y_1^i y_2^j$$

donc pour $j < 0$ on a $(q^{2(n-j)} - 1) a_{ij} = 0$, or q n'est pas racine de l'unité alors $a_{ij} = 0$ pour $j < 0$ d'où le résultat.

2. Même démonstration pour la deuxième. □

Théorème 2.5. *Pour toute dérivation D de U on a: D est une dérivation intérieure de U si et seulement si D est une dérivation intérieure de V.*

Démonstration. Il est évident que la condition est nécessaire. Supposons maintenant qu'il existe un élément P de V tel que $D = ad_P$ comme on a $D(U) \subseteq U$ alors $Py_i - y_iP \in U$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$.

Supposons que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k y_3^k$ avec $a_k \in \mathbb{k}_{q^2}[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 2}][z_1]$.
Alors d'après Propositions 1.2 et 1.3 on a

$$Py_1 - y_1P = \sum_{k=0}^{n-1} [(q^{2k} a_k y_1 - y_1 a_k) + \Delta_k^q a_{k+1} z_1] y_3^k + (q^{2n} a_n y_1 - y_1 a_n) y_3^k \in U.$$

Alors

$$q^{2n} a_n y_1 - y_1 a_n \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i,j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$$

et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$q^{2k} a_k y_1 - y_1 a_k + \Delta_k^q a_{k+1} z_1 \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$$

d'où d'après le lemme précédent $a_n \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$ et par récurrence, en utilisant le lemme précédent, on trouve $a_k \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} Py_2 - y_2P = \sum_{k=0}^{n-2} &[(q^{-2k} a_k y_2 - y_2 a_k) - q^{2k} \Delta_k^{q^{-2}} a_{k+1} y_1 - q^{-2} \Theta_k^q a_{k+2} z_1] y_3^k + \\ &[(q^{-2(n-1)} a_{n-1} y_2 - y_2 a_{n-1}) - q^{2(n-2)} \Delta_{n-1}^{q^{-2}} a_n y_1] y_3^{n-1} + q^{-2n} a_n y_2 - y_2 a_n. \end{aligned}$$

Alors

$$q^{-2n} a_n y_2 - y_2 a_n \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i,j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j,$$

$$(q^{-2(n-1)} a_{n-1} y_2 - y_2 a_{n-1}) - q^{2(n-2)} \Delta_{n-1}^{q^{-2}} a_n y_1 \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i,j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$$

et $(q^{-2k} a_k y_2 - y_2 a_k) - q^{2k} \Delta_k^{q^{-2}} a_{k+1} y_1 - q^{-2} \Theta_k^q a_{k+2} z_1 \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i,j \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$ pour tout k de $\{1, 2, ..., n-2\}$ donc, d'après le lemme précédent $a_n, a_{n-1} \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$ et par récurrence, en utilisant le lemme précédent, on trouve $a_k \in \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{Z} \\ i \geq 0}} \mathbb{k}[z_1] y_1^i y_2^j$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. D'où le résultat. $\square$

Remarques.

(i) D'après la preuve du théorème, nous remarquons qu'un élément P de V doit être un élément de U si et seulement $ad_P(y_i) \in P$ pour tout $i \in \{1,2\}$.

(ii) Si pour une algèbre A on note $ad : A \to Der(A)$ l'homomorphisme du $Z(A)$-modules qui à pour tout élément a de A, $ad(a)$ est la dérivation intérieure ad_a de A.

Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "i_1"'] & Der(U) \arrow[d, "i_2"] \\ V \arrow[r, "ad"'] & Der(V) \end{tikzcd}$$

où i_1 et i_2 sont les injections canoniques.

Alors, (voir [10] p. 370), i_2 induit un homomorphisme

$$\widetilde{i_2} : H^1(U) \to H^1(V)$$

tel que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z(U) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & U \arrow[r, "ad"] \arrow[d, "i_1"] & Der(U) \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "i_2"] & H^1(U) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{i_2}"] & 0 \\ & Z(V) \arrow[r] & V \arrow[r, "ad"] & Der(V) \arrow[r, "s_2"] & H^1(V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Alors d'après le théorème précédent on déduit le résultat suivant:

Proposition 2.6. *L'homorphisme* $\widetilde{i_2} : H^1(U) \longrightarrow H^1(V)$ *défini ci-dessus est un monomorphisme de $Z(U)$-modules.*

On va maintenant donner le résultat principal de cet article:

Théorème 2.7. $Der(U) = \oplus_{i=1}^2 Z(U)\gamma_i \oplus Derint(U)$.

La démonstration de ce théorème se base sur les résultats précédents et les deux lemmes suivants:

Lemme 2.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \Bbbk^*$ et $a_n, b_n \in U$ tels que*

$$\begin{aligned} z_2^n &= \alpha_n y_1^{2n} + y_2 b_n \\ &= \beta_n z_1^n y_2^n + y_1 a_n. \end{aligned}$$

Démonstration. On remarque que $z_2 = a + b = c + d$ avec $a = y_1^2$, $b = y_2[q^2(1 + q^2)z_1 + q^2(q^4-1)y_1y_3]$, $c = q^2(1+q^2)z_1y_2$ et $d = y_1[y_1 + (q^4-1)y_2y_3]$.

Or $z_2 \in Z(U)$ alors on peut facilement vérifier que $ab = ba$ et $cd = dc$, donc d'après le formule du binôme on trouve

$$\begin{aligned} z_2^n &= a^n + b\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k-1} \\ &= c^n + d\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}c^{n-k}d^{k-1}. \end{aligned}$$

Donc si on pose $\alpha_n = 1$, $b_n = [q^2(1+q^2)z_1 + q^2(q^4-1)y_1y_3]\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k-1}$ et $\beta_n = q^{2n}(1+q^2)^n, a_n = [y_1 + (q^4-1)y_2y_3]\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}c^{n-k}d^{k-1}$, on trouve le résultat. □

Lemme 2.9. *Si D est une dérivation de U telle que*

$$D(y_1) = D(y_2) = 0.$$

Alors $D = 0$.

Démonstration. Supposons que $P = D(y_3)$, alors

$$(1)\ y_2P = q^2Py_2 \quad \text{et} \quad (2)\ Py_1 - q^2y_1P = D(z_1) \in Z(U)$$

on a $P \in V$ alors, d'après Corollaire 1.4, $P = \sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}y_1^iy_2^j$ avec $a_{ij} \in \Bbbk[z_1, z_2]$.

Alors (1) et (2) donnent $P = ay_1^{-1} + by_1^{-1}y_2^{-1}$ avec $a = a_{-1,0}$ et $b = a_{-1,-1}$ ce qui donne

$$b = y_2(y_1P - a) \in \Bbbk[z_1, z_2]$$

Alors $b = 0$, sinon il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk[z_1]$ non tous nuls tel que $b = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kz_2^k$ donc, d'après la formule (1) du lemme précédent on a

$$b = \sum_{k=0}^{n}\alpha_ka_ky_1^{2k} + \sum_{k=0}^{n}a_ky_2b_k = y_2(y_1P - a)$$

alors $a_k = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ce qui est impossible.

Par suite $a = y_1P$, donc de même, on utilisera la formule (2) du même lemme, on trouve $a = 0$. □

Preuve du théorème

Si D est une dérivation de U alors $D \in Der(V)$ donc, d'après Proposition 2.1, il existe $a, b \in Z(V) = Z(U)$ et $P \in V$ tels que

$$\begin{aligned} D(y_1) &= ay_1 + ad_P(y_1) \\ D(y_2) &= by_2 + ad_P(y_2). \end{aligned}$$

On aurait alors $ad_P(y_i) \in U$ pour $i = 1$ ou 2, et par conséquence $P \in U$ d'après Remarque (i).

Donc la dérivation $D' = D - a\gamma_1 - b\gamma_2 - ad_P$ est une dérivation de U vérifie:

$$D'(y_1) = D'(y_2) = 0.$$

Ce qui donne, d'après le lemme 2.10, $D' = 0$. □

Corollaire 2.10. $H^1(U) \simeq Z(U)^2$.

References

[1] Alev, J.; Dumas, F.: *Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(sl(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi*. Nagoya Math. J. **143** (1996), 119–146. Zbl 0862.16019

[2] Andruskiewitsch, N,; Dumas, F.: *On the automorphisms of $U_q^+(\mathfrak{g})$*. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics **12** (2008), 107–134. Zbl pre05360211

[3] Ben Yakoub L.; Malliavin, M. P.: *Caractérisation des dérivations intérieures de l'algèbre d'Heisenberg quantiques*. Commun. Algebra **24**(10) (1996), 3131–3148. Zbl 0897.16020

[4] Caldero, P.: *Sur le centre de $U_q(n^+)$*. Beitr. Algebra Geom. **35** (1994), 13–24. Zbl 0804.17007

[5] Caldero, P.: *Etude des q-commutations dans l'algèbre $U_q(n^+)$*. J. Algebra. **178** (1997), 444–457. Zbl 0836.17015

[6] Jiang, C.; Meng, D.: *The derivation algebra of the associative algebra $C_q[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$*. Commun. Algebra. **26**(6) (1998), 1723–1736. Zbl 0902.17006

[7] Kirkman, E. E.; Small, L. W.: *q-analogs of hamonic oscillators and related ring*. Isr. J. Math. **81**(1–2) (1993), 111–127. Zbl 0783.17006

[8] Malliavin, M. P.: *Algèbre d'Heisenberg quantique*. Bull. Sc. Math., II. Sèr. **118** (1994), 511–537. Zbl 0823.17017

[9] Malliavin, M. P.: *La caténarité de la partie positive de l'algèbre enveloppante quantifiée de l'algèbre de Lie simple de type B_2*. Beitr. Algebra Geom. **35**(1) (1994), 73–83. Zbl 0804.17006

[10] Rowen, L. H.: *Ring Theory*. Academic Press, Inc., 1991. Zbl 0743.16001

Received February 16, 2004