La familia cuadrática de orden dos

Alvaro Rovella
Universidad de la República, Uruguay

1 Atractores

Consideraremos transformaciones $f : X \to X$ donde X es un espacio topológico y f una función continua, aunque en todos los ejemplos que presentaremos, el espacio será una variedad compacta y la transformación diferenciable. Dado un punto x se define la órbita positiva (en adelante, órbita, a secas) de x, como el conjunto $o(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$, donde f^n denota la composición de f consigo misma, n veces. La comprensión del comportamiento de las órbitas es el objeto de estudio de los sistemas dinámicos discretos. Un concepto fundamental es el de atractor:

Definición 1 *Un subconjunto compacto $\Lambda \subset X$ es un atractor para f si:*
es invariante para adelante, esto es, $f(\Lambda) \subset \Lambda$,
existe un entorno U de Λ tal que $f(\bar{U}) \subset U$, donde $\bar{U}$ denota la clausura de U, y
$f^n(x)$ tiende a Λ cuando n tiende a $+\infty$ para todo $x \in U$.

Esta no es la definición más usual de atractor, por ejemplo la unión de dos atractores también será un atractor según la definición que acabamos de dar; en general se le pide a un atractor una condición de unidad, como por ejemplo poseer una órbita densa. Sin embargo esta definición es adecuada a nuestros propósitos, dado que no nos interesa estudiar los atractores sino su cuenca de atracción, más precisamente, el borde de su cuenca de atracción. La cuenca de atracción de un atractor Λ es el conjunto de puntos cuya órbita positiva converge a Λ; se denota por $B_\Lambda(f)$.

Existe un entorno $\mathcal{U}$ de f en la topología C^0 del espacio de aplicaciones de X en X tal que para cualquier g en este entorno se cumple que $g(\bar{U}) \subset U$. De esto se deduce que el conjunto $\Lambda(g)$ definido como la clausura de

$$\bigcap_{n \geq 0} g^n(U)$$

es un atractor para g. Es claro entonces que el conjunto U está contenido en la cuenca de atracción $B_\Lambda(g)$ para cualquier g, y por lo tanto, toda la cuenca de $\Lambda(g)$ se obtiene uniendo las preimágenes por g del conjunto U. Diremos que una propiedad es persistente cuando vale para todos las transformaciones de un entorno. Así, el hecho de que exista un atractor contenido en un entorno de U es una propiedad persistente, puesto que toda g próxima de f lo tiene.
El estudio geométrico y dinámico de los atractores está en pleno desarrollo pero no es nuestro interés aquí. En cambio intentaremos estudiar algunas propiedades bastante elementales de la frontera de la cuenca de atracción de un atractor. Aplicaremos estas ideas al estudio de una clase de transformaciones en el plano.
Ejemplos

1. Si f es un difeomorfismo, o sea, un homeomorfismo diferenciable, y X una variedad compacta, entonces el borde de la cuenca de atracción es, en general, una subvariedad invariante tanto por f como por f^{-1}, y la restricción de f a esta subvariedad presenta una dinámica simple. Esto no es un teorema, explicar con precisión cual es la situación genérica demandaría un esfuerzo regular. El hecho básico al cual se debe esta propiedad es que una frontera de cuenca es persistente genéricamente; por un resultado de Mañé, (ver [M]) se deduce que un conjunto persistente ha de ser una subvariedad normalmente expansora. Esto significa que el espacio tangente a la subvariedad se descompone en suma directa de fibrados invariantes, uno contenido en el tangente a la subvariedad y el otro complementario a ésta, de manera que el operador diferencial expande los vectores del fibrado complementario más que cualquier vector del fibrado tangente. En resumen, lo que ocurre en general para difeomorfismos en el caso de dimensión dos, es que el borde de la cuenca es una unión de curvas diferenciables, restringida a las cuales la transformación tiene una dinámica más o menos simple.

2. En el caso de las transformaciones racionales en la esfera de Riemann, los bordes de las cuencas de atracción suelen ser los conjuntos de Julia, que es sabido presentan características de fractales. Este hecho contrasta con la situación anterior y se debe al hecho de que las transformaciones racionales son conformes, lo que impide cualquier tipo de expansividad normal. Por ejemplo, cuando una transformación racional contiene un anillo de Arnold-Herman como subconjunto invariante, el borde de este anillo está contenido en el conjunto de Julia, es un fractal de dimensión mayor que uno, y la transformación restringida a cada una de las componentes del anillo es inyectiva (ver, por ejemplo, [S]). No es normal para transformaciones racionales el tener una curva diferenciable como conjunto invariante, el ejemplo muestra que el motivo no es sólo que la función sea no invertible sino, principalmente, que sea conforme, impidiendo la expansividad normal.

3. Para el caso de endomorfismos la situación es diferente y mucho más complicada, como veremos más adelante. En este caso las transformaciones son no invertibles, el único motivo por el cual puede fractalizarse una curva invariante es por el hecho de ser no invertible, conteniendo infinitas preimágenes de un punto dado. Por ejemplo es posible demostrar la coexistencia, en pequeños abiertos de transformaciones, de mapas para los cuales el borde de la cuenca de atracción es un conjunto fractal y otros para los cuales es una variedad diferenciable.

2 El borde de la cuenca

Supondremos a lo largo de esta sección que existe un endomorfismo F de S^k (la esfera k-dimensional) con un punto fijo atractor p y una curva W_0 que cumple las siguientes propiedades:

1. W_0 es una subvariedad de codimensión 1.
2. W_0 contiene un punto fijo q de F.
3. La componente conexa de $S^k \setminus W_0$ que contiene a p (y que denotaremos por $e(W_0)$) está contenida en B_p y es invariante por F, esto es, $F(e(W_0)) \subset e(W_0)$.

Bajo estas hipótesis es posible decir algunas cosas sobre la cuenca de atracción de p. En primer lugar, observe que como $e(W_0)$ es un conjunto abierto que contiene a p y que está contenido en B_p, entonces para todo $x \in B_p$ se cumple que existe un $j > 0$ tal que $F^j(x) \in B_p$; por lo tanto $B_p = \cup_{j \geq 0} F^{-j}(e(W_0))$. Es decir, la cuenca de atracción de p puede obtenerse a partir de W_0. Es más interesante observar que la frontera de B_p (∂B_p) puede obtenerse a partir de las preimágenes de W_0. En principio, W_0 y todas sus preimágenes están contenidas en la clausura de B_p; mostraremos que estas preimágenes se aproximan al borde de B_p. El concepto de convergencia que usaremos es el que da la métrica de Hausdorff de subconjuntos compactos. La distancia $\rho(K, L)$ entre dos compactos K y L se define como sigue: sea

$$\rho_K(L) = \max_{x \in K}\{\min_{y \in L}\{d(x, y)\}\},$$

donde d denota la distancia en S^k, y defina $\rho(K, L) = \max\{\rho_K(L), \rho_L(K)\}$. Es sabido que esta es una distancia en el espacio de los subconjuntos compactos de S^k, y por lo tanto existe un concepto de límite definido a partir de esta distancia. Además puede definirse el límite superior de una sucesión de compactos K_n como el conjunto de puntos de aglomeración de todas las sucesiones tomadas del conjunto $S = \{x_n : n \geq 0 \ x_n \in K_n \forall n\}$. El límite inferior es el conjunto

de todos los límites de sucesiones de SC, el conjunto de todas las sucesiones de S que son convergentes. Es un ejercicio fácil demostrar que ambos limsup y liminf siempre existen y son únicos, y que liminf es subconjunto de limsup. Son iguales si y sólo si el límite de K_n existe según la distancia ρ; en este caso, coincide con ambos.
Es fácil probar que $\partial B_p \subset \liminf F^{-n}(W_0)$: en efecto, sea $x \in \partial B_p$ y U un entorno conexo de x; como la cuenca completa es unión de preimágenes de $e(W_0)$, esto quiere decir que existe n arbitrariamente grande tal que U intersecta $F^{-n}(e(W_0)$. Por otro lado, x no pertenece a $e(W_0)$ ni a sus preimágenes, ya que x no está en la cuenca de atracción. Por lo tanto, U debe intersectar tanto a $F^{-n}e(W_0)$ como a su complemento, y como U es conexo, intersectará también al borde de ese conjunto, $F^{-n}(W_0)$. Luego, como la condición 3 en la definición de W_0 permite concluir que $F^{-m}(e(W_0))$ es una sucesión creciente de conjuntos, concluimos que U intersecta $F^{-m}(W_0)$ para todo $m \geq n$ lo que demuestra la afirmación, ya que el mismo argumento puede repetirse para entornos U cada vez más pequeños.

Sin embargo no es cierto en general que el límite exista ni que coincida con el borde de B_p, como demuestra el siguiente ejemplo:
Sea $f(x) = -x^2 + 4x$, función de R en R que puede extenderse a S^1 definiendo $f(\infty) = \infty$; ∞ será un punto fijo atractor. Tomemos como W_0 el conjunto formado por 0 y 4, en este caso $e(W_0)$ será la unión de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$, que coincide con B_∞. O sea que W_0 es el borde de B_∞, pero su preimagen contiene el punto 2 que no está en el borde de la cuenca de atracción del punto fijo ∞. Observe que en este caso el límite de $f^{-n}(W_0)$ existe pero es mucho mayor que ∂B_∞.

Sin embargo, puede demostrarse, y tampoco es difícil, que si el borde de B_p es invariante para atrás, entonces $\limsup F^{-n}(W_0) \subset \partial B_p$. (Un conjunto A es invariante para atrás si $F^{-1}(A) \subset A$). Observe que esta condición suficiente no se cumple en el ejemplo de arriba. Resumiendo estos resultados, se tiene:

Proposición 1 *Sea F que cumple las condiciones 1 a 3 del principio de esta sección. Entonces:*

1. $\cup_{n\geq 0} F^{-n}(e(W_0)) = B_p$
2. $\partial B_p \subset \liminf F^{-n}(W_0)$
3. *Si ∂B_p es invariante para atrás, entonces: $\partial B_p \supset \limsup F^{-n}(W_0)$.*
4. *Considere el operador que a cada G asocia la clausura de $B_p(G)$. Está definido en el entorno $\mathcal{U}$ de F y va al espacio de subconjuntos compactos de S^k.*

Si G es un punto de continuidad de este operador, entonces el borde de $B_p(G)$ es invariante para atrás.

5. *El operador definido en el ítem anterior es continuo en un conjunto residual.*

La demostración de esta proposición, que es bastante simple, puede encontrarse en [RRV1].

El último ítem del enunciado anterior dice que el operador es continuo genéricamente, que, junto al penúltimo ítem, implica que el borde de B_p es genéricamente invariante, lo cual, a su vez, implica que el borde de B_p contiene, genéricamente al limsup. De esto se concluye que genéricamente, el borde de la cuenca de atracción de p es el límite de la sucesión de preimágenes de W_0.

La virtud de este procedimiento es que determina el borde de la cuenca como límite de curvas.

3 La familia cuadrática y sus perturbaciones

Aquí aplicaremos estas ideas para estudiar el siguiente ejemplo:

$$F_\mu(x_1, \dots, x_k) = (x_2, \dots, x_k, -x_1^2 + \mu x_1) \tag{1}$$

Esta es denominada la familia cuadrática de orden k. El caso en que $k = 1$ es bien conocido, se trata de la familia cuadrática unidimensional. Algunos resultados válidos para esta familia son los siguientes:

1. Para $\mu \leq 4$ el intervalo $[0, \mu]$ es invariante (es decir $F_\mu([0, \mu] \subset [0, \mu])$ y cualquier punto fuera de este intervalo tiene órbita divergente.

2. Para $\mu > 4$ todos los puntos tienen órbita divergente excepto por un conjunto de Cantor $K = K_\mu$ que es invariante.

3. Existen $\lambda > 1$ y $C > 0$ tales que para todo $x \in K$, $|(F_\mu^n)'(x)| \geq C\lambda^n$ para todo $n \geq 0$.

Un conjunto K sobre el cual se cumple esta tercera propiedad se denomina *expansor*. El hecho de ser K expansor significa que los puntos de K que están próximos, se alejan exponencialmente, en el siguiente sentido: Existe $\epsilon > 0$ tal que si $|F^j(x) - F^j(y)| < \epsilon$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces $|F^j(x) - F^j(y)| \geq C\lambda^j |x - y|$.

Volviendo a la familia de endomorfismos con retardo asociada a la familia de la ecuación (**??**), observe que la k-ésima potencia de F_μ es exactamente el producto de k veces la familia cuadrática unidimensional; es decir, la j-ésima coordenada de $F^k(x)$ depende sólo de x_j y es $-x_j^2 + \mu x_j$. Se puede demostrar fácilmente que las propiedades 1 a 3 enunciadas arriba, son válidas, con ínfimas modificaciones, para F_μ^k. De esto se deduce lo siguiente: Para $\mu \leq 4$ existe un cubo k-dimensional $Q_\mu = [0, \mu]^k$ invariante para F_μ. Cualquier punto fuera de Q_μ tiene órbita divergente. Para $\mu > 4$ los puntos 2 y 3 de arriba valen tal cual están.

En esta sección mostraremos algunos de los resultados que se conocen acerca de las perturbaciones de clase C^2 de la familia cuadrática. Comenzamos con algunas notaciones. Cuando para una transformación F de R^k en sí mismo se puede demostrar que el $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existe (puede ser ∞), esto quiere decir que la transformación puede extenderse con continuidad a $R^k \cup \infty = S^k$. Si el límite da ∞ diremos que ∞ es un punto fijo de F. Es muy fácil ver que el punto ∞ es un punto fijo atractor para todo F_μ. No es tan evidente el siguiente resultado:

Teorema 1 *Para toda perturbación F de F_μ el punto ∞ es un atractor; en el borde de su cuenca hay un punto fijo de F.*
Además existe una curva W_0 que satisface las condiciones 1 a 3 de la sección 2. La frontera de su cuenca contiene un punto fijo de F.

Daremos una demostración del teorema anterior en el caso bidimensional cumpliendo la condición particular siguiente:
Sea $f(x,y)$ una función C^2 próxima de alguna f_μ. Suponga además que la matriz Hessiana de f es definida negativa en todo punto (x,y). Entonces ∞ es un punto fijo atractor del endomorfismo con retardo F asociado a f, $F(x,y) = (y, f(x,y))$.
Observe que la matriz Hessiana de f_μ es constante y tiene un autovalor igual a 0 y el otro negativo; por lo tanto una buena parte de sus perturbaciones de clase C^2 satisfacen la condición adicional impuesta en este último enunciado. El supuesto adicional permite dar una demostración sencilla de este resultado. La demostración en el caso general puede encontrarse en [RRV2].

Demostración: Observe en primer término que la aplicación F_μ tiene un punto fijo en el origen 0. El diferencial de F_μ en este punto tiene autovalores $\pm\sqrt{\mu}$. Por lo tanto cualquier perturbación de F_μ tiene un punto fijo próximo de 0, que, por ahorrar notación, asumiremos que es el origen. Los autovalores del diferencial serán, en todos los casos, uno positivo, λ^+, y otro negativo, λ^-. Por el resultado enunciado en la primera sección, podemos asumir que la perturbación F de F_μ es un endomorfismo con retardo. Estas hipótesis que hemos impuesto sobre la

F implican que

$$F(x,y) = (y, q(x,y) + dx + ey),$$

donde $q(x,y)$ tiene gradiente nulo en el origen, y tiene Hessiano definido negativo en todo el plano. Además $\lambda^{\pm}$ son los autovalores de DF en el origen, por lo cual

$$\lambda^{\pm} = \frac{1}{2}\left(e \pm \sqrt{e^2 + 4d}\right).$$

Por lo tanto los autovectores asociados a $\lambda^{\pm}$ son, respectivamente, $(1, \lambda^{\pm})$. Mostraremos ahora que todos los puntos abajo de la recta $y = \lambda^{-}x$ están contenidos en B_{∞}, o sea, su órbita positiva es divergente. Defina $V(x,y) = y - \lambda^{-}x$. Se demostrará que $V(x,y) < 0$ implica que $\dot{V}(x,y) < 0$, donde $\dot{V}(x,y) = V(F(x,y)) - V(x,y)$. Esto implica por un simple argumento de continuidad que todos los puntos que cumplen $V(x,y) < 0$ tienen órbita divergente. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &= V(F(x,y)) - V(x,y) = q(x,y) + dx + ey - \lambda^{-}y - (y - \lambda^{-}x) \\
&= q(x,y) + (d + \lambda^{-})x + (e - \lambda^{-} - 1)y \\
&< q(x,y) + (d + \lambda^{-})x + (e - \lambda^{-} - 1)\lambda^{-}x \\
&= q(x,y) + ((-\lambda^{-})^2 + e\lambda^{-} + d)x = q(x,y)
\end{aligned}$$

La justificación del $<$ en la secuencia de arriba es la siguiente: Primero, $e - \lambda^{-} - 1$ es positivo, ya que coincide con $\lambda^{+} - 1$ que está próximo de $\sqrt{\mu} - 1$ que es positivo ya que $\mu > 1$. Luego, como habíamos supuesto $V(x,y) < 0$, sustituimos y por algo que es mayor, $\lambda^{-}x$. Para justificar el último paso observe que lo que multiplica a x en el penúltimo miembro es cero, ya que λ^{-} es raíz del polinomio característico de DF_0.
Finalmente, como $q(x,y)$ tiene gradiente nulo en 0 y Hessiano definido negativo, se concluye que $q(x,y) \leq q(0,0) < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Esto demuestra que $\dot{V}$ es negativa abajo de la recta $y = \lambda^{-}x$ y termina la demostración de la primera afirmación del teorema.

Denominaremos W a la recta $y = \lambda^{-}x$. No es difícil ver que $W_0 = F^{-1}(W)$ es una curva cerrada, homeomorfa a S^1. Es claro que W_0 cumple las propiedades 1 a 3 del principio de la sección 2 ya que W_0 es la preimagen de W, $0 \in W_0$ y $e(W_0)$ está contenida en B_{∞}, ya que $F(e(W_0)) = \{(x,y) : y < \lambda^{-}x\}$. Esto prueba el teorema.

Los resultados enunciados en la sección 2 junto con algunos argumentos un poco más complicados que incluyen por ejemplo, la elección de algunas componentes especiales de las preimágenes de la curva W_0, permiten demostrar algunos resultados que explican parcialmente algunas de las características dinámicas de las perturbaciones del endomorfismo F_4, donde se produce el violento cambio estructural en la dinámica de F_μ que consiste en pasar de tener una región invariante bordeada por una curva a tener que la cuenca de ∞ es densa en el plano y su complemento es un conjunto de Cantor. En este último caso, el conjunto de puntos críticos de F, es decir , el conjunto C de los puntos x tales que el diferencial de F es no invertible en x, está contenido en la cuenca de atracción de ∞. Es necesario que el conjunto C sea atraído por este atractor para que la transformación sea hiperbólica. Esta condición es, en algunos casos, también suficiente; por ejemplo una transformación racional en la esfera de Riemann es hiperbólica si y sólo si el conjunto C es atraído por atractores. Es claro que este resultado no es válido en este caso, pero de todas maneras es importante determinar la ubicación del conjunto C y las condiciones para que esto suceda.

Teorema *Existe $\mathcal{U}$ entorno de F_4, tal que para todo $F \in \mathcal{U}$, exactamente una de estas condiciones es válida:*
a) El conjunto C de puntos críticos de F está contenido en la cuenca de atracción de ∞.
b) Existe un conjunto J, conexo, límite de curvas, que contiene al punto fijo y a algún punto crítico, y está contenido en el borde de B_∞.

Este resultado obtenido a partir de las construcciones anteriores permite dar una mejor descripción de lo que sucede en las proximidades de F_4, resumiendo:

Teorema

1. *Sea F una perturbación de clase C^2 de alguna F_μ con $1 < \mu < 4$. Entonces existe una curva J, invariante por F, que es el borde de B_∞ y es homeomorfa a S^1. J encierra una región invariante por F (y por lo tanto disjunta de B_∞).*

2. *Sea F una perturbación de alguna $F\mu$ con $\mu > 4$. Entonces la cuenca de atracción de ∞ es densa y su complemento es un conjunto de Cantor expansor.*

3. *Sea $\mathcal{U}$ un entorno de F_4. Dentro de $\mathcal{U}$ se encuentran transformaciones que cumplen la propiedad 1 de este teorema y otras que cumplen la 2. Existe también una subvariedad $\mathcal{S}$ de codimensión 1 en el espacio de los endomorfismos clase C^2, que constituye parte del borde del conjunto de endomorfismos para los cuales el conjunto C de puntos críticos está contenido en la cuenca de B_∞:*
   para cualquier $F \in \mathcal{S}$ existe un entorno $\mathcal{V}$ de F tal que $\mathcal{S}$ separa $\mathcal{V}$ en dos componentes: para G en una de ellas, existe una curva J invariante que contiene al origen 0 y es parte de la frontera de B_∞; si G está en la otra componente ocurre lo mismo que en 2: B_∞ es densa y su complemento un Cantor expansor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[$RRV1$] Romero, Rovella, Vilamajó. *Invariant manifolds for delay endomorphisms.*: Discrete and Continuous Dynamical Systems. vol. 7 num. 1, **2001**

[$RRV2$] Romero, Rovella, Vilamajó. *The higher order quadratic family.* Preprint DdC Univ. Lisandro Alvarado. Barquisimeto.**2000**.

[S] Steinmetz. *Rational iteration.* De Gruyter studies in Math., 16 **(1993)**.