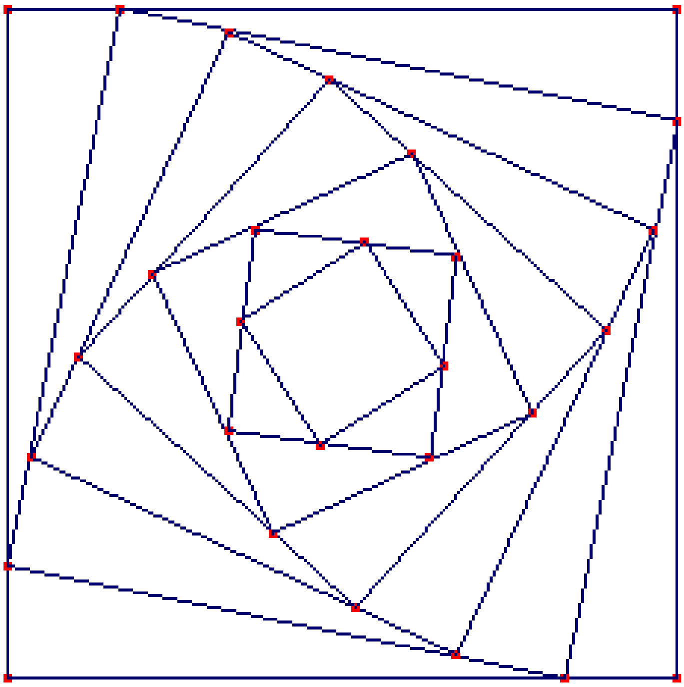


Si designamos por l_n el lado del n-ésimo cuadrado,
¿Existe el $\lim_{n\to\infty} l_n$? (*Ver F. Hitt, pág. 213*)

Vol. X • No. 2 • Año 2003

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen X, Número 2, Año 2003
I.S.S.N. 1315–4125

Editor
Argimiro Arratia

Comité Editorial
Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá
Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente
Wilfredo Urbina

Capítulos Regionales

CAPITAL
Wilfredo Urbina, Matemáticas, UCV
wurbina@euler.ciens.ucv.ve
LOS ANDES
Oswaldo Araujo, Matemáticas, ULA
araujo@ciens.ula.ve
ZULIA–FALCON
Fernando Sánchez, Matemáticas, LUZ
fsanchez@luz.ve

CENTRO–OCCIDENTAL
Neptalí Romero
nromero@uicm.ucla.edu.ve
Matemáticas, UCLA
ORIENTE
Jacques Laforgue
laforgue@sucre.udo.edu.ve
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
amv@usb.ve http://amv.ivic.ve/

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Edición Especial:
Educación Matemática

Vol. X • No. 2 • Año 2003

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen X, Número 2, Año 2003

Edición Especial:
Educación Matemática

Presentación

Educación Matemática

Sabrina Garbin
Editora Invitada

Este volumen del Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, reúne artículos diversos dentro del campo de la Educación Matemática. Decidir reunir esta serie de artículos que abarcan distintas áreas de esta disciplina, se debe a la importancia creciente que va teniendo este campo del saber. En los últimos años la investigación en educación matemática se ha ido autodefiniendo y en el ámbito internacional, cada vez más, ocupa el interés de matemáticos y profesores de matemáticas; y como materia universitaria, la educación matemática, llegó a ser reconocida y tiene en la actualidad un lugar en la mayoría de las Universidades.

Los ocho artículos que integran este volumen son: *¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel Universitario?* por Michèle Artigue (Francia), *Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático* por Carmen Azcárate y Matías Camacho (España), *Conocimiento matemático y enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas reflexiones* por Martín Socas y Matías Camacho (España), *Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria* por Ma. Luz Callejo y Antoni Vila (España), *Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos* por Luz Manuel Santos Trigo (México), *Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología* por Fernando Hitt (Quèbec), *La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, Meta-afecto y los sistemas de creencias* por Inés Ma. Gómez Chacón (Bélgica) y *Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática* por Vicenç Font (España).

Teniendo en cuenta la investigación en Educación Matemática desarrollada en el nivel universitario en los últimos tiempos, cuya intencionalidad ha sido el favorecer una mayor comprensión, y proponer vías de solución, de las dificultades que los estudiantes encuentran durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, el primer artículo aborda principalmente la siguiente cuestión: ¿qué pueden ofrecer estas investigaciones a un estudio internacional?. Después de este artículo y permaneciendo, en parte, en el nivel universitario, Carmen Azcárate y Matías Camacho hacen una breve exposición de las principales características del llamado "pensamiento matemático avanzado" y muestran algunas de las aportaciones de la investigación en este campo del desarrollo curricular. A estos artículos, le sigue el de Martín Socas y Matías Camacho, que incursiona en el campo de la Educación Secundaria. Nos presentan una reflexión que aborda la naturaleza de las Matemáticas y analizan las influencias que las diferentes concepciones han tenido en las propuestas curriculares en este nivel educativo. Este artículo introduce un aspecto que no es tocado en los artículos anteriores, que es la formación de profesores; incluyen algunas implicaciones para esta formación.

Los dos artículos siguientes tratan de la resolución de problemas pero desde dos enfoques distintos. El artículo de Ma. Luz Callejo y Antoni Vila aborda la visión de la matemática introduciéndose en el ámbito de las creencias de los alumnos sobre la resolución de problemas y sus consecuencias sobre las prácticas. Presentan los resultados de una investigación reciente realizada con un grupo de alumnos que inician la Educación Secundaria. Mientras que Luz Manuel Santos nos introduce en el tema de la importancia del uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de los estudiantes y en procesos de resolución de problemas. A través de algunos ejemplos muestra cómo algunas representaciones producidas con el empleo de un software dinámico de geometría pueden ayudar a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas.

El artículo que sigue, de Fernando Hitt, nos mantiene en el ambiente tecnológico, pero desde una intencionalidad distinta. El interés está en la construcción de conceptos matemáticos y en la problemática del uso de la calculadora gráfica. Su principal propósito es discutir sobre el uso reflexivo de la tecnología en el aula de matemáticas. Finalizado el artículo, Inés Ma. Gómez Chacón nos adentra en un campo de investigación que toma en cuenta los aspectos afectivos. Si bien la investigación en Educación Matemática ha estado centrada principalmente en los aspectos cognitivos, la autora nos muestra cómo los afectos y las emociones desempeñan un papel importante. Con este artículo quiere comunicar los aspectos que considera esenciales en el desarrollo de la tarea intelectual matemática.

Dejamos con este artículo los aspectos afectivos y nos adentramos en una perspectiva filosófica. En el último artículo, Vicenç Font, nos presenta una reflexión principalmente de tipo filosófica, pero realizada desde la perspectiva de la educación matemática. Expone algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas". De esta relación se derivan algunos modos de enseñar matemática y el autor comenta alguna de estas implicaciones.

No quiero terminar esta presentación sin dejar de agradecer a Argimiro Arratia por su idea de realizar un volumen monográfico dedicado a la Educación Matemática e invitarme a reunir estos artículos; también quiero agradecer la ayuda que me ha prestado Matías Camacho para contactar y seguir a algunos de los autores de los artículos que aquí presentamos.

¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?*

Michèle Artigue

1 Introducción

La investigación educativa se ha estado ocupando del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza en el nivel universitario por más de 20 años. Ha intentado mejorar nuestra comprensión de las dificultades que los alumnos encuentran y las disfunciones del sistema educativo; también ha intentado encontrar vías para superar estos problemas. ¿Qué pueden estas investigaciones ofrecer a un estudio internacional? Ésta es la cuestión que abordaré en este artículo, pero antes me gustaría destacar que no se trata de una cuestión fácil de responder por varias razones, entre las que se encuentran, al menos, las siguientes:

1. La investigación educativa está lejos de ser un campo unificado. Esta característica se mostró claramente en el reciente estudio del ICMI titulado "*What is research in mathematics education and what are its results?*" (ver Sierpinska y Kilpatrick, 1998.) La diversidad de paradigmas existentes contribuye ciertamente a la riqueza del campo pero, al mismo tiempo, dificulta el uso y la síntesis de resultados de investigación.

2. Los procesos de enseñanza y aprendizaje dependen parcialmente de los entornos culturales y sociales en los que se desarrollan. Hasta cierto punto, los resultados que se obtienen dependen, de esta forma, del espacio y del tiempo; su campo de validez es necesariamente limitado. Sin embargo, estos límites no son generalmente fáciles de identificar.

3. Finalmente, el conocimiento basado en la investigación no se transforma fácilmente en estrategias educativas efectivas.

*Este artículo apareció originalmente en inglés en D. Holton et al (2003), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 207-220. Esta traducción ha sido realizada por Alejandro S. González-Martín con la autorización de la autora.

Más adelante regresaré a este último punto. Sin embargo, estoy convencida de que la investigación existente puede ayudarnos considerablemente en la actualidad si hacemos sus resultados accesibles a un gran público y si llevamos a cabo los esfuerzos necesarios para relacionar mejor la investigación y la práctica. Espero que este artículo contribuya a que esta convicción no sea sólo personal.

Antes de continuar, me gustaría destacar que la diversidad mencionada más arriba no significa que no se pueda observar tendencias generales. En un nivel teórico, éstas son las indicadas, por ejemplo, por la influencia dominante de los enfoques constructivistas inspirados por la epistemología genética de Piaget o por el movimiento reciente hacia las aproximaciones socio-constructivistas, interaccionistas o antropológicas, que intentan tener más en cuenta las dimensiones sociales y culturales de los procesos de enseñanza y aprendizaje (ver Sierpinska y Lerman, 1996). Dentro de estas perspectivas generales, los investigadores han desarrollado múltiples marcos teóricos locales y metodologías que caracterizan de formas distintas el modo en que las preguntas de investigación se eligen y expresan y el modo en que son abordadas (afectando, por tanto, el tipo de resultados que se puede obtener y el modo en que son descritos). Desde un punto de vista cultural también se observan estas tendencias generales; por ejemplo, en las fuertes regularidades en el comportamiento de los estudiantes y sus dificultades, así como los problemas de enseñanza encontrados por las instituciones educativas. Éstos, hasta ahora, transcienden aparentemente la diversidad de entornos culturales.

En lo que sigue, después de caracterizar los comienzos de los proyectos de investigación, intentaré reducir algunas de las dificultades mencionadas anteriormente presentando resultados de investigación en dos dimensiones principales de los procesos de aprendizaje: cambios cualitativos, reconstrucciones y rupturas por un lado y flexibilidad cognitiva por el otro. Estas dimensiones pueden ser consideradas “transversales”, en cierto grado, con respecto a las diversidades culturales y teóricas, así como a los dominios matemáticos. Sin duda, se trata de una elección personal, inducida por mi propia experiencia como profesora universitaria, como matemática y como investigadora educativa; ésta caracteriza la visión que tengo de los resultados de investigación, visión que no pretende ser objetiva ni exhaustiva.

2 Primeros resultados de investigación algunos informes negativos

Los primeros resultados provenientes de la investigación realizada en niveles universitarios pueden ser considerados negativos. Las investigaciones comienzan sobre el conocimiento de los alumnos en áreas específicas de las Matemáticas, con énfasis particular en el Análisis elemental (o Cálculo, en la cultura anglosajona[1]), un área percibida como fuente principal del fracaso en el nivel universitario. Los resultados obtenidos proporcionan evidencias estadísticas de las limitaciones tanto de las prácticas educativas tradicionales como de las prácticas educativas que favorecen los enfoques formales y teóricos que reflejan el estilo Bourbaki. La estructura y contenidos del libro *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991) dan una clara evidencia de estos hechos, advirtiendo que:

- A comienzos de los años ochenta, Orton (1980), en su Tesis Doctoral, mostró el razonable dominio que los alumnos ingleses tenían de lo que podemos catalogar como "Cálculo meramente algebraico", a saber: cálculo de derivadas y primitivas (anti-derivadas), pero la dificultad significativa que tenían para conceptualizar los procesos límite subyacentes a las nociones de derivada e integral;

- Aproximadamente al mismo tiempo, Tall y Vinner (1981) destacaban la discrepancia entre las definiciones formales que los estudiantes eran capaces de citar y los criterios que utilizaban para comprobar propiedades como la de ser función, la continuidad y la derivabilidad. Esta discrepancia llevó a la introducción de las nociones de *concept definition* y *concept image*[2] para analizar las concepciones de los alumnos;

- Muy pronto, varios autores documentaron las dificultades de los estudiantes con el razonamiento lógico y las demostraciones, con las representaciones gráficas y, de forma especial, con la conexión del trabajo analítico y gráfico de forma flexible.

Schoenfeld (1985) también documentó el hecho de que, cara a tareas no rutinarias, los alumnos – incluso los alumnos aparentemente brillantes – eran incapaces de utilizar de forma eficiente sus recursos matemáticos.

Las investigaciones también mostraron bastante pronto que las reacciones espontáneas de los sistemas educativos a las dificultades recién citadas probablemente inducirían círculos viciosos como el que exponemos a continuación. A fin de garantizar una proporción aceptable de éxito en los alumnos, cuestión cada vez más importante por razones políticas, los profesores tenderían a aumentar la diferencia entre lo que se enseña y lo que se evalúa. Como los estudiantes consideran que el contenido de las evaluaciones es lo que ellos tienen que aprender, esta situación tendría efectos dramáticos en sus creencias sobre lo que son la Matemática y la actividad matemática. Esta situación, por otro lado, tampoco les ayudaría a enfrentarse a la complejidad del pensamiento matemático avanzado.

[1] *Analyse* en francés. En adelante, se utilizará el término Cálculo. N. T.

[2] No se han traducido estos términos debido a su frecuente aparición en inglés en la literatura relacionada. N. T.

Por suerte, los resultados de las investigaciones están lejos de limitarse a unos informes tan negativos. Gracias a un uso creciente de las metodologías cualitativas, que permiten mejores exploraciones del pensamiento de los alumnos y del funcionamiento de las instituciones didácticas (Schoenfeld, 1994), la investigación ha desarrollado y probado modelos cognitivos locales y globales. También se han organizado en estructuras coherentes las varias dificultades que los alumnos encuentran en áreas específicas de las Matemáticas, o en la transición Enseñanza Secundaria-Universidad. Las investigaciones han llevado a diseños de enseñanza basados en sus resultados (o productos de ingeniería[3] que, implementados en entornos experimentales y progresivamente refinados, han demostrado ser efectivos. Sin querer ser exhaustiva, daré algunos ejemplos, clasificados según las dos dimensiones dadas anteriormente (para más detalles, el lector puede referirse a diferentes síntesis en: Artigue, 1996, Dorier, 2000, Schoenfeld, 1994, Tall, 1991 y 1996; a los números especiales dedicados al pensamiento matemático avanzado de las revistas *Educational Studies in Mathematics* editada en 1995 por Dreyfus, *Recherches en Didactique des Mathématiques* editada en 1998 por Rogalski, y a algunos de los diversos monográficos publicados por la *Mathematical Association of America* sobre la reforma del Cálculo o prácticas educativas innovadoras y a las investigaciones sobre temas universitarios específicos, en las *MAA Notes on Collegiate Mathematics Education*).

3 Cambios cualitativos, reconstrucciones y rupturas en el desarrollo matemático del conocimiento en el nivel universitario

Un hallazgo general y transcendente de la investigación en educación matemática es el hecho de que el aprendizaje matemático es un proceso cognitivo que incluye necesariamente "discontinuidades". Sin embargo, la atención que se presta a estas discontinuidades se expresa de distintas formas, dependiendo del investigador. Para reflejar esta diversidad y las diferentes perspectivas que ésta permite, describiré tres aproximaciones diferentes: la primera, en términos de la dualidad proceso-objeto; la segunda, en términos de obstáculos epistemológicos; la tercera, en términos de reconstrucciones de relaciones con objetos del conocimiento.

3.1 Cambios cualitativos en la transición de proceso a objeto: la teoría APOS

Como ya hemos dicho, la investigación en el nivel universitario es fuente de modelos teóricos. El caso de la teoría APOS, iniciada por Dubinsky (ver Tall,

[3] La autora se refiere a la ingeniería didáctica como diseño de instrucción basado en la investigación. N. T.

1991) y refinada progresivamente (ver Dubinsky y McDonald, 2003), es un ejemplo. Esta teoría, que es una adaptación de la teoría de Piaget sobre la abstracción reflexiva, persigue modelizar las construcciones mentales utilizadas en el aprendizaje matemático avanzado. Considera que "*comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones son luego interiorizadas para formar procesos que son después encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas*" (Asiala et al, 1996). Por supuesto, todo esto no sucede a la misma vez y los objetos, una vez construidos, pueden ser utilizados en nuevos procesos, etcétera. Los investigadores que siguen esta teoría la utilizan para construir descomposiciones genéticas [4] de los conceptos que se enseñan en niveles universitarios (en Cálculo, Álgebra abstracta, etc.) y diseñan secuencias de enseñanza que reflejan las estructuras genéticas que han construido y probado.

Igual que sucede con cualquier modelo, el modelo APOS ofrece solamente una visión parcial del desarrollo cognitivo en Matemáticas, pero es innegable hoy día que presta atención a una discontinuidad cualitativa crucial en las relaciones que los alumnos desarrollan con respecto a los conceptos matemáticos. Esta discontinuidad es la transición desde una concepción de proceso a una de objeto, la complejidad de su adquisición y los efectos dramáticos de su subestimación por las prácticas habituales de enseñanza[5]. La investigación relativa a la teoría APOS da también evidencia experimental del papel positivo que pueden jugar las actividades de programación en lenguajes adecuados (como el lenguaje ISETL, cf. Tall, 1991) para ayudar a los alumnos a encapsular procesos en objetos.

3.2 Rupturas en el desarrollo del conocimiento matemático: Obstáculos epistemológicos

La teoría de los obstáculos epistemológicos, introducida originalmente por Bachelard (1938) e importada a la investigación educativa por Brousseau (1997), propone una aproximación complementaria a la evolución cognitiva, centrándose en sus rupturas necesarias. El principio fundamental de esta teoría es que el

[4] Una descomposición genética se define como un análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un estudiante debería hacer para desarrollar su comprensión del concepto. En otras palabras, es una descripción detallada de las construcciones mentales necesarias para enfrentarse con éxito a un concepto matemático dado. N. T.

[5] Obsérvese que una aproximación similar ha sido desarrollada por Sfard, con un énfasis mayor en la dialéctica entre las dimensiones operacional y estructural de los conceptos matemáticos en la actividad matemática (Sfard, 1991).

conocimiento científico no se construye como un proceso continuo, sino que resulta a partir del rechazo de formas previas de conocimiento: los llamados *obstáculos epistemológicos*. Los investigadores que utilizan esta teoría formulan la hipótesis de que algunas dificultades en el aprendizaje, generalmente las más resistentes, provienen de formas de conocimiento que son coherentes y han sido efectivas por un tiempo en contextos sociales y/o educativos. También se formula la hipótesis de que los obstáculos epistemológicos tienen algún tipo de universalidad y, por tanto, se puede seguir su pista en el desarrollo histórico de los conceptos correspondientes. En el nivel universitario, esta aproximación ha sido utilizada fructíferamente en la investigación relativa al concepto de límite (cf. Artigue, 1998 y Tall, 1991, para visiones sintéticas). Investigadores como Sierpinska (1985), Cornu (1991) y Schneider (1991) nos ofrecen evidencia histórica y empírica de la existencia de obstáculos epistemológicos, principalmente los siguientes:

- el significado cotidiano de la palabra "límite", que induce concepciones resistentes del límite como una barrera o el último término de un proceso, o que tiende a restringir la convergencia a la convergencia monótona;
- la sobre-generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, siguiendo el principio de continuidad enunciado por Leibniz;
- la fuerza de la geometría de las formas, que impide a los alumnos identificar claramente los objetos implicados en el proceso de límite y su topología subyacente. Esto hace que para los alumnos sea difícil apreciar la interacción sutil entre los marcos[6] numérico y geométrico en el proceso de límite.

Veamos un ejemplo (tomado de Artigue, 1998) de esta última resistencia, que se da incluso en alumnos brillantes. En un proyecto de investigación sobre los procesos diferenciales e integrales, se planteó a alumnos destacados la siguiente pregunta de tipo no estándar: "¿Cómo explicarías lo siguiente?: Utilizando la descomposición clásica de una esfera en pequeños cilindros para calcular su volumen y su superficie, se obtiene la respuesta conocida de $\frac{4}{3}\pi R^3$ para el volumen, pero se obtiene $\pi^2 R^2$ para la superficie, en lugar de $4\pi R^2$ ".

Se observó que, al enfrentarse a esta cuestión, la gran mayoría de los alumnos avanzados se quedaron atascados. Y, aunque fueran capaces de realizar cálculos correctos para la superficie (no todos eran capaces), seguían incapaces de resolver el conflicto.

Tal como dijeron los estudiantes finalmente, como el montón de cilindros tiende geométricamente a la esfera, las magnitudes asociadas con los cilindros se

[6]Traducimos a lo largo de este artículo, en general, el inglés setting por el término marco, pues la autora alude a la noción de cadre que utiliza Regine Douady. N. T.

comportan de la misma forma, por lo que se tiene como límite la correspondiente magnitud de la esfera. Esta resistencia puede parecer extraña, pero parece más normal si consideramos el efecto producido en los matemáticos por el famoso contraejemplo de Schwarz que prueba que, para una superficie tan simple como un cilindro, el límite de las áreas de las triangulaciones cuando el tamaño de los triángulos tiende a cero pueden tomar cualquier valor superior o igual a la superficie del cilindro, hasta infinito, dependiendo de las elecciones tomadas en el proceso de triangulación, efecto bien descrito por Lebesgue (1956). Las implicaciones históricas y universales de la teoría que lleva a resultados como éste pueden discutirse, como ya lo han sido en la actualidad (ver, por ejemplo, Radford, 1997). Sin embargo, lo que no podemos negar es el hecho de que las formas de conocimiento arriba mencionadas constituyen dificultades resistentes para los estudiantes de hoy en día; además, este aprendizaje matemático implica necesariamente un rechazo parcial de las formas previas de conocimiento, lo que no es fácil para los estudiantes.

3.3 Reconstrucciones en la transición Secundaria-Universidad: El caso del Cálculo

Los cambios cualitativos en las relaciones que los estudiantes desarrollan con respecto a los conceptos matemáticos pueden ser enfocados de una forma menos radical: en términos de reconstrucciones necesarias. En esta sección ilustramos algunos resultados de la investigación. Nos centraremos en las reconstrucciones que han mostrado jugar un papel crucial en la enseñanza del Cálculo en la transición de la Enseñanza Secundaria a la Universidad, al menos en la situación educativa que tiende a predominar, donde un enfoque intuitivo y práctico del Cálculo en el currículum de Secundaria precede al enfoque formal introducido en la Universidad. Algunas de estas reconstrucciones tratan con objetos matemáticos ya familiares a los alumnos antes de la enseñanza oficial del Cálculo.

Un ejemplo típico lo constituyen los números reales. Aparecen pronto en el currículum de Secundaria como objetos algebraicos con un orden denso, con una representación geométrica en la recta real y con aproximaciones decimales que pueden ser fácilmente obtenidas con calculadoras de bolsillo. Sin embargo, muchas investigaciones muestran que, incluso tras su ingreso en la Universidad, las concepciones de los alumnos permanecen borrosas, incoherentes y poco adaptadas a las necesidades del mundo del Cálculo. Por ejemplo, la ordenación de los números reales se reconoce como un orden denso. No obstante, según el contexto, los estudiantes pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números justo antes o después de un número dado (0.999... es así visto a menudo como el predecesor de 1). Más del 40% de los alumnos de nuevo ingreso en las universidades francesas opinan que, si dos números A y B distan en menos de $\frac{1}{N}$, para todo positivo N, no son necesariamente iguales, sino indefinidamente próximos. Las relaciones entre los números irracionales y sus aproximaciones decimales permanecen borrosas. No hay duda de que son necesarias algunas reconstrucciones para comprender los "modos de pensamiento en Cálculo". La investigación muestra que éstas no son fácilmente inducidas con el tipo de análisis intuitivo y algebraico que es el foco principal de la instrucción del Cálculo en los centros de Enseñanza Secundaria y que las construcciones del cuerpo de los números reales en el nivel universitario tienen poco efecto si los alumnos no se enfrentan a la incoherencia de sus concepciones y los conflictos cognitivos consecuentes.

Una segunda categoría de reconstrucciones proviene del hecho de que sólo se puede introducir algunas facetas de un concepto matemático en el primer contacto con él. El concepto de integral ilustra bastante bien este caso. En muchos países el primer contacto con las integrales se da al final del nivel Secundario por medio de la noción de anti-derivada y una aproximación práctica al Teorema Fundamental del Cálculo que permite conectar las anti-derivadas con una noción intuitiva de área. La teoría de integración no se desarrolla hasta la Universidad; primero con la teoría de las integrales de Riemann y, después, en un nivel superior, con la teoría de Lebesgue. Todo esto requiere reconstrucciones sucesivas de las relaciones que los alumnos tienen con el concepto de integral. Muchas investigaciones se han centrado en este tema con una gran consistencia de los resultados obtenidos en todo el mundo, documentando las limitaciones de las estrategias de enseñanza habituales. Estos resultados muestran claramente que la reconstrucción no puede surgir a partir de una mera presentación de la teoría de las integrales de Riemann. A través de prácticas docentes estándar, los alumnos obtienen un razonable éxito en cuestiones estándar, pero nada más. Por ejemplo, si se plantea a los estudiantes cuestiones de modelización para que decidan por sí mismos si un problema requiere un proceso integral para su resolución, se quedan estancados por completo o basan sus respuestas en "pistas" lingüísticas, en caso de haberlas, que han aprendido a percibir en las versiones estándar de tales tareas. La mayoría de los alumnos piensa que la forma más segura de enfrentarse con éxito a este dominio no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente. Me gustaría añadir que no tenemos que ver esto como una especie de fatalidad cognitiva. Simplemente observamos las formas económicas de adaptación de nuestros alumnos a prácticas docentes inadecuadas.

La investigación, como se ha señalado anteriormente, no se limita sólo a informes negativos como éstos. Me gustaría presentar ahora una situación creada por Legrand (1997), en el contexto de un proyecto de investigación que implicaba a matemáticos y físicos con el objetivo de hacer que los alumnos de primer año de Universidad sintieran realmente la necesidad del concepto de integral. La situación se basa en el siguiente problema, aparentemente muy sencillo (las situaciones más efectivas encontradas por los investigadores son, muy a menudo, las aparentemente más sencillas). Una barra lineal de masa M_1 y un punto de masa M_2 están colocados como se muestra. Se pide a los estudiantes que calculen la intensidad de la atracción entre ambas masas.

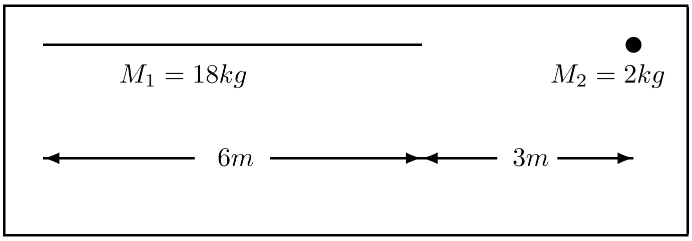


Figura 1. Atracción entre una barra y una masa puntual

Esta situación ha resultado ser efectiva en varios experimentos en distintos contextos. ¿Por qué es efectiva? Para responder a esta cuestión necesitamos un breve análisis didáctico. Cuando se hace esta pregunta sin ninguna pista lingüística, los estudiantes de primer año no la reconocen como un problema a resolver utilizando integrales. El primer punto importante es que los alumnos no se quedan desprovistos de recursos, ya que pueden contar con estrategias basadas, a menudo, en la Física: concentrar la masa de la barra en su centro de gravedad y aplicar la ley de atracción entre dos masas puntuales ya conocida. En las distintas experimentaciones esta estrategia es la que siempre ha predominado. Sin embargo, en un grupo de tamaño razonable, como suele suceder en el nivel universitario, siempre hay alumnos que tienen algunas dudas. "¿Es el principio del centro de gravedad válido en ese caso particular?". Una segunda virtud de esta situación proviene del hecho de que se puede comprobar la validez de este principio simplemente aplicándolo de otra forma. Los estudiantes normalmente sugieren que la barra sea cortada en dos mitades y se aplique el principio del centro de gravedad a cada mitad. Por supuesto, esta operación no da el mismo resultado y el principio resulta no ser válido en este caso particular. Sin embargo, esta respuesta negativa resulta ser también positiva, ya que hace destacar un hecho esencial: la contribución de un trozo de la barra a la fuerza de atracción depende de su distancia a la masa x. Esto permite a los alumnos proponer cotas superiores e inferiores para la intensidad requerida. Además, la técnica que ha sido la base del proceso de invalidación puede ser utilizada posteriormente en un proceso de refinamiento progresivo, que lleva a los estudiantes a la convicción de que la fuerza, cuya existencia es físicamente atestiguada, puede ser aproximada con tanta precisión como se desee. Subyacente se encuentra simplemente el proceso integral fundamental.

En el diseño didáctico elaborado por Legrand éste es justamente el punto de partida. Los alumnos tienen entonces que trabajar en situaciones que, en distintos contextos, requieran el mismo proceso de solución. Posteriormente tienen que buscar y discutir las analogías entre las soluciones con el objetivo de convertir el proceso integral en una herramienta explícita (en el sentido de la distinción entre las dos dimensiones, herramienta y objeto, de los conceptos matemáticos introducida por Douady, 1987). Es tan sólo en este punto cuando el profesor universitario conecta este trabajo con la teoría de las integrales de Riemann y desarrolla la noción de integral como un objeto matemático que será reutilizado posteriormente en situaciones más complejas.

Antes de abandonar este punto, quisiera remarcar el siguiente hecho: la eficiencia aquí no está solamente ligada a las características del problema que acabo de describir, sino que depende enormemente del tipo de escenario desarrollado para organizar el encuentro de los alumnos con esta nueva faceta del concepto de integral. De forma crucial, este escenario participa del carácter social de los procesos de aprendizaje. Es a través de la discusión grupal que la estrategia inicial se invalida. Es el juego colectivo el que permite encontrar una solución en un tiempo razonable y el que promueve algunas regularidades en la dinámica de la situación, que no se podrían asegurar si los estudiantes se enfrentaran al mismo problema de forma individual o en pequeños grupos (un apunte similar se hace en Stigler y Hiebert, 1999, p. 164). Tampoco queda duda de que el efecto sería distinto si el profesor simplemente presentara este ejemplo particular durante una sesión de clase.

Este ejemplo pudiera parecer idílico. Pero tengo que confesar que la educación educativa no provee tan fácilmente de medios efectivos para tratar con todas las reconstrucciones necesarias. Por ejemplo, las diferencias se tornan evidentes si se considera el concepto de límite, central en el Cálculo. Con este ejemplo particular llegamos a una tercera categoría de reconstrucciones; reconstrucciones necesarias porque, como ya ha sido reconocido al comienzo del último siglo por el famoso matemático Poincaré (1904), necesariamente los conceptos no pueden enseñarse desde el principio en su forma definitiva. En niveles de Enseñanza Secundaria, en la mayoría de países en la actualidad, ha sido reconocida la imposibilidad de introducir el campo del Cálculo formalmente. La enseñanza actual se apoya tanto en una concepción dinámica del límite, basada en exploraciones gráficas y numéricas, como en técnicas de naturaleza algebraica (Artigue, 1996). Esto permite a los alumnos resolver simples, pero a su vez interesantes, problemas de variación y optimización. La transición hacia aproximaciones más formales, que tiene lugar en la Universidad, representa un salto tremendo, tanto conceptual como técnicamente.

Desde un enfoque conceptual, un punto esencial es el siguiente: a través de la formalización del concepto de límite lo que está en juego es, sobre todo, una respuesta a las necesidades de fundamento, unificación y de generalización (véase Dorier, 1995, Robert, 1998, o Robert y Speer, 2003). No es sencillo sensibilizar a los jóvenes estudiantes con estas necesidades, ya que éstas no forman realmente parte de su cultura matemática. Desde un punto de vista técnico, lo que sigue es esencial: en el análisis algebraico de su primer contacto, el trabajo técnico no rompe realmente con el trabajo algebraico ordinario. Sin embargo, esto deja de ser así cuando se entra en el campo del Cálculo formal. Por ejemplo, los alumnos deben reconstruir el significado de igualdad y comprender que éstas no vienen dadas, necesariamente, como en álgebra, por una serie de equivalencias sucesivas, sino a partir de la proximidad para cualquier positivo. Otro punto a considerar es que las desigualdades se vuelven más frecuentes que las igualdades, generando un fuerte incremento en la complejidad técnica, en particular debido a los modos de razonamiento asociados, que se basan a menudo en condiciones suficientes. Estos nuevos modos requieren una pérdida de información cuidadosamente controlada basada en una toma de conciencia adecuada de los respectivos órdenes de magnitud de las diferentes partes de las expresiones que los alumnos tienen que manejar. Resumiendo, los alumnos tienen un mundo técnico completamente nuevo a identificar y que aprender a dominar. Esta tarea está lejos de ser fácil y es, necesariamente, un proceso a largo plazo.

3.4 Algunas observaciones para terminar: Desde el Cálculo al Álgebra Lineal

Hasta ahora me he centrado en los cambios cualitativos y en las reconstrucciones más o menos radicales. Como ya se ha destacado, la investigación muestra que las prácticas de enseñanza no estiman suficientemente los costes conceptuales ni técnicos de estos cambios. La enseñanza tiende a dejar la responsabilidad de la mayoría de las reorganizaciones a los alumnos, con efectos dramáticos para la mayoría de éstos, especialmente en la transición Secundaria-Universidad. La investigación también nos muestra que se puede desarrollar estrategias alternativas con resultados fructíferos. Ya se han dado ejemplos para el Cálculo, un dominio ampliamente explorado por la investigación. Pero la cantidad creciente de trabajos de investigación en Álgebra Lineal atestigua la existencia de un fenómeno similar (véase Dorier y Sierpinska, 2003).

Por ejemplo, el concepto de espacio vectorial abstracto, en su forma axiomática, desde un punto de vista epistemológico ha demostrado compartir algunas características comunes con el concepto formal de límite. Cuando entró en la escena matemática, su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador fue mucho más fuerte que su potencial para resolver nuevos problemas y no fue fácilmente aceptado por los matemáticos. La misma situación sucede con nuestros estudiantes, que no necesitan esta construcción abstracta para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de Álgebra Lineal. En Francia algunos investigadores han desarrollado estrategias didácticas específicas que pretenden posibilitar a los estudiantes hacer el trabajo reflexivo y cultural necesario (véase Dorier et al. 2000). En otros países, estas dificultades tienden a ser eliminadas mediante la reducción de tópicos en los primeros cursos de Álgebra Lineal a los de espacios isomorfos a $\mathbf{R}^n$ y mediante el énfasis en el cálculo matricial y sus aplicaciones (Carlson et al., 1993). Investigaciones recientes en Canadá (Hillel y Sierpinska, 1994) sugieren que esta opción no es tan benigna como podría parecer en principio. Vivir en un mundo de Álgebra Lineal construido a partir de la estructura de $\mathbf{R}^n$ hace difícil diferenciar vectores y transformaciones de sus representaciones canónicas y puede inducir nuevos obstáculos.

3.5 Flexibilidad Cognitiva en los Procesos de Enseñanza y Aprendizaje

El resultado recién mencionado está ligado con una cuestión más general, que es la de las relaciones entre los conceptos matemáticos y sus representaciones semióticas, una cuestión a la que la investigación educativa presta una atención creciente. Este hecho no parece independiente de la evolución global de los marcos teóricos mencionados al principio de este artículo, ya que las aproximaciones socioculturales y antropológicas son especialmente sensibles al papel jugado por las herramientas materiales y simbólicas de la actividad matemática en los procesos de aprendizaje. Según la perspectiva teórica, esta atención se expresa de formas distintas; pero el punto fundamental es que rompe con una visión común de competencias instrumentales y semióticas como producto de la conceptualización y formula como hipótesis relaciones dialécticas más fuertes en su desarrollo mutuo. Esto tiene una importancia particular, especialmente si se tiene en mente la actual evolución tecnológica de los instrumentos de la actividad matemática. De forma general, el aprendizaje matemático no puede seguir siendo visto, como sucede a menudo, solamente como una ascensión regular hacia niveles más altos de abstracción y formalización. Las conexiones entre los campos matemáticos de la experiencia, los diferentes puntos de vista, los distintos marcos y los registros semióticos son una parte fundamental. Con tales consideraciones presentes, entramos en un dominio más amplio que podría ser etiquetado como "el dominio de la flexibilidad cognitiva", que cada vez es objeto de mayor investigación (véase, por ejemplo, Dreyfus y Eisenberg, 1996).

Utilizaré algunos ejemplos tomados de recientes investigaciones en Álgebra Lineal para ilustrar este punto. Como ya ha sido destacado por Dorier (2000), históricamente el Álgebra Lineal ayudó a unificar diferentes marcos matemáticos pre-existentes: Geometría, sistemas lineales en finitas e infinitas dimensiones y determinantes, ecuaciones diferenciales y análisis funcional. Este papel unificador y su poder es un valor epistemológico esencial del Álgebra Lineal que tiene que ser entendido y utilizado por los alumnos. Pero esto no se puede conseguir sin el desarrollo de conexiones complejas entre los modos de razonamiento, los puntos de vista, lenguajes y sistemas de representaciones simbólicas. Una vez más, la investigación nos ayuda a comprender la complejidad de las construcciones cognitivas necesarias y, a la vez, muestra la insensibilidad del sistema educativo a esta complejidad. En Dorier (2000), por ejemplo, por un lado, Hillel señala la interacción necesaria en el Álgebra Lineal entre tres niveles distintos de lenguaje y representaciones: los de la teoría general, los de geometría y los de ∇^n. Por otro lado, Sierpinska et al. muestran la interacción necesaria entre tres modos de razonamiento diferentes, denominados respectivamente como sintético y geométrico, analítico y aritmético, analítico y estructural[7]. Ambos trabajos muestran la no-adecuación de las distintas prácticas de enseñanza documentadas, desde las clases magistrales a los tutoriales. Alves Dias (1998), en su reciente Tesis Doctoral, analiza las relaciones entre dos puntos de vista fundamentales en el Álgebra Lineal: los puntos de vista paramétrico y cartesiano[8]. Muestra claramente que, incluso si la conversión entre las representaciones paramétrica y cartesiana de subespacios vectoriales se consigue, a priori, de forma sencilla gracias a técnicas ordinarias para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cuando se manejan espacios vectoriales de dimensiones finitas, los alumnos avanzados de Francia y Brasil están lejos de dominar una conexión flexible entre estos dos puntos de vista. Los símbolos matemáticos, tales como matrices, pueden promover errores en el uso de estas representaciones formales porque los alumnos operan sobre los símbolos formales sin intentar ver si las operaciones que desarrollan son significativas en términos de los objetos que los símbolos representan. Esto conduce a menudo a resultados absurdos que no son reconocidos por los alumnos porque no interpretan o comprueban sus resultados a través de argumentos geométricos o dimensionales. El análisis detallado de libros de texto que Alves Dias desarrolló muestra que no prestan atención a estas cuestiones o desarrollan argumentos teóricos, por ejemplo en términos de dualidad, lo que queda muy lejos del nivel técnico necesario para que nuestros alumnos sean capaces de controlar la conexión.

Éstos son ejemplos de Álgebra Lineal. Como ya ha sido documentado por la investigación, *mutatis mutandis*, hay ejemplos similares en el Cálculo. En esta área, explorada más extensamente, la investigación también ofrece evidencia experimental de que las tecnologías informáticas, si se usan apropiadamente (lo que no resulta tan fácil), pueden jugar un papel crucial en la promoción de conexiones flexibles entre representaciones semióticas. Por ejemplo, entre representaciones gráficas, numéricas y simbólicas de funciones, y ayudar a las representaciones gráficas a convertirse en herramientas efectivas del tra-

[7] En el modo sintético, los objetos matemáticos son, de alguna forma, dados directamente a la mente, que intenta asimilarlos y describirlos. En el modo analítico, son dados indirectamente: construidos a través de definiciones y propiedades de sus elementos. Este modo analítico es dividido por los investigadores en dos sub-modos distintos: el analítico-aritmético, donde los objetos vienen dados por una fórmula que hace posible calcularlos, y el analítico-estructural, donde los objetos se definen por un conjunto de propiedades.

[8] Se adopta un punto de vista paramétrico con un subespacio vectorial, por ejemplo, si el subespacio viene caracterizado por algún conjunto de generadores. Un punto de vista cartesiano consiste en caracterizar un subespacio como las soluciones de un sistema lineal o como el espacio anulador de un operador lineal.

bajo matemático (véase Tall, 1991 y Dubinsky y Harel, 1992). La investigación también muestra que el uso efectivo de las tecnologías informáticas requiere del desarrollo de un conocimiento matemático específico, un requisito que no es fácilmente aceptado por la institución educativa, cuyos valores han sido tradicionalmente definidos con respecto a entornos de lápiz y papel.

4 Potencialidades y Límites de la Investigación para la Acción en el Sistema Educativo

Tal como hemos tratado de mostrar en este artículo, la investigación desarrollada en el nivel universitario nos ayuda a entender mejor las dificultades de aprendizaje que nuestros estudiantes tienen que afrontar, la resistencia sorprendente de algunas, y las limitaciones y disfunciones de algunas prácticas de enseñanza. Además, en varios casos, la investigación ha conducido a la producción de diseños de instrucción que han mostrado ser efectivos, al menos en entornos experimentales. Sin embargo, también debemos reconocer que la investigación no nos da una forma general de mejorar fácilmente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Algunas razones pueden ser encontradas en el actual estado de la investigación: hasta ahora, se han concentrado esfuerzos en unos pocos dominios enseñados en el nivel universitario. Además, la preparación de futuros matemáticos, a pesar de la gran diversidad de estudiantes que toman cursos de Matemáticas en la Universidad, ha sido más o menos privilegiado de forma implícita. La investigación continúa, así, siendo muy parcial debido tanto al contenido de lo que se explora como a su visión de la forma y del contenido esperados del conocimiento. En mi opinión, la forma en que la cuestión de las tecnologías informáticas ha sido generalmente tratada, evidencia este hecho. Principalmente se focaliza en las formas en que las tecnologías informáticas pueden apoyar la conceptualización y la flexibilidad cognitiva, reconocida como un componente esencial de esta conceptualización. Pero no se ha prestado la misma atención a lo que es realmente una actividad matemática profesional asistida por las tecnologías informáticas, y las necesidades matemáticas específicas y no-específicas, dependientes de la especialización profesional, requerida para convertirse en un usuario eficiente y crítico, y cómo el conocimiento correspondiente puede construirse en cursos matemáticos ordinarios o especiales. Sin embargo, esto es también un desafío que debemos afrontar hoy día, teniendo en cuenta el hecho de que, en la Universidad, nuestro compromiso principal ya no es el desarrollo de algún tipo de cultura matemática general.

Otras razones como la siguiente parecen más fundamentales: es raro que la investigación nos permita pensar que a través de adaptaciones mínimas y sencillas podamos obtener ganancias sustanciales. Por el contrario, la mayoría de los diseños basados en la investigación requieren de más implicación y dominio por parte de los profesores, y cambios significativos en sus prácticas (véase, por ejemplo, Dubinsky, Mathews y Reynolds, 1997, con respecto al aprendizaje colaborativo). Ésta es una razón esencial. Lo que tiene que reorganizarse no es solamente el contenido de la enseñanza (no es suficiente con escribir o adoptar nuevos libros de texto), sino cuestiones más globales, tales como las formas del trabajo de los alumnos, los modos de interacción entre alumnos y profesores, y las formas y contenidos de la evaluación. Esto no es fácil de conseguir y no es solamente cuestión de buenas intenciones personales.

Otro punto fundamental es la complejidad de los sistemas donde el aprendizaje y la enseñanza se dan lugar. Debido a esta complejidad, el conocimiento que podemos inferir de la investigación educativa es necesariamente muy parcial. Los modelos que podemos elaborar son necesariamente simplísticos. Podemos aprender mucho incluso a partir de modelos simplísticos, pero no podemos esperar que nos den los medios para controlar realmente los sistemas didácticos. Por tanto, debemos ser realistas en nuestras expectativas y cuidadosos con nuestras generalizaciones. Esto no significa, en mi opinión, que el mundo de la investigación y el mundo de la práctica deban vivir y desarrollarse de forma separada. Todo lo contrario. Pero ello significa que encontrar formas de hacer que el conocimiento basado en la investigación sea útil fuera de las comunidades y los entornos experimentales donde se desarrolla no puede ser dejado bajo la sola responsabilidad de los investigadores. Es nuestra tarea común.

Referencias

Alves Dias, M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramètrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Tesis Doctoral. Université Paris 7.

Artigue, M. (1996). Learning and Teaching Elementary Analysis. En C. Alsina, J.M. Alvarez, M.Niss, Aérez, L.Rico, A.Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematics Education – Selected Lectures, pp. 15-30. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 231-261.

Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level: Questions for contemporary research in education. *Notices of the American Mathematical Society*, 46(11), 1377–1385.

Asiala, M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D. y Thomas K. (1996). A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*. vol. 6. 1-32.

Bachelard , G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: J. Vrin.

Brousseau, G. (1997). *The Theory of Didactic Situations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carlson, D., Johnson C., Lay D. y Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *College Mathematics Journal*, 24.1, 41-46.
Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
Dorier, J.L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, num. 29.2, 175-197.
Dorier, J.L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, 275-276, 141-160.
Dorier, J.L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski M. (2000). The meta lever. En J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, pp. 151-176. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Dorier, J.L. y Sieprinska, A. (2003), Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton et al. (Ed), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.255-274.
Douady, R. (1987). Dialectique outil/objet et jeux de cadres. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, 5-32.
Dreyfus, T. (Ed.) (1995). Special issue on Advanced Mathematical Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29.2.
Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. En R.J. Sternberg y T. Ben-zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*, pp. 253-284. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes num. 25. Washington D.C.: Mathematical Association of America.
Dubinsky, E. y MacDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.275-282.
Dubinsky, E., Mathews, D. y Reynolds, B.E. (1997). *Readings in Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics*. MAA Notes num. 44. Washington D.C.: Mathematical Association of America.
Hillel, J. y Sierpinska, A. (1994). On One Persistent Mistake in Linear Algebra. En J. Pedro da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. III, pp. 65-72. Lisbon : Universidade de Lisboa.
Lebesgue, H. (1956). *La mesure des grandeurs*. Paris: Gauthier Villars.
Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales et l'approche anthropologique. *Repères IREM*, num. 27, 81-125.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis Doctoral, University of Leeds, England.

Poincaré, H. (1904). Les définitions en mathématiques *L'Enseignement des Mathématiques*, num. 6, 255- 283.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics : towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol. 17.1, 26-30.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner dans l'enseignement supérieur. à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18.2, 139-190.

Robert, A. y Speer, N. (2003), Research on the Teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp.283-300.

Rogalski, M. (Ed.) (1998). Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Special issue*, vol. 18.2.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11/2.3, 241-294.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1994). Some Notes on the Enterprise (Research in Collegiate Mathematics Education, That Is). *CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 4, 1-19.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, num. 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6.1, 5-68.

Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 827-876. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stigler, J. y Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: Free Press.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12-2, 151-169.

Michèle Artigue
Université Paris 7,
France
e-mail: artigue@math.jussieu.fr

Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*

Carmen Azcárate Giménez y Matías Camacho Machín

Resumen

En este artículo se hace una breve exposición de las principales características del llamado "pensamiento matemático avanzado", en el cual se enmarcan una gran parte de las investigaciones de didáctica del Análisis Matemático. Se muestran algunas de las aportaciones de la investigación en este campo al desarrollo curricular y se presenta la línea de investigación "Procesos cognitivos del pensamiento matemático avanzado" que se viene desarrollando en varias universidades españolas desde mediados de la década de los noventa.

Abstract

In this paper we shortly explain the main characteristics of the so-called "advanced mathematical thinking" where we insert the research in Mathematical Analysis education. We show some of the contributions in this area to the curriculum development and present the line of research, "Cognitive processes in advanced mathematical research", which have been developed in some Spanish universities since the middle of the nineties.

Introducción

Hablar de la situación actual de la Didáctica del Análisis Matemático implica hacer un poco de historia y explicar el marco general en el que se inserta. En efecto, es en 1985, en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado "Pensamiento Matemático Avanzado" y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall, 1991).

El interés por estos temas se explica por la tendencia en Didáctica de la Matemática, durante la década de los noventa, a considerar la problemática

*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de la DGI, BXX2000-0069 del MCyT.

del aprendizaje de las Matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como simple adquisición de competencias y de habilidades; en esos años se aprecia una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia investigaciones acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades. Además, en esa misma época, se amplía el campo de los problemas investigados, hasta entonces muy centrado en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria (que corresponde al "pensamiento matemático elemental"), a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios. Este desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Análisis Matemático, considerando además los procesos asociados de definición, prueba y demostración, ha venido enriqueciendo los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes.

A lo largo de este artículo se hará una breve exposición de las principales características del pensamiento matemático avanzado, en el cual se enmarcan un amplio número de las investigaciones de didáctica del Análisis Matemático, se mostrarán algunas de las aportaciones de la investigación en este campo al desarrollo curricular y se presentará, finalmente, una línea de investigación que se viene desarrollando en España desde mediados de la década de los noventa.

Procesos del pensamiento matemático avanzado

De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Las investigaciones cognitivas están interesadas en estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico-formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

Aunque no sea posible establecer una distinción clara entre las Matemáticas elementales y las avanzadas, sí se pueden señalar algunos rasgos distintivos, uno de los cuales es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla; los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en particular la representación y la abstracción. Además, el éxito en Matemáticas se puede relacionar con la riqueza y la flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos.

Modelos cognitivos

Vamos a exponer brevemente alguno de los modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, como son los implicados en el Análisis Matemático; estos modelos son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo. Con el propósito de clarificar las ideas y el lenguaje, resulta relevante la distinción que establecen Tall y Vinner (1981) "entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos", es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo.

Se considera, por un lado, la *definición de un concepto* matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones *formales*, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen encontrar escritas en los libros), y las definiciones *personales* que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. Por otro lado, se considera el *esquema conceptual*[1] que tiene una persona de un concepto matemático como la expresión que permite referirnos a "la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos ..." (Tall y Vinner, 1981), donde se entiende imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, numérica, simbólica, ...).

[1]Vamos a utilizar *esquema conceptual* como traducción de la expresión original inglesa *concept image*

Resumiendo, podemos decir que el esquema conceptual es algo no siempre verbal que asociamos mentalmente al nombre del concepto; puede ser una representación visual del concepto pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo. Es evidente que las representaciones visuales, las imágenes mentales, las propiedades, los procedimientos, las sensaciones o las experiencias asociadas al nombre del concepto se pueden traducir a formas verbales pero, tal como señala Vinner (1991), "es importante recordar que dichas formas verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria".

Desde otra perspectiva, una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático superior es que, en su mayoría, los conceptos del pensamiento matemático avanzado pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización del estudiante. Sfard (1991) habla de dos tipos de *concepciones* de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama *operacionales* cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones *estructurales* cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias ("la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de 'comprender'"), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales.

En su análisis del proceso de formación de concepciones, Sfard distingue tres etapas que corresponden a tres grados de estructuralización progresiva y que denomina: interiorización, condensación y cosificación; se consideran las etapas de interiorización y de condensación como procesos graduales y cuantitativos mientras la cosificación se considera un proceso casi instantáneo. La nueva entidad cosificada, el objeto, se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. El estadio de cosificación es el punto en el cual empieza la interiorización de unos conceptos de nivel superior, aquellos que se originan a partir de procesos sobre el objeto en cuestión.

Un enfoque más reciente y todavía en fase de elaboración es el de un grupo de investigadores denominado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) dirigidos por el profesor Ed Dubinsky; su propósito del análisis teórico de un concepto es el de proponer un modelo cognitivo, en este caso una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. El resultado del análisis teórico es lo que se denomina la *descomposición genética del concepto* (Asiala et al., 1996). El análisis se basa principalmente en:

- La comprensión que tienen los investigadores sobre el concepto en cuestión y en sus experiencias como aprendices y profesores del mismo.

- Investigaciones previas sobre el concepto.
- Observaciones de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto estudiado.

Para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas[2], mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

En un artículo muy sugerente, Tall (1995) explica que existen dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas, que empiezan una por la percepción de objetos y la otra con la acción sobre ellos. Explica que la actividad matemática empieza por la percepción de objetos en forma visuo-espacial, seguida de su descripción verbal, su clasificación y el inicio de deducciones verbales. La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama *procepto*[3] El estudio de un gran número de casos, en todos los niveles de las matemáticas pero especialmente en niveles superiores, en que un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo, indujo a Tall a definir el término procepto: "Definimos un procepto como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos."

Por ejemplo:

- La expresión $f(x) = x^2 - 9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".

[2]Esta teoría se conoce en inglés como APOS de *Action, Process, Object , Schema*. En la literatura española se traduce por APOE.

[3]*Procepto* es nuestra traducción de la expresión original inglesa *procept*, que proviene de proceso (*process*) y de concepto (*concept*).

- En cuanto a las expresiones:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\ ;\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

  representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de cálculo específico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural".

Para complementar este panorama teórico de las investigaciones cognitivas acerca del conocimiento matemático superior, podemos citar la teoría de las representaciones semióticas, desarrollada por Duval (1996, 1999). Duval, al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático son diferentes, o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento (por ejemplo en botánica, astronomía, química, historia,...), constata lo siguiente:

- La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. "De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría,...".

- La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa...).

Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.

El papel de las definiciones

Una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es considerar que, en las primeras, los objetos se describen, mientras en las segundas, se definen. Si nos referimos al lenguaje, en ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático sea del mundo externo, y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Hemos visto que adquirir un concepto matemático se puede describir como construir un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones.

Sin embargo, la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa diciendo: "Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos".

Desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso. Sin embargo, lo que ocurre en la práctica, según las investigaciones que se ocupan de esta cuestión, es que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy variadas. Los alumnos tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación.

El problema que se plantea es el de la necesidad de educar progresivamente los hábitos de los estudiantes, sobre todo de los que van a realizar estudios de matemáticas no elementales, de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y, por tanto, de sus esquemas conceptuales. Es evidente, que en el campo de las matemáticas, como por ejemplo el del Análisis Matemático, las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas y, por consiguiente, en la formación de los esquemas conceptuales. De ahí la necesidad de ingeniar situaciones didácticas adecuadas, en las cuales las definiciones sean imprescindibles para una correcta realización de la tarea.

La Didáctica del Análisis Matemático y el desarrollo curricular

El grupo de trabajo del ICME 7 (celebrado en Québec en el año 1992) denominado "Las dificultades de los estudiantes en el Cálculo" contó con un amplio número de participantes de diferentes países con el objetivo de responder a algunas cuestiones agrupadas en tres aspectos principales (Artigue y Ervynck, 1993):

- Objetivos y contenidos: ¿Cuáles son los objetivos de un curso de cálculo? ¿Cuál es su papel en el currículo de Matemáticas? ¿Cuáles son las relaciones entre los aspectos conceptuales y los aspectos técnicos de los contenidos del curso?

- Dificultades de enseñanza y aprendizaje: ¿Cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del Cálculo? ¿Cuáles son las dificultades específicas de algunos aspectos? ¿Cuáles son las razones de tales dificultades?

- Concepciones del Cálculo y su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias: ¿Qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza? ¿Cuáles han sido los resultados? ¿Están de acuerdo los resultados obtenidos con los resultados esperados? ¿Es posible explicar las divergencias entre los resultados esperados y los conseguidos?

Muchas de estas preguntas han quedado abiertas y constituyen las preguntas más generales de investigación. Distintos autores en este campo han venido señalando un conjunto de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático; se consideran como dificultades esenciales el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de derivada e integral; se indican además otro tipo de dificultades que tienen que ver con el estudio de las funciones, la notación de Leibniz, el concepto de infinito, el uso y selección de las distintas representaciones, etc.

En muchas reformas curriculares, las calculadoras gráficas y simbólicas y los Programas de Cálculo Simbólico (PCS)[4] juegan un papel importante. En USA se desarrolla desde 1986 el proyecto C^{2}PC (Calculator and Computer

[4]Hemos optado en este trabajo por considerar los PCS en el mismo sentido que en la literatura anglosajona se utilizan las siglas CAS (*Computer Álgebra Systems*)

Pre-Calculus Project) cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículo de matemáticas para la secundaria, analizando para ello las destrezas necesarias para la comprensión del concepto de función, gráficas de funciones y geometría analítica. Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, atendiendo a las conexiones existentes entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para la cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad.

Las modificaciones que se han incorporado a los currículos de algunos países han sido dirigidas principalmente hacia una introducción del Análisis Matemático más intuitiva y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías. Por ejemplo, el movimiento para la reforma del cálculo que se desarrolló en USA tuvo su influencia en los Estándares Curriculares de los años 90 y han dado lugar a un gran número de materiales curriculares, en los que las nuevas tecnologías juegan un importante papel. Los materiales británicos del SMP 16-19, representan también un buen ejemplo de esto. En Francia, Artigue (1997) ha hecho un estudio exhaustivo de la evolución de los programas de Análisis Matemático, en los cuales se reduce sustancialmente la formalización y se organiza la actividad matemática en torno a la resolución de problemas de optimización, aproximaciones de números y funciones, modelización de variaciones discretas y continuas. El orden matemático (límites-continuidad-derivada) ha sido substituido por una aproximación intuitiva al lenguaje de los límites con el objetivo de que sirva de sustento al concepto de derivada que constituye la noción esencial del Cálculo.

En el currículo de Bachillerato de España también se aprecian modificaciones dirigidas al uso de las calculadoras. El DCB señalaba en su introducción que "con el fin de que el énfasis se ponga en los aspectos intuitivos y gráficos de estas ideas, e instrumentos para el análisis, sería conveniente el trabajo con las calculadoras y los ordenadores cuando se quiera minimizar los efectos no deseados de la falta de madurez en el cálculo algebraico (que habría que diagnosticar y tratar a parte en casos de alumnos y alumnas concretos)". Ahora bien, con una herramienta como ésta, es necesario analizar el currículo de Secundaria desde otra perspectiva: las situaciones y problemas de matemáticas no se pueden plantear de la misma manera que se hacía en la enseñanza tradicional, dado que en estas calculadoras los aspectos exclusivamente instrumentales propios de las matemáticas (en exceso muchas veces), no tendrán sentido si no se orientan de una forma adecuada. Habrá, por tanto, que establecer modificaciones en el currículo, y como consecuencia desarrollar investigaciones dirigidas a articular los conocimientos de los alumnos en torno a este nuevo instrumento.

Una experiencia española de investigación en Didáctica del Análisis Matemático

Cuando se estaba consolidando la reforma de las enseñanzas medias y la implantación de la Enseñanza Obligatoria hasta los 16 años, parecía muy importante investigar qué pasa en la asignatura de Matemáticas, donde el nivel matemático de una gran mayoría de alumnos no es bueno, según detectan los profesores de los primeros cursos universitarios, y donde los profesores asisten con cierta impasibilidad al "enigma de que unos pocos tienen éxito con muy poco esfuerzo, mientras otros parecen condenados al fracaso" (Gray y Tall, 1994). En ese marco, vamos a referirnos al proyecto de investigación que sobre Pensamiento Matemático Avanzado, nació en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (Azcárate y otros, 1996), y se amplió después a las Universidades de Salamanca (Modesto Sierra), La Laguna (Matías Camacho), Valladolid (Tomás Ortega) y Lleida (Mar Moreno); se trata de una línea de investigación cuyo objetivo es profundizar en el estudio de diferentes aspectos como son:

- Los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, procesos todos ellos que tienen una componente psicológica.
- El estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis, lo cual implica investigar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar a través del análisis de los currículos oficiales y de los libros de texto.
- El papel que juegan los PCS y las calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos importantes del Análisis Matemático Este proyecto garantiza una evaluación y un control del uso de estas herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje.

En estas investigaciones se distinguen los fenómenos de enseñanza, cuyo sujeto de estudio es el profesor y los fenómenos de aprendizaje, cuyos sujetos de estudio son los estudiantes. Los métodos de recogida de datos son fundamentalmente de tipo cualitativo. Así, para las investigaciones sobre aprendizaje se utilizan sobre todo: trabajos realizados por los alumnos (cuadernos de clase, exámenes, ...), cuestionarios semi-abiertos, entrevistas semi-abiertas grabadas en magnetófono. Para las investigaciones sobre enseñanza: diarios personales de los investigadores, entrevistas semi-abiertas investigador-profesor grabadas en magnetófono, cuestionarios semi-abiertos, mapas conceptuales elaborados por los profesores, clases grabadas en video. En las investigaciones de tipo histórico se utilizan: libros de texto; libros de autores clásicos de análisis matemático (Cauchy, Euler, Lagrange,...); materiales didácticos. En las investigaciones sobre el papel de las nuevas tecnologías se analizan los programas informáticos utilizados.

El análisis de datos es fundamentalmente de tipo cualitativo. La información se analiza y se codifica de acuerdo con códigos y categorías consensuadas entre los participantes, con la validación de investigadores externos; es frecuente organizar los diferentes puntos de vista en torno a dilemas a partir de los cuales se estructuran los datos. Para las comparaciones múltiples entre las categorías se organizan tablas u otros sistemas de comparación cualitativos. La validez de los resultados se intenta asegurar mediante multiplicidad de fuentes de datos y de investigadores que participan en la discusión de las conclusiones. El análisis de los libros históricos y de texto se llevan a cabo atendiendo a tres componentes: análisis de contenido, didáctico-cognitivo y fenomenológico.

En cuanto al estado actual del trabajo realizado, se pueden distinguir las distintas facetas:

a) Aspectos cognitivos del aprendizaje del análisis:

En la Universidad Autónoma de Barcelona y bajo la dirección de Carmen Azcárate, se han llevado a cabo varias investigaciones acerca de problemas de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite (Espinoza, 1998; Delgado, 1998; Espinoza y Azcárate, 2000); del concepto de integral (Calvo, 2001); del concepto de infinito (Garbín, 1998; Garbín y Azcárate, 2000; 2001, 2002); del concepto de ecuación diferencial (Moreno y Azcárate, 1997; Moreno, 2000; Moreno y Azcárate, 2003); de los conceptos de pendiente de una recta y la variación instantánea y derivada de una función (Badillo, 2003); del concepto de cuantificador (Ramírez, 2000). En la Universidad de Salamanca, Modesto Sierra ha llevado a cabo una investigación acerca de las concepciones de los alumnos de Bachillerato y C.O.U. sobre el límite funcional y la continuidad (Sierra, González y López, 2000). En la Universidad de Valladolid, Tomás Ortega ha dirigido una investigación acerca del concepto de límite en alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales (Blázquez, 2000).

Estas investigaciones han obtenido ricas informaciones acerca de los procesos característicos del pensamiento matemático avanzado involucrados en dichos conceptos (abstracción, formalización, representación, definición, demostración, . . .); sobre ciertos aspectos del desarrollo cognitivo como son esquemas conceptuales y obstáculos cognitivos, en relación con el aprendizaje de los estudiantes; y sobre el conocimiento del profesor, como es el estudio de las organizaciones matemáticas y didácticas, el estudio del conocimiento matemático y didáctico o las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas universitarios sobre las ecuaciones diferenciales y la modelización de situaciones de carácter científico-técnicas.

b) Estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos:

En la Universidad de Salamanca, Modesto Sierra ha dirigido investigaciones sobre la evolución histórica de los conceptos de límite funcional y continuidad en los libros de texto de Bachillerato y C.O.U. (Sierra, González y López, 1999) y sobre sistemas de representación simbólicos en la enseñanza del Análisis (González, 2002). En la Universidad Autónoma de Barcelona, Jordi Deulofeu ha dirigido una investigación acerca de la evolución histórica de los sistemas de representación de los números reales (Miralles, 1998) y su influencia epistemológica, y otra sobre la historia de los métodos de máximos y mínimos de Fermat.

c) El papel de los PCS en la enseñanza y aprendizaje de conceptos básicos del Análisis Matemático:

En la Universidad de La Laguna, se está llevando a cabo una investigación acerca de las potencialidades y dificultades de implementación del software DERIVE en los primeros cursos universitarios, mediante la que se analiza de una parte, las actitudes de los estudiantes hacia el uso del Programa de Cálculo Simbólico DERIVE, y de otra, la influencia del uso del dicho software en la concepción de integral definida que adquieren los estudiantes y su relación con el concepto de área bajo una curva (Camacho y Depool, 2001, 2002). También se ha realizado otra investigación acerca de las dificultades, obstáculos y errores que aparecen en los estudiantes cuando se desarrolla una enseñanza habitual del concepto de integral impropia en el primer curso de la Licenciatura de Matemáticas. Se trata de elaborar una ingeniería didáctica para la enseñanza de la integral impropia que promueva el uso de los sistemas de representación algebraico y gráfico utilizando el Programa de Cálculo Simbólico MAPLE como uno de los recursos didácticos (González-Martín, 2002; González-Martín y Camacho, 2003). También se comienza a desarrollar un estudio acerca de la enseñanza y aprendizaje de las aplicaciones de la derivada utilizando calculadoras simbólicas en Ingeniería y Formación inicial de profesores.

Además, los miembros del grupo Pensamiento Matemático Avanzado constituyen el grueso del grupo de investigación “Didáctica del Análisis Matemático” de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) que se constituyó en 1996, en cuyos simposios anuales se presentan y discuten los trabajos individuales de los investigadores del grupo, se comparten las noticias bibliográficas y se discuten artículos e investigaciones de actualidad en este campo de conocimiento.

En este mismo marco del grupo de investigación “Didáctica del Análisis Matemático” de la SEIEM, se pueden destacar otras líneas de trabajo consolidadas: en la Universidad de Jaén (Ángel Contreras), en las Universidades de Sevilla y Alicante (Salvador Llinares), en la Universidad de Barcelona (Vicenç Font).

Referencias

Artigue, M. (1997). La integración de calculadoras gráficas y formales en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. *Actas del RELME 11.*
Artigue, M.; Ervynck, G. (eds.)(1993). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME 7*, QuÉbec, Canada.
Asiala, M y otros (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 16, No 4, pp. 399-343.
Azcárate, C.; Casadevall, M.; Casellas, E.; Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.
Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.
Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Camacho, M. y Depool, R. (2001). "Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un software para el aprendizaje de las Matemáticas". *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, Vol. III, pp. 27-42.
Camacho, M. y Depool, R. (2002). Students' attitudes towards mathematics and computers when using derive in the learning of calculus concepts. *The International Journal of Computer Algebra in Maths. Education*, Vol 9, 4, pp. 259-283.
Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.
Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.
Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6, 3, pp. 349-382.
Duval, R. (1999b). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME 23*, pp. 3-26.
Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función".* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Espinoza, L. y Azcárate, C (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas

en torno al objeto "límite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18.3, 355-368.
Garbin, S. (1999). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Garbin, S. y Azcárate, C. (2000). Estudio sobre esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el infinito actual expresado en diferentes lenguajes matemáticos. *Educación Matemática*, 12. 3, 5-18.
Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual: una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 38, 53-67.
Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20.1, 87-113.
González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.
González-Martín, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia* (Tesina), Universidad de La Laguna
González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2003). What is students' actual understanding about improper integration?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (aceptado para su publicación).
Gray, E. M. y Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, No 2, pp. 115-141.
Miralles, J. (2000). *Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Moreno, M. y Azcárate, C. (1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de Química y Biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 21-34 Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de Matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21.2, pp. 265-280. Ramírez, J. L. (1999). *Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemáticas y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Barcelona.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies*

in Mathematics, Vol. 22, pp. 1-36.
Sierra, M., González, M. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, vol 17, 3, pp. 463-476.
Sierra, M., González, M. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y COU sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)* .Vol 3, 1.
Tall, D. (Ed) (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer.
Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Proceedings of PME 19*, Recife (Brasil).
Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop, A. J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325. Netherlands: Kluwer.
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, No 12, pp, 151-169.
Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En TALL, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

Carmen Azcárate Giménez.
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales
Universidad Autónoma de Barcelona, España

Matías Camacho Machín
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna, España

Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones

Martín M. Socas Robayna y Matías Camacho Machín

Resumen

En este artículo se desarrolla una reflexión sobre la naturaleza de las Matemáticas y se analizan algunas de las influencias que las diferentes concepciones de las matemáticas han tenido en las propuestas curriculares para Matemáticas en la Educación Secundaria que se han estado implementando en España durante los últimos años. Se incluyen además algunas implicaciones para la formación de profesores en el marco de tales reformas.

Abstract

In this paper we reflect on the relationship between the nature of mathematics and the conceptions of the discipline that permeate curriculum proposals. In particular, we focus our discussion on recent reforms at secondary level that have been implemented in Spain. In addition, we analyse curriculum implications around teachers education that emerge under the vision of those reforms.

Introducción

Tomar en consideración la enseñanza de las matemáticas en una Etapa Educativa es hablar de las Matemáticas como parte importante de la tarea docente. Conocer y dominar las Matemáticas es una condición necesaria, para enseñarlas de forma adecuada, es decir, el conocimiento matemático debe constituir el punto de partida básico para empezar a hablar de los aspectos educativos. Muchas de las determinaciones didácticas que se adopten estarán condicionadas por las características de dicho conocimiento, el cual llega a imprimir al proceso educativo una serie de presupuestos peculiares y diferenciados de los que corresponden a otras disciplinas.

La Matemática constituye, no obstante, una disciplina multiforme, que tiene un uso plural, que se ha manifestado en la enseñanza, como señala Romberg (1991), con rasgos diferentes, dependiendo de las épocas y de los autores. Es, en general, considerada de formas diversas: conjunto de técnicas para aprobar un examen, cuerpo de conocimientos para ser aprendido, lenguaje específico con una notación particular, estudio de las estructuras lógicas subyacentes, juego artificial jugado por un matemático, construcción de modelos útiles en la ciencia, procedimientos de cálculo necesarios para aplicar el conocimiento... Lo importante no son los distintos aspectos de la Matemática en los que se puede o no incidir, sino el conocimiento de los elementos principales que conforman esta disciplina y hacer recaer la actividad matemática en el desarrollo de estos elementos principales.

Ahora bien, la racionalidad de la Matemática no la podemos supeditar a la consistencia lógica de sus resultados expresados en un lenguaje formalizado. Su racionalidad es inseparable de la actividad matemática, de la conjetura, del ensayo, del error, de la construcción de lenguajes, de resultados susceptibles de completarse y mejorarse,...La Matemática como empresa humana y racional se mueve entre dos posiciones, por un lado, su naturaleza histórica que nos muestra la potencialidad de la creación humana, y por otra, los objetos matemáticos, los elementos de esa cultura que llamamos culturización matemática, que nos permite hablar de descubrimiento. Vemos cómo el lenguaje como elemento mediador en la cultura matemática nos va a permitir hablar a la vez de creación y descubrimiento.

Los problemas relativos a la Filosofía de la Matemática pueden ser abordados, en la actualidad, desde las dos grandes posiciones que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático durante las distintas épocas: la prescriptiva (o normativa) y la descriptiva (o naturalista), la primera procede de una posición absolutista de la Matemática y la segunda, analiza el conocimiento matemático desde la práctica matemática y sus aspectos sociales. La relación entre la enseñanza de las Matemáticas y estos dos grandes enfoques en la Filosofía de la Matemática es una cuestión evidente (Ernest, 1994). Esta relación puede ser vista desde dos aspectos importantes. El primero tiene que ver con el currículo que se desarrolla y el segundo se relaciona con las personas que imparten la materia, esto es, los profesores de matemáticas.

Trataremos de responder en este artículo a algunos interrogantes relacionados con los aspectos anteriores como pueden ser: ¿cuáles son los elementos principales de la disciplina matemática? ¿Qué influencia han tenido en los currículos de matemáticas de las diferentes reformas educativas? ¿de que manera debemos actuar en la formación de profesor para desarrollar en ellos los aspectos necesarios para interpretar coherentemente el currículo oficial de matemáticas para la Educación Secundaria?

Se reflexionará en este trabajo sobre la naturaleza de las Matemáticas y se analizarán sus implicaciones en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria tomando en consideración las diferentes reformas educativas que han tenido lugar en nuestro país en los últimos treinta años: Ley General de Educación (LGE, 1970), Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990) y Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE, 2002). Finalmente se expondrán perspectivas de formación del profesorado de matemáticas de Secundaria en relación con los diferentes currículos de matemáticas que se han generado a partir de las reformas educativas.

Naturaleza del conocimiento matemático

Al pensar en los objetos de la Matemática, podemos situarnos en dos polos opuestos: considerar el lenguaje en un nivel secundario en relación con los objetos o pensar que la objetividad de la Matemática está inseparablemente unida a su formulación lingüística: “la Matemática no es más que un juego del lenguaje formal”. Entre esta dos posiciones sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente, parece razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974), no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestra construcciones.

Las diferentes escuelas que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático durante las distintas épocas se pueden organizar, según Ernest (1994), en dos grandes grupos que responden a las concepciones que poseen sobre la Matemática: prescriptiva (o normativa) y descriptiva (o naturalista).

En la concepción prescriptiva de las Matemáticas, se consideran en primer lugar la tradición absolutista (formalismo y logicismo) y el platonismo como corriente filosófica. En la posición absolutista el conocimiento matemático está constituido por verdades absolutas y representa el único sustento del conocimiento verdadero, independientemente de la lógica y de las afirmaciones que pueden ser ciertas en virtud del significado de sus términos. El conocimiento matemático es absolutamente fijo y objetivo, la piedra angular de todo el conocimiento humano y de la racionalidad.

En la concepción descriptiva de las Matemáticas surge un renovado interés por ampliar las competencias de la Filosofía de las Matemáticas con el objetivo de contemplar un aspecto importante del conocimiento matemático: la práctica matemática y sus aspectos sociales. Aparecen de esta forma corrientes como el cuasi-empirismo de Lakatos, el constructivismo matemático y, dentro de éste, el intuicionismo, así como el convencionalismo y el constructivismo social.

Dos concepciones ontológicas

Las acciones de descubrir e inventar nos lleva en la actividad matemática a dos concepciones ontológicas diferentes. La primera, supone aceptar que los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos tienen un carácter objetivo, la segunda, por el contrario, dota de subjetividad a estos objetos y sus relaciones. Concepciones que se referencian bajo los nombres de platonismo y constructivismo, respectivamente.

Para Platón los objetos matemáticos no están en continuidad con los objetos sensibles, su existencia es independiente de ellos. Tampoco son producto del pensamiento humano. Los objetos matemáticos pertenecen a un tercer mundo de naturaleza diferente a los dos anteriores, Popper (1974).

Hacer matemáticas en esta concepción filosófica, consiste en el proceso de descubrimiento de sus relaciones preexistentes. El trabajo del matemático platónico es un trabajo empirista, dado que no inventa sino que descubre los conceptos matemáticos. Utiliza para ello fundamentalmente la percepción y la intuición matemática.

El formalismo y el intuicionismo comparten el carácter exacto, independiente de toda experiencia, de las leyes matemáticas. Es el papel que los formalistas otorgan a la lógica y al lenguaje en la actividad matemática y en la fundamentación de los resultados lo que provoca la separación entre las dos escuelas. El formalismo mantiene una posición absolutista mientras el intuicionismo mantiene una posición relativista en relación con el conocimiento matemático.

En la segunda mitad del siglo XX el desarrollo de la postura intuicionista ha consistido en la formalización de las ideas sobre la construcción de la Matemática explicitada por Brouwer. El intuicionismo mantiene en la actualidad su presencia a partir de propuestas constructivistas que han surgido de él.

Observamos, en la primera mitad del siglo XX que los intentos de reducir la actividad matemática a justificaciones lógicas expresadas en teoría de conjuntos e ignorando otros modos de expresión y otras formas de razonamiento, no han producido los resultados esperados.

Como señala Tymozcko (1986), una vez abandonada la búsqueda de fundamentos para las matemáticas,

> *"la filosofía de las matemáticas puede comenzarse de nuevo examinando las practicas reales de los matemáticos y de los que usan las matemáticas". O como señala más adelante: "Si contemplamos la matemática sin prejuicios, aparecen muchos hechos relevantes que los fundamentalistas ignoraron: demostraciones informales, desarrollo histórico, la posibilidad del error matemático, comunicación entre matemáticos, el uso de ordenadores en la matemática y muchos más ..."*

Ernest (1989, 1991), establece lo que él denomina "una reconceptualización de la Filosofía de las Matemáticas" en el sentido de que tal filosofía no tratará exclusivamente de justificar el conocimiento matemático mediante un programa fundacionista, puesto que las Matemáticas poseen múltiples aspectos que pueden ser definidos en término de sus conceptos, características, historia y práctica, además de por su conocimiento proposicional. Según esto, la Filosofía de las Matemáticas tratará de analizar cuestiones como las siguientes:

> *"¿Cuál es el propósito de las Matemáticas? ¿Qué papel posee el ser humano dentro de las Matemáticas? ¿Cómo el conocimiento subjetivo del individuo llega a ser el conocimiento objetivo de las Matemáticas? ¿Cómo se refleja la Historia en la Filosofía de las Matemáticas? ¿Cuál es la relación de las Matemáticas con las otras áreas de experiencia y el conocimiento humano? ¿Por qué las teorías probadas por la Matemática pura llegan a ser tan potentes y útiles en sus aplicaciones a la ciencia y a los problemas prácticos (Ernest, 1991)"*

El análisis de todos estos factores, permitirá considerar, además de los problemas internos de las Matemáticas -ontológicos y epistemológicos- exclusivamente tratados por el absolutismo, los aspectos externos, como su historia, la génesis, su práctica, etc.

Aparecen en la segunda mitad del siglo XX, nuevas corrientes acerca de la naturaleza de las Matemáticas que recuperan las posiciones no absolutistas de la primera mitad del siglo. Dentro de estas corrientes que contemplan las Matemáticas desde una perspectiva descriptiva o naturalista, se sitúan una serie de tendencias más modernas que surgen desde una visión falibilista de las Matemáticas y que contemplan las necesidades e implicaciones sociales de las matemáticas así como aspectos de su enseñanza-aprendizaje. Examinan críticamente la estructura del conocimiento adquirido por el ser humano inmerso en la sociedad. Estas son: el empirismo, el cuasi-empirismo, el convencionalismo y el naturalismo.

El empirismo tiene sus raíces en diferentes autores del los siglos XVII y XVIII, Locke, Berkeley y Hume. Con la intención de combatir las ideas innatas, analizan el origen del conocimiento humano. La idea central es conceder una preponderancia absoluta a la experiencia sobre las demás fuentes del conocimiento humano, es decir, acentúa la exclusiva validez de la experiencia como fuente del conocimiento. La universalidad y necesidad de nuestro conocimiento intelectual es explicada por la acción de las cosas externas sobre nuestras facultades cognoscitivas.

Representa la opción más extrema de la consideración descriptiva de las Matemáticas. Esta corriente filosófica admite una visión de la naturaleza de las Matemáticas que descansa sobre la consideración de que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas. Así, los conceptos matemáticos tienen orígenes empíricos y las verdades matemáticas se derivan de las observaciones del mundo físico. Sus justificaciones provienen también de estas observaciones.

El cuasi-empirismo es una corriente, relativamente reciente, surge de la enérgica oposición de su fundador -Imre Lakatos- al Logicismo y Formalismo.

Como señala Viviente (1990): “El cuasi-empirismo pretende colmar el vacío existente entre la concepción que tiene el filósofo de la Matemática y la de las Ciencias Naturales, aproximando la primera a las segundas, al razonar que el conocimiento de la Matemática no es ni a priori, infalible”.

Esta corriente filosófica incluye la dimensión histórica de las Matemáticas, a partir de la cual se puede mostrar por qué se desarrollaron los conceptos y resultados particulares de las Matemáticas, tomando como base los problemas concretos así como las dificultades históricas para su resolución (Lakatos, 1978, 1981).

Tiene más importancia para esta corriente filosófica la Matemática informal y práctica que la formal o acabada, y considera que la dialéctica conjetura-refutación, así como el uso constante de contraejemplos, constituyen la clave para la elaboración de teorías matemáticas informales.

Davis y Hersh (1988) aportan al cuasi-empirismo de Lakatos la naturaleza cultural de las Matemáticas, tanto a los aspectos internos como a los externos de la misma. Mientras Lakatos se centra en la historia del desarrollo de la propia Matemática (aspectos internos), estos autores muestran cómo las Matemáticas penetran y desarrollan todos los aspectos de la vida social y cultural.

El convencionalismo tiene como principal representante a Wittgenstein (1978, op. cit. en Ernest 1991), quién ofrece una importante visión social de las Matemáticas y considera que el conocimiento matemático y la verdad están basados en convenios lingüísticos; en particular, que las afirmaciones de la lógica y las Matemáticas son analíticas, verdaderas en virtud del significado de los términos que utilizan. Su contribución clave estriba en reconocer las bases sociales y subjetivas de la certidumbre, dado que seguir una regla matemática o lógica no supone una obligación. En cambio sus bases se establecen en torno a tomar decisiones tácitas o conscientes que acepten las reglas del “juego del lenguaje” que se encuentran situadas en las formas de vida preexistentes.

Consideremos, finalmente, diferentes aspectos de una corriente filosófica que se encuentra aún en estado de gestación, y que se sitúa en el marco de la consideración descriptiva de las Matemática: el naturalismo, que sitúa el análisis de la naturaleza del conocimiento matemático no en los sistemas formales, sino en la actividad humana, capaz de hacer frente a situaciones nuevas y de generar procedimientos y conceptos que permitan el avance.

Un estudio del desarrollo de la Matemática siguiendo las pautas del modelo evolutivo lo encontramos en Wilder (1981). La Matemática se concibe como una construcción humana enraizada en las culturas diversas, que se ha desarrollado en ellas un sistema según el modelo antropológico de un sistema cultural. Nos ofrece una visión de la Matemática como sistema cultural en el que la relevancia de la historia y de la actividad matemática está hecha desde una epistemología empirista y desde una concepción pragmática.

Una visión de la Matemática desde una perspectiva realista y ecologista la encontramos en Kitcher (1984). Las Matemáticas aparecen como algo complejo no abordable desde los entramados formales de conceptos y sistemas de teorías; muestra en la actividad matemática el carácter racional de los cambios en el desarrollo histórico de las Matemáticas. Caracteriza la actividad matemática en términos de: responder a cuestiones, generar cuestiones, generalizar, imponer rigor y sistematizar. La práctica matemática aparece, igualmente, caracterizada por una secuencia de cinco elementos: lenguaje (L), proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo determinado (M), formas de razonamiento no cuestionadas (R), cuestiones consideradas importantes (Q), conjunto de puntos de vista metamatemáticos (S). Kitcher mantiene una posición empirista y subjetivista de los objetos matemáticos y explica el avance del conocimiento matemático como una forma de conocimiento socialmente condicionada.

Una posición integradora la constituye el constructivismo social, que es una postura filosófica sobre las Matemáticas concebida con el fin de aglutinar las características esenciales de las corrientes filosóficas “sociales” a las que nos hemos referido anteriormente y pretende servir como base para la conceptualización de una filosofía de la Educación Matemática (Ernest, 1989, 1991).

Al igual que para el cuasi-empirismo, su objetivo central está en la génesis del conocimiento matemático más que en su justificación. Para esta corriente filosófica, el individuo y el conocimiento de la disciplina son mutuamente interdependientes y se van construyendo mediante la interacción personal entre ambos, mediatizados por los textos y otras representaciones lingüísticas, simbólicas e icónicas.

Desde el punto de vista del constructivismo social, el desarrollo del nuevo conocimiento matemático y la comprensión subjetiva de las matemáticas se derivan del diálogo y las negociaciones interpersonales, esto es, hacer y aprender matemáticas deben surgir a partir de procesos similares. Además, la adquisición del conocimiento matemático, tiene como uno de sus fundamentos el conocimiento tácito y lingüístico de las Matemáticas que poseen los miembros de una comunidad cultural.

Para esta propuesta de filosofía de las Matemáticas, los conocimientos subjetivos (la creación personal del individuo) y el conocimiento objetivo (cultura matemática), se encuentran formando un ciclo en el que cada uno contribuye a la renovación del otro.

A modo de resumen, de estas breves referencias sobre la filosofía de las matemáticas, podemos señalar que los aspectos de racionalidad matemática que subyacen en la actividad matemática de las dos grandes perspectivas adoptadas: la absolutista y la relativista, se pueden distinguir: la primera, porque concibe la racionalidad matemática como una propiedad de los sistemas formales, y la segunda, porque la entiende como una propiedad de la empresa humana, y abre el horizonte de una racionalidad fuera de los ámbitos de la lógica formal y sustentada en la actividad de los matemáticos, en la historia y en el contexto socio-cultural.

Podemos decir que en el último cuarto del siglo XX, se ha desplazado el centro de interés desde las teorías matemáticas como productos acabados hacia la actividad matemática entendida como una práctica social en un doble sentido: por un lado, en cuanto es aprendida de otras personas, y por otro, porque está formada por reglas que se siguen habitualmente (Wittgenstein, 1987; Lakatos, 1978 y 1981; Davis y Hersh 1988; Ernest, 1991, 1994 y 1998). En todos ellos se pueden extraer tres aspectos esenciales de la Matemática que deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza/aprendizaje de la misma:

La Matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido. Esta organización lógica de los conceptos, propiedades, teoremas,..., explica un gran número de dificultades y obstáculos en el aprendizaje.

La Matemática es una actividad de resolución de problemas socialmente compartida. Problemas que pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. La respuesta a estos dos tipos de problemas explican la evolución y desarrollo progresivo de los objetos matemáticos (conceptos, teorías,...). La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que ocasiona dificultades en el aprendizaje de la Matemática.

La Matemática es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje.

Los currículos de matemáticas en las diferentes reformas educativas

El Sistema Educativo español se ha caracterizado en los últimos treinta años por sucesivas reformas y cambios que se enmarcan dentro de diferentes leyes, especialmente: LGE, LOGSE y LOCE.

En todas las reformas la Matemática aparece como una referencia obligada en el estudio y determinación de las finalidades de la educación en una etapa educativa. Ahora bien su carácter histórico y su consideración como un sistema de prácticas y de realizaciones conceptuales ligadas a un contexto social e histórico concreto, son los elementos indispensables para este estudio y determinación de las finalidades de la educación matemática. La enseñanza de las matemáticas forma en consecuencia parte del sistema educativo obligatorio de cualquier país, que es el encargado de transmitir la herencia cultural básica de cada sociedad. Al ser la Matemática una disciplina del currículo, éste no puede ser ajeno o contrapuesto a los valores de esa cultura y sociedad.

A partir de las filosofías prescriptivas sobre la matemática surgen consecuencias didácticas importantes que se reflejan en desarrollos de los currículos de algunos países. Como hemos visto, en todos estos casos, las matemáticas descansan en ciertos fundamentos -como, por ejemplo la lógica- y ascienden desde la abstracción a la generalidad. Para estas escuelas de pensamiento, la historia está separada del conocimiento matemático y de su justificación; el conocimiento matemático es un conocimiento puro y aislado que pasa a considerarse útil debido a su validez universal.

Un currículo de Matemáticas presidido por esta interpretación (por ejemplo el Curriculum Nacional Británico) será un currículo establecido mediante jerarquías que sirven para clasificar a los alumnos en clases sociales, razas, etc.

Las filosofías absolutistas justifican un tipo de enseñanza basada exclusivamente en la transmisión de los conocimientos, considerando como básica la metáfora de la comunicación del conocimiento. Si las Matemáticas existen previamente en la mente humana, entonces el acto de enseñanza consistirá en una transmisión efectiva de los conocimientos matemáticos. Desde esta visión, el énfasis se pone en los contenidos y las dificultades que impiden un aprendizaje óptimo de los alumnos surgen de una pobre comprensión, por parte de éstos, de los conocimientos que se le transmiten o por las exposiciones poco claras de los profesores. La evaluación del aprendizaje consistirá en que el profesor compruebe que el alumno es capaz de repetir sus explicaciones.

Moreno y Waldegg (1992), señalan con respecto a las escuelas absolutista y platonista que:

> *"Bajo esta concepción, la matemática puede ser vista como un 'objeto de enseñanza': el matemático la 'descubre' en una realidad externa a él, una vez descubierto un resultado matemático es necesario 'justificarlo' dentro de una estructura formal y queda listo para ser enseñado [...] la tarea del profesor consiste en 'inyectar' el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado. El estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura del discurso, su tarea consiste en decodificarlo. La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos, generalmente apoyada en preceptos universales -como paso de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, del análisis a la síntesis- y poniendo especial énfasis en el contexto de la justificación, como estado superior del conocimiento".*

Estos autores identifican quizás, exageradamente, que la tónica general de la enseñanza de las matemáticas a lo largo del pasado siglo ha venido influenciada por las escuelas absolutistas de pensamiento.

Análogamente, de las filosofías descriptivas de la matemática derivan consecuencias didácticas. De esta manera, de la corriente intuicionista, podemos observar las consecuencias didácticas siguientes: el énfasis sobre la exploración y resolución de problemas, la discusión de las tareas matemáticas, el desarrollo de investigaciones en las aulas, el respeto por las creaciones realizadas por los alumnos. Ernest (1991), señala algunos aspectos negativos tales como la excesiva protección de los alumnos así como la carencia de utilizar problemas relacionados con la vida real y extraídos del entorno social donde se desenvuelve el alumno. Pese a que los intuicionistas consideren que el alumno debe construir activamente sus significados, basándose en procesos constructivo y de conjetura, se sigue considerando que existe un cuerpo correcto de conocimientos matemáticos que surgen de la construcción. El papel del profesor es el de "facilitador" de la adquisición de los conocimientos y de "corrector" de las malas realizaciones de los alumnos.

Para el convencionalismo el interés didáctico reside en mostrar que la certeza y la necesidad de las Matemáticas son el resultado de un proceso de desarrollo social y que todo conocimiento, incluso sobre la educación, presupone la adquisición significativa de un lenguaje ya existente en los contextos sociales y sus interacciones.

El punto de vista didáctico, en el cuasi-empirismo muestra la actividad matemática como universal, multicultural e imposible de ser separada completamente del contexto social, transcendiendo de las dicotomías pura-aplicada y académica-popular. Es obvia la relevancia que tienen estas características para la educación matemática y todas estas clases de manifestaciones y usos de las matemáticas sobre las formas sociales. Igualmente al acercar la dimensión histórica de las matemáticas muestra cómo la metodología de trabajo sobre la propia matemática no difiere de la dimensión heurística del trabajo en resolución de problemas, que se debe trabajar habitualmente en la clase (Ernest, 1994).

Por último, Ernest (1989, 1991), desarrolla su "Filosofía de la Educación Matemática" utilizando como fundamento teórico el constructivismo social, y establece un modelo de ideología educativa para las Matemáticas que incluye como elementos primarios: la epistemología, la filosofía de las Matemáticas, las metas educativas, etc., y como elementos secundarios: teorías del conocimiento de la matemática escolar, evaluación del aprendizaje, etc., y elabora -de acuerdo con este modelo- un conjunto de características que determinan la actuación de cinco grupos sociales en base a este marco de ideología educativa, a los que pertenecen los profesores: preparador industrial, viejo humanista, educador progresista, pragmático tecnológico y educador público. Es este último el que representa la ideología que refleja los planteamientos de su constructivismo social.

Los planteamientos didácticos que surgen desde el constructivismo social como concepción filosófica de las Matemáticas deben tener en cuenta, según Ernest (1994): El contexto social y cultural dentro del que aparecen las Matemáticas (relaciones interpersonales, instituciones sociales y relaciones de poder); los procesos sociales que aparecen en la determinación, construcción y negociación de los conceptos matemáticos, métodos, simbolismos, argumentos y resultados; el contexto histórico cultural de las Matemáticas; la bases lingüísticas del conocimiento matemático, en particular el simbolismo; los valores, propósitos y metas que subyacen en los procesos de educación matemática; la dependencia de las Matemáticas de la construcción subjetiva del conocimiento requiere introducirse en un mundo matemático imaginado por medio de práctica de comunicación social de los alumnos y, por último, que las Matemáticas y el conocimiento matemático son prácticas que no están separadas de otras prácticas sociales tanto intraescolares como extraescolares.

Para llevar a cabo la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el constructivismo social considera como importante:

- Respetar tanto los conocimientos previos de los alumnos como los significados que adquieren.

- Construir el conocimiento a partir de los métodos que utilizan los alumnos, mediante una negociación.

- Considerar la inseparabilidad de las Matemáticas con sus aplicaciones y la importancia de la motivación y la relevancia.

El constructivismo social se muestra como una concepción integradora donde los currículos actuales son susceptibles de interpretación. De esta forma, el contexto social donde se desarrollará la enseñanza (aulas, alumnos, profesor, etc.), el marco que rodea el desarrollo de las actividades de aprendizaje y el tratamiento lingüístico de las actividades y tareas presentadas a los alumnos, se constituyen como datos importantes.

El currículo de matemáticas en la Ley General de Educación (LGE, 1970)

El currículo de matemáticas que deriva de la LGE se fundamenta en el modelo tecnológico con tendencias conductistas sobre el aprendizaje, en el que lo esencial es la consecución de una serie de objetivos y contenidos matemáticos susceptibles de ser observados y medidos.

La concepción del currículo de Matemáticas que deriva de los posicionamientos anteriores es también determinante y opta por un currículo prescriptivo, en el que los contenidos están fijos y tienen finalidad en sí mismos. La evaluación se dirige especialmente a comprobar el nivel de adquisición de contenidos por parte de los alumnos. La metodología está organizada para optimizar la adquisición de contenidos.

En este marco de la Ley General de Educación surgen en España muchos movimientos de innovación que formulan nuevas propuestas que pretenden superar algunos de los rasgos más significativos de los currículos anteriores: fundamentación conductista del aprendizaje, valoración esencialista del conocimiento, autoridad indiscutible del profesor, objetividad de la evaluación mediante las Matemáticas y, por tanto, legitimidad de la selección social fundada en ellas; sin embargo, esta visión crítica no se logró transmitir del todo al Sistema Educativo. La crisis de la enseñanza de las Matemáticas, se hizo más evidente a principios de la década de los noventa. Para solucionar el problema había que ir a su origen, viéndose como era preciso replantearse las finalidades del currículo de Matemáticas, ajustándolas a las necesidades del ciudadano y de la sociedad actual; de este modo las finalidades establecen un nuevo grado de análisis y unas dimensiones con las que organizar el currículo en este nivel.

El currículo de matemáticas en la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990)

La integración de España en la Comunidad Europea planteó a nuestro Sistema Educativo nuevas necesidades y demandas; entre otras, se encuentran los esfuerzos para mejorar la calidad de la enseñanza en todos sus niveles, la necesaria reforma de la Educación Secundaria para ampliar el período de enseñanza obligatoria hasta los dieciséis años, y la necesidad de que desaparezcan las distancias y desigualdades educativas debidas a causas sociales, culturales o económicas. Es dentro de este marco, en el que las Matemáticas no deben aparecer sólo como una disciplina formal que se construye lejos de nosotros y de nuestros intereses, sino más bien como un lenguaje que se manifiesta en todas las formas de expresión humana y que emerge como un derecho cultural esencial para todos los sujetos de la sociedad, y en consecuencia la enseñanza y aprendizaje de las mismas debe desarrollarse y profundizar en su dimensión educativa, planteándose nuevas metas y prioridades que desbordan el papel clásico atribuido a esta disciplina.

En el MEC (1989), se señala que:... "*en la medida en que el aprendizaje de las Matemáticas se entienda como la apropiación de un saber constituido y acabado, es evidente que su capacidad para asimilar y aprehender la estructura interna de dicho saber condicionará la posibilidad misma de llevar a cabo el aprendizaje. Por el contrario, si el aprendizaje de las Matemáticas se contempla como un proceso de construcción y de abstracción de relaciones, progresivamente más complejas, elaboradas en y a partir de la actividad del alumno, entonces las características psicoevolutivas de los alumnos, sin dejar de jugar un papel esencial, difícilmente podrán ser consideradas como el punto de referencia único para la selección, organización y secuenciación de contenidos del aprendizaje*".

La preocupación por organizar un currículo de Matemáticas escolares que responda a las necesidades de la mayoría y respete las características individuales no es una cuestión reciente. La recomendación "Matemática para todos" tiene su origen en el movimiento de reformas para la enseñanza de las Matemáticas emprendido por los Estados Unidos y Gran Bretaña en los años cincuenta, y que se extiende progresivamente a los demás países occidentales. El proceso de matematización de la cultura devuelve a la comunidad unas matemáticas que no son de ninguna manera ni propiedad, ni exclusividad de un sector o grupo cultural, situación que sí aparece en el proceso de culturización matemática, es por ello, que la función tradicional asignada a las matemáticas en el Sistema Educativo se modifican profundamente. El papel tradicional de las Matemáticas aparece cuestionado como instrumento para legitimar estatus sociales que generan divisiones entre el trabajo intelectual y manual, emerge la función formadora de la Matemática como un conocimiento básico compartido, al menos hasta los dieciséis años. Es en este contexto donde surgió el movimiento Matemáticas para todos.

En España, con cierto retraso, el currículo de Matemáticas incorpora la Matemáticas para todos como una de sus ideas básicas, es decir, extender la enseñanza de las matemáticas al conjunto de la población hasta los dieciséis años, esto genera un choque frontal con la concepción anterior en nuestro país de una matemática escolar minoritaria.

Nuevamente nos surgen preguntas inevitables: ¿qué Matemáticas debemos seleccionar que sirvan para todos?, ¿ son éstas verdaderas Matemáticas?

El modelo curricular propuesto por el MEC para la ESO hace una apuesta decidida por el aprendizaje significativo de los alumnos, donde el constructivismo se convierte en el modelo de referencia curricular. La construcción de sus aprendizajes la realiza el alumno de una manera integrada desde tres tipos de contenidos: conceptos, procedimientos y actitudes. Además de defender un modelo de intervención educativa constructivista y significativa, el currículo permite un grado máximo de apertura y flexibilidad, convirtiendo a la vez en obligatorios determinados objetivos y contenidos (programas de mínimos), preservando la atención a la diversidad de los alumnos, a sus diferencias y singularidades, y potenciando la evaluación formativa como instrumento para dinamizar el progreso de los alumnos, orientando y facilitando la construcción de nuevos aprendizajes a partir de los conocimientos previos.

El currículo de matemática opta además, por proponer el desarrollo de capacidades de orden superior como la identificación y resolución de problemas, el desarrollo del pensamiento crítico y el uso de estrategias de naturaleza metacognitiva. Es obvio que estos nuevos objetivos suponen modificaciones sustanciales a lo que entendíamos como actividad matemática y a lo que significa aprender matemáticas y que el profesorado necesita recursos y estrategias de enseñanza que no derivan directamente de la propuesta curricular aportada.

La concepción del currículo de Matemáticas que deriva de la LOGSE, opta por un currículo básico susceptible de la intervención directa de los propios profesores y centros en el que sea prescriptivos los objetivos generales y los bloques de contenidos, quedando todo lo demás supeditado al Proyecto Curricular de Centro, en el que los contenidos constituyen medios para conseguir unas finalidades educativas, y en el que no solo se consideran los contenidos conceptuales sino que al mismo tiempo se contemplan los procedimentales y actitudinales. La evaluación se dirige además de comprobar el nivel de adquisición de contenidos por parte de los alumnos a analizar además, todos los elementos del currículo para armonizar su desarrollo (alumnos, centro, profesores, entorno, ...). Igualmente la metodología está organizada no sólo con la finalidad de optimizar la adquisición de contenidos sino que pretende conseguir situaciones significativas de aprendizaje y de comunicación, favoreciendo la creatividad y autonomía del alumno.

El profesorado es consciente de que se han producido modificaciones considerables en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Secundaria, como resultado del intento de acomodar la estructura y el funcionamiento del Sistema Educativo a las transformaciones políticas, sociales, culturales y económicas de la sociedad española, lo cual, a su vez, ha motivado que los profesionales dedicados a su enseñanza se estén encontrando con dificultades específicas derivadas de las tareas propias de ese campo de trabajo. Entre los problemas no podemos olvidar el carácter inmovilista y conservador que tradicionalmente ha predominado en la enseñanza de las Matemáticas y la orientación fundamentalmente selectiva y elitista de los procesos de su aprendizaje, lo cual ha generado un fuerte movimiento crítico de revisión encabezado por grupos de innovación, así como por distintos colectivos organizados y asociaciones.

La Comunidad Española de Profesores de Matemáticas, en su conjunto, no hemos sabido aprovechar las oportunidades ofrecidas por la Reforma del Sistema Educativo para hacer una revisión en profundidad de los objetivos, los contenidos, los métodos y la evaluación del currículo de Secundaria. Estas actuaciones no se han difundido bien en la comunidad, que conoce a medias su existencia y, en consecuencia, no se está viendo afectada por los resultados y conclusiones de dichos trabajos. Las tareas de coordinación y las relaciones de comunicación entre grupos de investigación, equipos de innovación y profesores reflexivos necesitan un desarrollo mucho mayor en España; las Instituciones Educativas y las Sociedades de Profesores o Investigadores tienen aquí un campo de actuación considerable.

El currículo de matemáticas en la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE, 2002)

En esta nueva propuesta se sigue resaltando la equiparación entre los contenidos de conceptos y los de procedimientos, los cuales a su vez han de ser tratados con suficiente rigor formal a lo largo de la Etapa, no así los contenidos de actitudes. Otro aspecto sobre el que se hace mucho hincapié en la propuesta, es la necesidad de incorporar al Currículo de Matemáticas el uso de todos aquellos recursos tecnológicos (calculadoras y programas informáticos) adecuados para desarrollar procedimientos rutinarios, para interpretar y para analizar situaciones diversas relacionadas con los números, con el álgebra lineal, con el análisis funcional o con la estadística, así como para resolver, de forma práctica, situaciones problemáticas.

La nueva normativa también intenta justificarse insistiendo en las necesidades de aquellas otras materias del ámbito científico–tecnológico que requieren de contenidos matemáticos para su desarrollo, las cuales no han sido pasadas por alto a la hora de elaborar y distribuir los contenidos mínimos.

Se le ha dado también un enfoque diferente a la resolución de problemas, la cual deja de ser considerada como un Bloque de Contenidos para ser contemplada como una práctica constante y paralela al proceso de enseñanza/aprendizaje, independientemente de la Etapa o Nivel tratado. Observamos como las Matemáticas curriculares de la Educación Secundaria se encuentran en una fase de cambio motivada, en parte, por las reacciones y reajustes que tienen lugar en la propia Matemática, y en especial, como consecuencia directa del empuje innovador que ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), tan presentes en nuestra realidad más inmediata.

Con las modificaciones hechas se pretende, desde la Administración, centrar el Currículo de Matemáticas en aquellos conceptos y procedimientos que tienen más valor para la época actual. La importancia que se le ha otorgado en estos nuevos currículos a los tópicos matemáticos está en función de su utilidad para el desarrollo y construcción de otras ideas matemáticas, para la resolución de problemas dentro o fuera del ámbito de esta Ciencia; así como también viene determinada por la necesidad de dar respuesta a las demandas y posibilidades que van surgiendo, relacionadas, éstas últimas, con los más recientes avances tecnológicos.

En cuanto a los Objetivos Generales, esta propuesta parece apostar más por una deshumanización del Currículo, propiciando más el desarrollo de las capacidades cognitivas (donde se incluyen las que tienen que ver con el manejo de las nuevas tecnologías y vías de información) en detrimento de las afectivas, las relaciones interpersonales y las de actuación e inserción social, pese a ser estas últimas las que favorecen la autorrealización del sujeto.

En resumen podemos señalar que los nuevos Currículos de Matemáticas propuestos (LOCE) pretenden dar una visión de la matemática más acorde con la realidad actual, en la que las nuevas tecnologías tienen un protagonismo especial a costa de restar importancia a la adquisición de capacidades vinculadas al desarrollo personal del alumno. La reforma propuesta por la LGE en 1970 nos presenta unas Matemáticas formada por objetos ya construidos que hay que dominar, mientras que la Reforma impuesta por la LOGSE en 1990 nos presenta por el contrario unas Matemáticas que lejos de ser un objeto ya construido que hay que dominar, se configuran como una forma de pensamiento abierto, en el que se deja cierto margen a la creatividad personal fomentando su ejercitación individual.

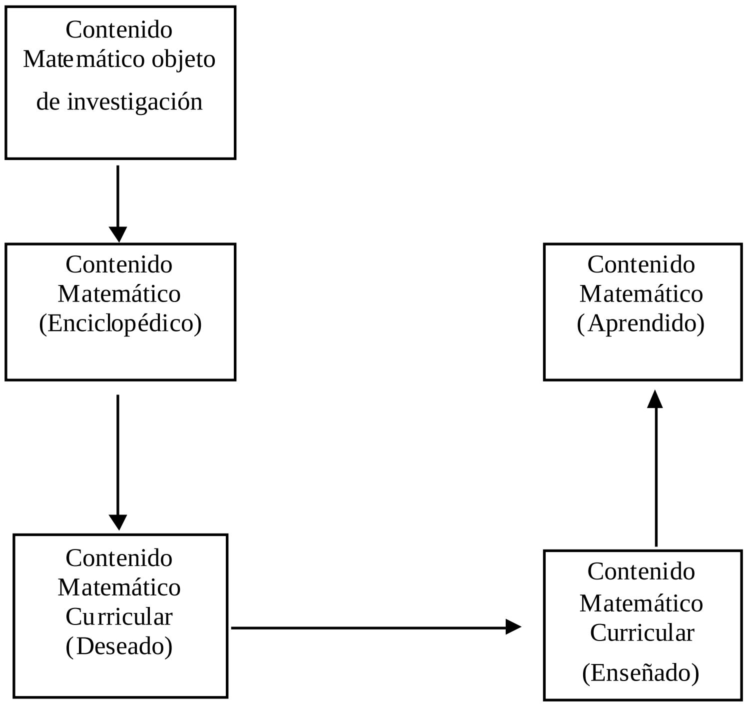
A grandes rasgos, podemos señalar que a la hora de extrapolar la importancia de que el conocimiento matemático verse sobre los elementos de la disciplina ya constituida, nos encontramos en los currículos de matemáticas con dos formas diferentes de entender el aprendizaje de las matemáticas: "como la apropiación de un saber constituido y acabado" o "como un proceso de construcción y de abstracción de relaciones, progresivamente más complejas, elaboradas en y a partir de la actividad del alumno".

Formación del profesorado de matemáticas de Secundaria

Dedicamos este apartado a analizar las perspectivas de formación del profesorado de matemáticas de Secundaria idóneos para implementar con garantías los distintos currículos de matemáticas que se han generado a partir de las diferentes reformas educativas. Como hemos señalado estas reformas educativas han planteado en España modificaciones profundas en todas las áreas del saber y en particular en el modo usual de enseñar Matemáticas. Los cambios curriculares afectan a las múltiples dimensiones del currículo.

Consideremos brevemente la problemática asociada al proceso de organizar un currículo de matemáticas para los estudiantes, éste puede describirse desde diferentes puntos de vista, y encontramos diversas explicaciones de este proceso en función de los diferentes marcos teóricos de referencia, así por ejemplo, la tradición alemana llama "Elementarización", a la transformación activa de un contenido matemático a formas más elementales con un doble sentido: ser fundamental y accesible para los grupos de estudiantes que lo reciban (Biehler et al., 1994), o bien desde la tradición francesa se describe este proceso con la teoría de la "Transposición Didáctica", Chevallard (1985), poniendo en evidencia las diferentes variables que intervienen en el paso del conocimiento matemático científico a conocimiento matemático deseado y susceptible de ser enseñado en una etapa educativa. En este proceso, el saber matemático escolar es organizado como el resultado de diferentes ajustes proporcionados por la acción didáctica y por ello difiere cualitativamente de su saber de referencia.

Señalamos en el siguiente cuadro la etapas en la transposición didáctica:



El contenido matemático curricular deseado es definible en el dominio del contenido matemático enciclopédico, aunque él no es enseñado ni organizado bajo esa forma. Son mecanismos y organizaciones precisas las que deben asegurar su extracción del contenido enciclopédico y su inserción en el discurso didáctico. Realizadas estas acciones por diferentes elementos del sistema educativo, el saber matemático a enseñar es intrínsecamente diferente del saber enciclopédico, al menos en su aspecto epistemológico.

El currículo de matemáticas que el profesor debe implementar ha sido determinado por diversos agentes del macrosistema educativo mediante un proceso que generalmente resulta desconocido al futuro profesor. El currículo está organizado por una lista de contenidos que están relacionados con las capacidades que pueden desarrollar e inmerso en una concepción determinada de entender la enseñanza y el aprendizaje, así como el proceso de evaluación. El futuro profesor debe reflexionar sobre este currículo, es decir, asimilarlo en su globalidad, en su coherencia, en su finalidad, y hacer sobre el mismo, una interpretación personal.

Ahora bien, el conocimiento matemático del profesor, ¿cómo ayuda en esta reflexión?

Podemos indicar como un hecho cierto que muy pocos profesores de matemáticas tienen una formación adecuada respecto a lo que están enseñando en términos de un conocimiento matemático como proceso, es decir, como un conocimiento que debe ser considerado desde una perspectiva histórica/crítica, contextualizado y que tiene relaciones con las sociedades y culturas donde nace y se arraiga. La tendencia más común es considerar el conocimiento matemático como un producto acabado, que implica abordar el conocimiento en su fase actual, descontextualizado, basado en el análisis lógico, donde las relaciones se establecen sólo a nivel de conceptos matemáticos. Esta concepción es insuficiente para cubrir con garantías una parte importante de los fundamentos de determinadas la propuestas curriculares de matemáticas en la Educación Secundaria.

En el caso de la LOGSE el profesorado de matemáticas se encuentra con que se han producido cambios importantes en lo que se considera conocimiento matemático, apareciendo, de esta manera, que además de los hechos, conceptos y principios de la Matemática, también forman parte del conocimiento matemático los procedimientos: utilización de distintos lenguajes, estrategias generales y específicas para la resolución de problemas, etc., y las actitudes hacia las Matemáticas, donde hay que fomentar la apreciación a las Matemáticas, la organización y los hábitos de trabajo en Matemáticas como aspectos con entidad propia; todo ello lleva necesariamente a una revisión y reorganización de los contenidos. También se ha modificado el modo de trabajar en el aula; desde las clases diseñadas únicamente sobre lecciones magistrales hasta llegar a la dinámica de grupos, pasando por el trabajo en equipo, donde el énfasis en la participación, en la elaboración de alternativas propias, en la discusión y en la toma de decisiones razonadas juegan un papel esencial. Junto a estos cambios metodológicos aparece la evaluación del aprendizaje de los alumnos como un elemento determinante en el diseño y desarrollo de las unidades de aprendizaje, de esta forma la evaluación debe ser orientadora y formativa antes que sumativa y sancionadora. La evaluación debe tener en cuenta no sólo el dominio de definiciones y conceptos o la ejecución de destrezas, sino que debe contemplar competencias más generales, incluyendo la actitud hacia la propia Matemática.

En esta propuesta educativa se encuentra el profesorado con cambios curriculares que le enfrenta a nuevas tareas; entre otras, las que suponen un currículo básico y abierto en matemática que obliga a valorar y elegir entre diversas alternativas pedagógicas la más adecuada a su realidad.

En términos más concretos la propuesta curricular en matemática plantea grandes desafíos a los programas de matemáticas, con relación al punto de vista de los alumnos: "todos" los alumnos estudiarán matemáticas al menos hasta los dieciséis años, y "todos" los alumnos deberán aprender a "hacer" matemáticas y comprobar que "las matemáticas tienen sentido". Esto choca frontalmente con los planteamientos de los profesores de matemáticas sobre los programas anteriores, es decir, lo que se propone es considerablemente distinto de la práctica habitual en matemática.

Mientras en el modelo anterior primaba el conocimiento sobre la matemática, ahora se propone el "hacer" matemática; obviamente la diferencia es notable. De otra manera: se propone que la comprensión matemática no se refiera a la cantidad de conocimientos de matemática que tiene el alumno, sino a la competencia del razonamiento matemático desarrollado por el mismo.

La propuesta curricular opta por una metodología orientada a lograr situaciones significativas de aprendizaje, favoreciendo la creatividad y autonomía del alumno. Se propone en consecuencia una metodología basada en el descubrimiento y en el aprendizaje significativo que fomente la creatividad, más que en una metodología receptiva y mecánica, y que respete los equilibrios epistemológicos: instrumental y relacional, y social: comprensividad y diversidad.

El profesor es un educador, y entre los 12 y los 16 años será tutor de sus alumnos. El profesor ha de ser diseñador, elaborador de materiales y ha de formar parte del equipo que desarrolle el Proyecto Curricular de su Centro. Aunque en teoría el profesor cuenta con estructuras de apoyo configuradas por equipos de orientación, asesores y representantes de la administración, la tarea que debe asumir es de una gran complejidad y de no fácil solución.

Las finalidades, que en España se asignan a la Educación Secundaria, se pueden agrupar en dos áreas principales. La primera de ellas hace referencia al sujeto de la educación, a la persona tomada individualmente (desarrollo de la personalidad); la otra a la Sociedad, a los individuos tomados en grupo (democracia, progreso económico y social). Esta dualidad se aplica si se tiene en cuenta que la Enseñanza Secundaria de primer ciclo, forma parte de la obligatoriedad escolar, por lo que comparte sus fines con los de la Enseñanza Primaria. Por otra parte, la etapa Post-obligatoria, la opcional, se orienta más a la sociedad que al individuo, al centrarse en los aspectos de especialización y empleo.

La corriente reformista que invade al Sistema Educativo español y a otros países del entorno, tienen en los ordenadores una de sus piezas angulares. Se pone de manifiesto la preocupación porque las asignaturas tradicionales no preparan a los escolares para la sociedad informatizada de nuestros días. Por ello se hace necesario la introducción en el currículo de materias que se refieran a los ordenadores, sus funciones y su empleo en el mundo actual; junto con estos conocimientos aparecen las materias transversales, educación para la salud, para el consumo, seguridad vial y otras de tipo social y cívico que pasan a formar parte de los nuevos currículos.

Junto a los cambios en la estructura de la Enseñanza Secundaria, encontramos en nuestra reforma un intento de conseguir una mayor democratización de la educación y de mejorar la calidad del Sistema Educativo.

Al analizar las tendencias encontramos en el horizonte la crisis económica y, por tanto, la escasez de recursos aplicados a la educación, y la caída de la natalidad y, en consecuencia, de la escolaridad en los niveles primario y secundario. Estos esfuerzos democratizadores de la enseñanza no han tenido un desarrollo paralelo con el de los recursos económicos necesarios. Junto a estos dos problemas, cabe señalar también la cuestión de la integración, que ha sido defendida en nombre de la democratización de la Enseñanza Secundaria. En el porvenir, sin embargo, se aprecia un movimiento contrario a la integración y no por una corriente antidemocrática, sino por una fuerte exigencia de especialización del mercado de trabajo moderno, que precisa de poca mano de obra pero muy especializada, sin olvidar el deseo de ajustar la enseñanza a los intereses particulares de los alumnos. Combinar la respuesta a esta necesidad económica con el ofrecimiento de una educación común a la población escolar, va a suponer una tarea política laboriosa y de difícil predicción.

Los problemas de la Reforma están, en gran medida, relacionados con las cuestiones anteriores y con la falta de información de lo que es y supone la misma. Cuestión que no sólo es aplicable al profesorado, sino también a toda la sociedad. Cualquier cambio en el Sistema Educativo afecta a las valoraciones y enfoques de los diferentes sectores sociales, aunque especialmente al de profesores y familias. La falta de información es aplicable a todos los sectores que, directa o indirectamente, se conectan con el Sistema Educativo, por ejemplo, la Universidad. El paso del alumnado de enseñanzas medias a la Universidad puede chocar con el enfoque de la Reforma, ya que en ésta se acentúan aspectos más formativos y constructivistas del conocimiento matemático, lo mismo que el énfasis en las actitudes y valores contrapuestos con el enfoque de las prácticas educativas en la Universidad.

Referencias

Biehler, R. et al. (Eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer.

BOE (2001a). *Real Decreto 3473/2000, de 29 de Diciembre*, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (BOE, núm. 14, de 16 de enero de 2001).

BOE (2001b). *Real Decreto 3474/2000, de 29 de Diciembre*, por el que se modifican el Real Decreto 1700/1991, de 29 de Noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato, y Real Decreto 1178/1992, de 2 de Octubre, por el se establecen las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE núm. 14 de 16 de enero de 2001).

Cañón, C. (1993). *La matemática creación y descubrimiento.* Madrid: Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática.* Madrid: MEC-Labor. (Título original: *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhäuser, 1982).
Ernest, P. (1989). *The impact of beliefs on teaching of Mathematics.* En A. Bishop et al. (Eds.), *Mathematics, education and society* (pp. 99-101). París: UNESCO.
Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education.* London: Falmer Press.
Ernest, P. (1994). *The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics.* En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 335-349). Dordrecht: Kluwer.
Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics.* En C. Alsina et al. (Eds.):. *Selected Lectures.* ICME 8, 1996, (pp. 153-171). Sevilla: S.A.E.M. THALES.
Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford: Oxford University Press.
Lakatos, I. (1978) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad (Traducción al castellano de: *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: University Press, 1976).
Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza.
MEC (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas.* Madrid: Servicio de publicaciones del MEC.
Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática*, 4 (2), 7-15.
Popper, K. R. (1974). *Conocimiento objetivo.* Madrid: Tecnos (versión castellana: *Objective knowledge.* Oxford: Oxford University Press, 1972).
Restivo, S.: (1992). *Mathematics in Society and History.* Dordrecht: Kluwer A. P.
Romberg, T. A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*, 294, 323-406.
Tymozcko, T. (1986) *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhäuser.
Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system.* Oxford: Pergamon Press.
Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial. Versión en castellano de: *Remarks on the foundation of Mathematics* (1979). Cambridge, MA: MIT Press.

Martín M. Socas Robayna
Matías Camacho Machín
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna, España

Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria

María Luz Callejo y Antoni Vila

Introducción

A lo largo de la escolaridad los alumnos se van forjando una idea de lo que es la matemática y de lo que significa “hacer matemáticas”. Pero las investigaciones sobre las creencias de los alumnos nos muestran que la visión de la matemática que predomina es la de una ciencia rígida, aburrida, mecánica, difícil, un tormento para algunos, que poco o nada tiene que ver con la creatividad, la belleza o el juego.

Aunque socialmente se considera que esta materia es importante para la formación y el desarrollo personal y social, y con frecuencia se advierte la preocupación por el bajo rendimiento de los alumnos, sin embargo no se ponen los medios para presentar, a través de los medios de comunicación, en la educación formal o en otros ámbitos formativos, sus vertientes estética, lúdica o experimental; no se proporciona a la mayoría de los jóvenes experiencias inolvidables, como la de demostrar que hay infinitos números primos aunque no se tenga una fórmula para obtenerlos y que además, aunque parezca imposible, hay tantos números primos como naturales a pesar de que los primos son un subconjunto de los naturales; o no se les propone verdaderos problemas en los que trabajen intensamente, con interés y motivación, tratando de resolverlos y tengan el placer de comprobar de que en un instante se puede producir la iluminación que compense grandes esfuerzos.

Por otra parte la realidad del día a día en el aula nos muestra una amplia e inabordable casuística de dificultades, bloqueos y errores cometidos y/o observados en el alumnado al resolver problemas de matemáticas. Y nos preguntamos: ¿Por qué se producen estos errores de forma tan generalizada? ¿Por qué algunos alumnos especialmente capacitados a veces dan respuestas pobres o ingenuas?

En este artículo vamos a tratar de la visión de la matemática asomándonos al mundo de las creencias de los alumnos, más concretamente a las creencias sobre la resolución de problemas (RP) y sus consecuencias sobre las prácticas. Comenzaremos partiendo de la realidad, exponiendo unos cuantos ejemplos de errores que cometen los alumnos, luego trataremos de darles una explicación a partir de las creencias sobre la actividad de resolver problemas; para ello delimitaremos este concepto y su relación con otros semejantes, veremos cómo se relacionan entre sí y con las prácticas y cuál es su origen y formación; por último presentaremos una parte de los resultados de una investigación reciente con un grupo de alumnos que inician la Educación Secundaria, respecto a qué entienden por "problema de matemáticas", cómo conciben la naturaleza de la actividad de resolver problemas y los aspectos que inciden en su aprendizaje y mejora, así como la manera en que se formaron estas creencias[1].

1 Algunas respuestas de los alumnos

La realidad del día a día nos ofrece ejemplos que son un exponente de que no se está favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, sino más bien el aprendizaje de mecanismos y de respuestas prefabricadas que producen bloqueos y fijaciones de distintos tipos e inhiben la creatividad. Veamos tres tipos de cuestiones y de respuestas.

En primer lugar podemos considerar las respuestas "sin sentido" a situaciones planteadas en el entorno escolar con relación a aspectos cotidianos. Podemos centrarnos en aquellas que se corresponden con situaciones sobre las que se formulan preguntas absurdas, que serían reconocidas fácilmente como tales fuera del entorno escolar. Por ejemplo, el caso de una maestra que plantea por escrito a todos los niños y niñas de 6 años de una clase la siguiente situación (Vila, 1998):

"Si un niño tiene 7 lápices y le quitan 7, ¿podrá escribir?"

Uno de los niños responde diciendo que "eso dependerá de si tiene bolígrafos o rotuladores". Esta respuesta no sólo no es admitida como correcta, sino que incluso es entendida por la profesora como una especie de rebeldía. Cuatro años más tarde, cuando a este niño se le estaba recordando la anécdota, interrumpió afirmando: "Qué problema más tonto, ¡claro que no podrá escribir!".

Exponemos en segundo lugar las dificultades observadas en el proceso de resolución de *problemas no estereotipados* (PNE), presentados en un contexto más o menos familiar, que no requieren complejas estrategias de resolución, o más aún, que admiten métodos, estrategias o procesos de ejecución informales.

[1] Un trabajo más extenso sobre estos aspectos puede consultarse en: *Pensar en clase de matemáticas. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* A. VILA y M.L. CALLEJO. Narcea, Madrid (en imprenta)

Una fuente muy importante de obtención y análisis de errores de este tipo es la de las llamadas evaluaciones externas, no sólo por la extensión de la población a la que se aplican, sino principalmente porque el alumnado se enfrenta a situaciones propuestas por profesorado ajeno, y en consecuencia a situaciones para las cuales no ha sido adiestrado *ad hoc*. En España, en el informe de las pruebas correspondientes al "Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias" (TIMSS)[2] sobre alumnado de 13-14 años, se cita el siguiente ejemplo:

> "Las tres quintas partes del alumnado de una clase son chicas. Si añadimos a esta clase 5 chicas y 5 chicos, ¿qué afirmación es cierta?

a. hay más chicas que chicos

b. hay igual número de chicos que de chicas

c. hay más chicos que chicas

d. con la información dada, no es posible saber si hay más chicos o chicas"

A pesar de que el 62% del alumnado opta correctamente por la opción (a), queremos resaltar que uno de cada seis alumnos optó por la opción (d). Aunque el problema es poco complejo, incluso para la edad a la que era propuesto, su carácter no estereotipado hace que requiera de un abordaje reflexivo, no automático, ni asociado de forma mimética a algoritmos o sistemas conceptuales.

Y finalmente, abordando el papel que creemos que debiera tener la educación matemática para aquellos alumnos especialmente capacitados, nos preguntamos: ¿Qué es lo que hace que algunos "buenos alumnos" resuelvan bien (excelentemente) algunos PNE y en cambio otros se bloqueen, den respuestas rápidas o incoherentes, o se conformen con bajos niveles de solución?

Un ejemplo, que requiere el empleo de estrategias de poca complejidad, es el siguiente, propuesto a alumnos de 12 años (Vila, 2001):

> "Imagínate una tira larga de papel (figura 1). Dóblala por la mitad haciendo coincidir los dos extremos uno sobre otro. Cuando la vuelvas a abrir verás una marca de pliegue en medio. Si en lugar de doblarla una sola vez, lo haces dos veces, siempre por la mitad y en el mismo sentido, al volverla a abrir observarás 3 marcas de pliegue. ¿Cuántos pliegues verás en medio si en total doblas la tira 10 veces, cada vez por su mitad?"

Por una parte, Mireia, alumna con un rendimiento académico impecable, muestra una absoluta ingenuidad en la resolución, asociando el enunciado propuesto a métodos recientemente aprendidos, en concreto aplicando criterios de

[2] López y Moreno (1997)

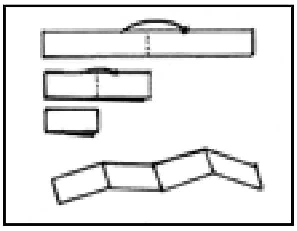


Figura 1

proporcionalidad: "si al doblar cinco veces aparecen 15 pliegues, al doblarlo 10 veces aparecerán 30 pliegues".

Otra alumna brillante, Laia, aborda de forma adecuada el problema: prueba casos sencillos, organiza los datos en forma de tabla y busca pautas, en este caso de recurrencia. Sin embargo, en su exploración comete un error y dado que no contrasta la validez de su conjetura (¿por qué debía hacerlo?), sigue un proceso erróneo y da una respuesta muy alejada de la admisible e incluso creíble (figura 2).

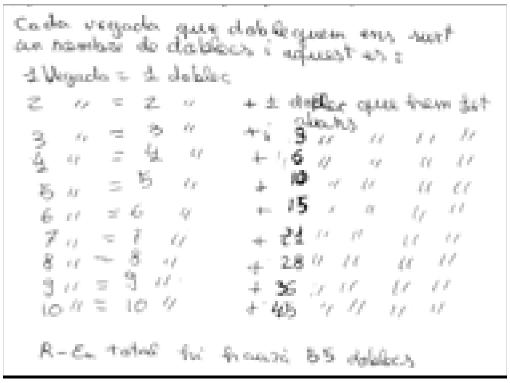


Figura 2

Finalmente, Marina, otra alumna no menos brillante, en su hoja de resolución organiza también sus datos en una tabla y centra sus esfuerzos en la búsqueda de pautas; pero a diferencia de Laia, contrasta la validez de su conjetura, lo cual le lleva a conseguir una solución admisible e incluso rica y general, buscando pautas y expresando el número de pliegues en función del número de veces que se dobla el papel. Sin embargo, puestos a hacerle una crítica, la respuesta no se corresponde estrictamente con la pregunta formulada: el resultado obtenido no expresa el número de pliegues sino el número de partes en las que queda dividida la tira de papel.

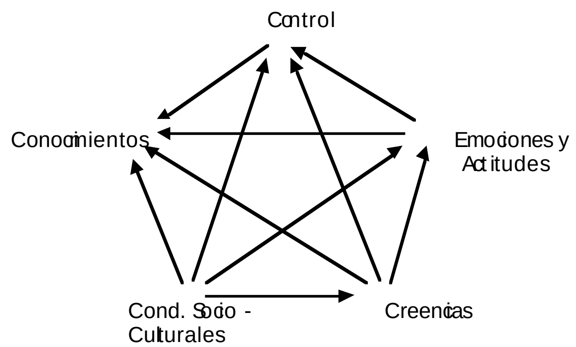
Este tipo de comportamiento se observa también en las competiciones nacionales e internacionales, a las que acuden alumnos brillantes (Callejo 1994).

Hemos expuesto pues brevemente tres tipos de respuestas incorrectas, queriendo con ello mostrar la heterogeneidad y magnitud de la problemática a la que queremos hacer referencia.

En el último caso descrito los alumnos y alumnas conocían los conceptos y algoritmos necesarios para dar una respuesta correcta, por tanto las causas de sus errores hay que buscarlas en otros aspectos que inciden en el proceso de resolución de un problema y que influyen en el éxito o fracaso ante la tarea.

Desde la investigación en didáctica de la matemática se han elaborado marcos teóricos que dan cuenta de por qué los resolutores no tienen éxito al resolver problemas. Así, Lester (1987), ha distinguido cinco categorías interdependientes: *los conocimientos, el control, las emociones y actitudes, las creencias y las condiciones socio-culturales.* En el esquema del cuadro 1 hemos interpretado las relaciones que Lester considera entre ellas. En el mismo se ilustra cómo la comprensión / uso de ideas y técnicas matemáticas se desarrolla en situaciones culturales, y que las influencias de éstas se dejan sentir en cualquiera de las otras categorías.

Cuadro 1
Interpretación de la Interdependencia entre las cinco categorías que según Lester influencian los resultados de la RP
(El sentido de las flechas indica una influencia directa)



Con una clara visión del papel capital que juegan las creencias en el conjunto del rendimiento en RP (observemos en el esquema que directamente y también indirectamente a través de otros aspectos, inciden sobre la utilización de los conocimientos), Lester está muy próximo a la idea de Schoenfeld (1985, 1992) en cuanto al "papel explicativo" de éstas. En esta línea Schoenfeld (1992) distingue cinco aspectos: *conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos y prácticas.* Así, en particular, Schoenfeld considera que cuando un alumno dispone de un buen bagaje de conocimientos y estrategias, y tiene un buen control de lo que hace, la única cosa que permite explicar el fracaso es su sistema de creencias[3] .

Las respuestas del primer niño, que responde de forma lógica y coherente a los 6 años, pero que a los 10 años responde con "la lógica" de la respuesta esperada por la maestra, muestran un cambio de creencias acerca de las respuestas que se deben dar en el contexto escolar. La elección de la opción (d) en el problema propuesto en el TIMSS se puede interpretar a partir de la creencia de que "para resolver un problema de matemáticas hay que hacer cálculos empleando los datos del enunciado; si no se puede hacer es que falta información". En las respuestas dadas al problema de la tira de papel pueden subyacer creencias relacionadas con el proceso de abordaje y de verificación de la resolución de un problema, por ejemplo las siguientes: "cuando se lee un problema se aplica la primera idea que viene a la cabeza", por tanto antes de hacer no se trata de comprender el enunciado y el problema; o "la resolución de una cuestión matemática termina cuando se encuentra la solución", en consecuencia no hacer falta verificarla. Las creencias de estos alumnos acerca de lo que es un problema, del tipo de respuesta que deben dar y de los procedimientos y estrategias a emplear, explican en parte sus comportamientos.

A continuación exponemos un marco teórico acerca de las creencias, su origen y su formación, su estructura y la relación con las prácticas, para pasar luego a analizar las creencias de un grupo de alumnos.

2 Diferentes aproximaciones a las creencias

El término "creencia" se utiliza en distintas áreas de conocimiento (filosofía, teología, psicología, inteligencia artificial, etc.) con distintos significados; también se emplea en la vida cotidiana con diversas acepciones. Según E. Pehkonen y G. Törner (1996), en la bibliografía específica de investigación en didáctica de las matemáticas, el concepto de creencia es ambiguo. Se encuentran más referencias implícitas que definiciones formales explícitas, aparece en ocasiones en oposición a otros conceptos como conocimiento, actitud, concepción, etc. o como una explicación de determinadas formas de proceder en la actividad matemática.

2.1 Conocimiento, concepción y creencia

Aunque las fronteras entre *conocimiento* y *creencia* están a veces poco claras, es clásica la diferenciación de R.P. Abelson (1979) atendiendo a los siguientes

[3]Citando a Puig (1996: 43), "cada elemento que introduce [Schoenfeld] (en el transcurso del tiempo y de sus investigaciones) puede verse como el resultado de un intento de explicar por qué los elementos anteriores son incapaces de dar cuenta de por qué los resolutores no tienen éxito al resolver problemas".

aspectos: el carácter más objetivo de los conocimientos y más subjetivo de las creencias, pues éstas se pueden mantener con diferentes grados de convicción; los conocimientos están consensuados por un determinado grupo humano, sin embargo las creencias no siempre son fruto de un consenso; los conocimientos responden a unos criterios de verdad, que no han de satisfacer las creencias.

En cuanto a las relaciones entre *concepción* y *creencia*, es un tema controvertido, pues mientras algunos autores utilizan ambos términos indistintamente, como sinónimos, otros entienden que estos conceptos están relacionados, pero no significan lo mismo. A.G. Thompson (1992:130) considera que las creencias son un tipo de concepciones, pues define a éstas como "una estructura mental más general, que encierra creencias, significados, conceptos, proposiciones, imágenes mentales y preferencias". J.P. Ponte (1994:199) define las concepciones como "los esquemas subyacentes de organización de conceptos, que tienen esencialmente naturaleza cognitiva".

Nuestra postura está más cerca de la de J.P. Ponte que de la de A.G. Thompson, pues reservamos el término *concepción* para referirnos a las ideas del alumnado asociadas a conceptos concretos; por ejemplo, hablaremos de "concepciones de los alumnos sobre la probabilidad". Y usaremos el término *creencia* para referirnos a las ideas del alumnado asociadas a actividades y procesos matemáticos (ejercicios, problemas, demostración, resolución de problemas...) y a la forma de proceder en el quehacer matemático; por ejemplo, diremos "las creencias del alumnado sobre la forma de abordar problemas de probabilidad". Pero no circunscribimos el concepto de *creencia* a las ideas acerca de la matemática exclusivamente, sino también a las ideas sobre el sujeto que ejerce la actividad matemática y sobre el aprendizaje.

2.2 Otras aproximaciones

A partir de los rasgos expuestos, vamos a tratar de elaborar una definición de las creencias, acogiendo también otros rasgos que se subrayan en la abundante literatura sobre el tema: su carácter subjetivo, su contenido, su relación con la afectividad y con el contexto y su naturaleza.

D.B. McLeod (1992) define las creencias como las *experiencias* y *conocimientos subjetivos* (imágenes) del estudiante o del profesor. Pero otras personas, fuera del ámbito escolar, tienen también creencias sobre la matemática, ya sea por la presencia de esta ciencia en la vida cotidiana, en los medios de comunicación o en el trabajo, ya sea por la forma en que aprendieron matemáticas.

Otros autores se refieren a las creencias subrayando su contenido. Por ejemplo F.K. Lester, J. Garofalo y D.L. Kroll (1989) las definen como el conocimiento subjetivo del individuo sobre sí mismo, sobre las matemáticas, la resolución de problemas y los temas relacionados con el planteamiento de los problemas.

Otras definiciones tienen en cuenta aspectos *cognitivos* (comprensión) y *afectivos* (sentimientos), así como la influencia de las creencias en el modo de "hacer matemáticas". Por ejemplo, para A.H. Schoenfeld (1992:358) "la comprensión y los sentimientos de un individuo que modelan la forma en que conceptualiza y se implica en la actividad matemática" son sus creencias. Nos parece importante destacar estos tres componentes de las creencias: cognitivo, afectivo y contextual, siendo el componente cognitivo más potente que el afectivo, por eso tienen un alto grado de estabilidad.

Una caracterización más explícita de este concepto es fruto de una discusión en el *Second MAVI-Workshop*, conducida por E. Pehkonen (citado en Carrillo 1996):

a) Hay diferentes grados de consciencia de las creencias; hay creencias inconscientes, semiconscientes y conscientes, desde un 0 a un 100%.

b) Las creencias están ligadas a situaciones.

c) Algo es más conocimiento que creencia cuanto menor es el papel que desempeñan los afectos. No obstante habría que distinguir el conocimiento personal y el que se estima como objetivo.

d) Hay que caminar hacia concepciones más dinámicas de las creencias.

e) Más que de creencias básicas debería hablarse de creencias primitivas.

f) Afectos, creencias y conocimientos son tres conceptos de los que no se sabe bien cuáles son sus inclusiones e intersecciones.

En cuanto a la *naturaleza* de las creencias, S. Llinares (1992) distingue los tres aspectos siguientes:

1. *Dominio*, definido como el "envoltorio" y los compromisos personales de la creencia establecida. Este componente se puede inferir del uso de afirmaciones que describen elecciones personales, decisiones y acciones (es decir, el contenido de la creencia).

2. *Razones* o argumentos que acompañan la elección de la creencia y relacionan las creencias y las acciones. Este componente se infiere del uso de los términos "porque" y "como", que explican la importancia de la creencia.

3. *Práctica aplicada*, que describe la transferencia individual de las creencias a la práctica. La utilización de este componente ayuda a describir las creencias individuales y a realizar las comparaciones entre los sistemas de creencias de los estudiantes.

A partir de lo expuesto hasta ahora, sintetizamos que las creencias son un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el cual versan; tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo y están ligadas a situaciones. Aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar: las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida.

2.3 Origen de las creencias

Otra forma de aproximarse a las creencias es por su origen. J.P. Ponte (1994) las entiende como verdades personales e intransferibles de cada uno que derivan de la experiencia o la fantasía y que tienen un componente afectivo y de valoración.

Las creencias se van modelando según el tipo de actividades, más o menos estereotipadas, repetitivas o creativas, que se proponen en clase de matemáticas y que forman parte de la cultura escolar. También por la propia organización de los contenidos, a veces en compartimentos estancos, de acuerdo con las ramas clásicas de la matemática. A menudo las matemáticas escolares olvidan el lado estético, lúdico o experimental de la matemática, la dimensión histórica y humana de esta ciencia, su aportación al desarrollo de la humanidad, su relación con otras ciencias y con el resto de la cultura o las posibilidades que nos da desarrollar nuestra inteligencia y de disfrutar de ello.

Los diversos espacios de socialización como la familia, los grupos de iguales, los medios de comunicación social, las actividades de ocio y tiempo libre como los clubs matemáticos, y los mitos sociales sobre esta ciencia, originan, refuerzan o contradicen las creencias sobre la matemática. En general la imagen social de la matemática es negativa, se presenta a menudo como una ciencia rígida, aburrida, mecánica, difícil, donde no cabe la creatividad, ni la estética ni el juego, lo que no anima a los alumnos a superar las dificultades que se les vayan presentando.

M. Fishbein e I. Ajzen (1975) señalan tres tipos de creencias, según su origen:

1. *Creencias descriptivas*: Son las que provienen de la observación directa y sobre todo de la experiencia, del contacto personal con los objetos; estas creencias se mantienen con un alto grado de certeza al ser validadas continuamente por la experiencia y suelen tener un peso importante en las actitudes de los individuos.

2. *Creencias inferenciales*: Son las que tienen su origen en relaciones previamente aprendidas o en el uso de sistemas formales de codificación; en cualquier caso, la base de la creencia inferencial es siempre algún tipo de creencia descriptiva.

3. *Creencias informativas*: Como su nombre indica, provienen de informaciones que proceden del exterior: otras personas, medios de comunicación social, etc.

Resumiendo, las creencias tienen su origen en la experiencia, en la observación directa o provienen de informaciones, y a veces son inferidas de otras creencias.

2.4 Sistemas de creencias

Una creencia nunca se sostiene con independencia de otras, por ello se suele hablar más de *sistemas de creencias* que de creencias aisladas. Una definición clásica es la de M. Rokeach (1968:2): "una forma organizada psicológicamente, aunque no necesariamente lógica, de todas y cada una de las incontables creencias personales sobre la realidad física y social".

No se trata por tanto de una suma o de una yuxtaposición de creencias, sino de una red organizada. E. Pehkonen y G. Törner (1996) se las imaginan como un plato de espaguetis: si se tira de uno de ellos, posiblemente se acabará tirando de muchos más. También podríamos pensar en un frutero con cerezas: si se coge un pequeño racimo de dos o tres suele traer otros enganchados. Estos ejemplos ilustran el enredo y la relación entre ellas.

T.F. Green (1971) afirma que la noción de sistema de creencias es una metáfora para examinar y describir cómo se organizan las creencias de un individuo. Al igual que los sistemas de conocimientos, su potencialidad no reside tanto en su contenido cuanto en sus relaciones: el sistema de creencias de una persona se caracteriza por la forma en que cree y no tanto por lo que cree. Dos personas pueden tener las mismas creencias y distintos sistemas de creencias y por tanto abordarán y desarrollarán de manera diferente la actividad matemática.

T.F. Green ha identificado tres dimensiones de los sistemas de creencias, que no tienen que ver estrictamente con su contenido, sino con el modo en que están relacionadas entre sí dentro del sistema:

1. Algunas creencias se relacionan entre sí al modo de premisas y conclusión, por lo que puede hablarse de creencias *primarias* y *derivadas.* Su relación es cuasilógica, distinta de la de los sistemas de conocimientos donde la relación es de tipo lógico.

2. Las creencias se mantienen con diferente grado de convicción y distinta fuerza. En este sentido cabe hablar de su centralidad psicológica: las que se sostienen con mayor fuerza son *centrales* y las demás son *periféricas.*

3. Las creencias suelen mantenerse "enclaustradas", sin someterse al contraste con el exterior. El contraste tiene más de confrontación defensiva que de apertura para su enriquecimiento o para su modificación.

Una creencia puede ser a la vez primaria y periférica o también derivada y central, ya que los conceptos de centralidad psicológica y de relación cuasilógica son independientes el uno del otro.

En cuanto a la *coherencia interna*, por una parte es importante destacar que la estructura en racimos (clusters) más o menos aislados e interrelacionados los unos con los otros, puede explicar algunas de las inconsistencias del sistema de creencias: es posible mantener simultáneamente creencias opuestas, protegidas en sus respectivos clusters, sin que ello suponga ningún conflicto; más aún, el propio "escudo protector" puede llegar a convertirse en una nueva creencia (Llinares, 1992). Por otra parte es importante destacar también que la estructura del sistema favorece que puedan ser mantenidas creencias "a pesar de" evidencias contrarias; más aún, estas creencias no pueden ser modificadas simplemente introduciendo las "razones evidentes".

Dada la diferencia entre conocimiento y creencia, los sistemas de creencias presentan también diferencias con los sistemas de conocimientos (Abelson, 1979:355-360):

1. "Los elementos (conceptos, proposiciones, reglas, etc.) de un sistema de creencias no están consensuados. Esto es, los elementos de un sistema de creencias pueden ser bastante distintos de un segundo que se refieran al mismo contenido (...)

2. Los sistemas de creencias se refieren en parte a la existencia o no de determinadas entidades conceptuales (...)

3. Los sistemas de creencias incluyen a menudo representaciones de "mundos alternativos" (...)

4. Los sistemas de creencias dependen en gran medida de componentes valorativos y afectivos (...)

5. Los sistemas de creencias tienden a incluir una cantidad sustancial de material episódico (...)

6. El contenido a ser incluido en un sistema de creencias suele ser muy "abierto". Esto es, es difícil delimitar las fronteras del sistema de creencias, excluyendo conceptos irrelevantes (...)

7. Las creencias pueden sostenerse con un grado variable de certeza (...)".

En resumen, la estructura del sistema de creencias de un sujeto ayuda a explicar algunos comportamientos, como por ejemplo que sostenga al mismo tiempo creencias contradictorias entre sí o que se resista a cambiar aquellas que no son adecuadas, a pesar de ofrecerle "razones evidentes" para modificarlas. En estos casos la inconsistencia y la estabilidad del sistema de creencias, en mayor o menor grado, se debe a que estén más o menos ligadas entre sí y más o menos agrupadas y enclaustradas.

Pero para poder modificar las creencias es necesario conocer no sólo su forma de relacionarse y de agruparse, sino también el tipo de relación que se da entre ellas, es decir, si son primarias o derivadas, centrales o periféricas, porque en la medida en que se trate de desestabilizar y cambiar las creencias primarias y centrales, se producirá una "crisis" mayor en el sistema de creencias del sujeto, que deberá reestructurarse y reconstruirse para estabilizarse de nuevo.

2.5 Creencias y prácticas

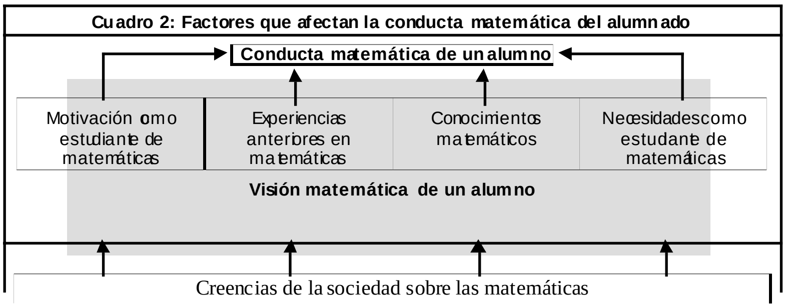
El interés por conocer la estructura de los sistemas de creencias de los estudiantes, del profesorado y, en general, de otros agentes educativos, radica en el hecho de que inciden en sus comportamientos, ayudan a explicarlos y ofrecen pistas para tratar de modificarlos. Las creencias influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplica la matemática; a su vez, la forma de aprender y utilizar la matemática configura las creencias. Aunque las creencias y las prácticas forman un círculo que a veces es difícil de romper, se puede intentar quebrar por algún lado: se ha constatado que los cambios en las prácticas de la clase pueden modificar las creencias tanto del profesorado como del alumnado.

Según E. Pehkonen y G. Törner (1996:102) "las creencias pueden tener un poderoso impacto en la forma en que los alumnos aprenden y utilizan las matemáticas y, por tanto, pueden ser un obstáculo al aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos que tienen unas creencias rígidas y negativas de las matemáticas y su aprendizaje, fácilmente se convertirán en aprendices pasivos, que cuando aprenden enfatizan la memoria sobre la comprensión". Añaden que la influencia de las creencias sobre las prácticas se puede entender de distintos modos:

- como un sistema regulador;
- como un indicador;
- como una fuerza inerte;
- como una consecuencia de los aspectos anteriores que llamaremos "carácter pronóstico".

Las creencias matemáticas de un individuo, su punto de vista matemático, forman un *sistema regulador de su estructura de conocimiento*; dentro de este marco actúa y piensa y a su vez este marco influye fuertemente en su rendimiento. Por ejemplo, si un estudiante considera que la resolución de un problema es un proceso lineal donde no hay lugar para hacer ensayo y error, abandonará un problema cuando se le presente la primera dificultad y como consecuencia sus posibilidades de aprendizaje se verán mermadas.

Para concretar este carácter regulador de las creencias, M.L. Frank (1985) ha señalado algunos factores que afectan a la conducta del alumnado cuando resuelve problemas, que E. Pehkonen y G. Törner (1996) han adaptado e ilustrado con el esquema del cuadro 2.



En él las creencias de un alumno, entendidas como su visión matemática, aparecen como trama de fondo de sus motivaciones, sus experiencias, sus conocimientos y sus necesidades como estudiante, e influyen sustantivamente sobre sus prácticas. Dos aspectos están más estrechamente relacionados con las creencias: las experiencias previas, que influyen a menudo de forma inconsciente, y los conocimientos matemáticos, en los que las creencias están fuertemente involucradas. Sin embargo, la motivación y las necesidades de un alumno no siempre están conectadas con sus creencias.

Por último, las creencias de la sociedad, como pueden ser algunos mitos (matemáticas = cálculo o matemáticas = abstracción y manipulación de números), afectan a la conducta matemática del alumnado a través de su sistema de creencias. Estas creencias se comparten de forma más o menos explícita en distintos ámbitos de socialización, además de la escuela: en la familia, en los grupos de iguales, entre los compañeros, en los medios de comunicación social, etc. En estos espacios las creencias dominantes desde el punto de vista de su frecuencia o de su centralidad psicológica, pueden entrar en conflicto con otras. Por ejemplo, mientras los medios de comunicación social suelen presentar a menudo una imagen de la matemática como una ciencia difícil y aburrida, como un filtro académico de selección y, en el peor de los casos, como un ogro, en un club matemático ésta aparece con un rostro más amable que tiene que ver con la belleza, el juego, la historia de las ideas, etc. Los alumnos viven pues dentro de una compleja red de influencias en las que la matemática está presente, que va modelando sus creencias en torno a la matemática y al quehacer matemático.

En cuanto al segundo aspecto, las creencias juegan un papel de *indicador* de aspectos que no son directamente observables. En el caso del alumnado, nos permiten, por ejemplo, hacer inferencias sobre su experiencia escolar anterior de enseñanza/aprendizaje.

Con relación al *aspecto inercial* (en sentido negativo), las prácticas que han tenido éxito durante un tiempo prolongado y sus creencias asociadas, están a veces tan profundamente arraigadas que si un alumno tiene una determinada visión de la matemática, por ejemplo una visión rígida, cualquier otro enfoque le confundirá. Ante esta situación algunos alumnos mantienen sistemas de creencias dualistas, otros optan por rechazar como "matemáticas" aquellas actividades que no se adecuan a sus creencias; en fin otros ponen en crisis sus propias creencias. Por tanto si se quieren introducir cambios profundos en la clase de matemáticas, se ha de tener en cuenta pues que las creencias de profesores y alumnos actúan como una fuerza de inercia.

3 Creencias de un grupo de alumnos

Tras exponer qué son las creencias, sus semejanzas y diferencias con otros conceptos y sus relaciones con las prácticas, pasamos a presentar y a comentar ejemplos concretos.

En una investigación reciente (Vila, 2001) hemos identificado los sistemas de creencias predominantes en un grupo de alumnos de Primer curso de Secundaria Obligatoria, de edades comprendidas entre 11 y 12 años, procedentes de distintos centros donde han cursado la educación Primaria, aunque todos ellos en ese momento iniciaban esta etapa educativa en el mismo Instituto de Educación Secundaria (IES). Son 61 alumnos con una capacidad y voluntad de aprendizaje como mínimo en la media. Describiremos el origen y formación de sus creencias y sus consecuencias sobre sus esquemas de actuación cuando resuelven problemas no estándar.

Como elementos descriptores de estos *sistemas de creencias*, se han utilizado los siguientes:

1. la caracterización predominante de la idea de "problema de matemáticas", de la naturaleza de la *actividad de RP* y de los aspectos que inciden en el aprendizaje y mejora de la RP;
2. el análisis detallado de cada una de las categorías de creencias estudiadas, en función del objeto de la creencia;
3. la identificación de la estructura de estos sistemas de creencias, en particular:
   - los conjuntos (clusters) que delimitaban creencias estrechamente relacionadas entre ellas,
   - las creencias primarias y creencias derivadas, estas últimas establecidas o mantenidas como consecuencia de las primeras,
   - las creencias centrales y periféricas, las primeras mantenidas con mayor potencia o fuerza,

– las incoherencias o contradicciones internas del sistema de creencias.

En este artículo y remitiéndonos al mencionado estudio, expondremos solamente las principales conclusiones de la investigación relacionadas con el apartado (1).

3.1 Creencias sobre la resolución de problemas

Así, hemos encontrado que la tendencia que predomina en el Grupo es la de identificar un "problema de matemáticas" como una categoría de pregunta escolar[4], de naturaleza aritmética ("las matemáticas son cálculo"), que viene caracterizada por aspectos formales como la presentación, formato,... (p.e. "enunciado verbal es sinónimo de problema") y cuya respuesta es el resultado de los cálculos que preceptivamente se supone que propone el enunciado. En particular, la diferencia entre problema y ejercicio no se percibe en los conocimientos del resolutor sino en esas características formales que mencionábamos. Otro aspecto identificado de forma relevante en el Grupo es el que hace precisamente referencia a cuál es el papel del enunciado: se trata de una relación de mandatos que hay que saber "descifrar" (consideran que en eso consiste "entender" el problema) para a continuación saber ejecutar; es ésa la dificultad "añadida" al problema, con relación al ejercicio: la explicitación o no de lo que se espera que se haga.

Una parte importante del alumnado del Grupo mantiene fuertemente creencias en torno a la existencia de una categoría diferenciada de tareas, con denominaciones anecdóticas del estilo de "*problemas de ingenio, de lógica ...*"; el acuerdo ya no es unánime con relación a si se trata de "tareas matemáticas" o se trata de tareas que "a veces se plantean en clase de matemáticas". En cualquier caso, se les niega mayoritariamente la categoría de "*matemáticas importantes*"[5]
.

En consecuencia, la tendencia dominante es la de caracterizar la RP a la vez como una actividad de *reconocimiento / aplicación* de las técnicas trabajadas en clase y como una actividad de *acreditación* de las técnicas aprendidas. Más concretamente, resolver un problema consiste para la mayoría de los alumnos y alumnas de este Grupo en averiguar cuáles son las operaciones adecuadas para obtener el resultado pedido, resultado que es meritorio obtener a partir del método trabajado recientemente en clase, sin encontrar dificultades ni bloqueos, mediante un proceso lineal que avance directamente de los datos al resultado final. Creencias concretas que nos ilustran y ayudan a explicar esta

[4]Schoenfeld (1992) identificaba ya la creencia de que "las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real"

[5]"Sólo las matemáticas que se preguntan en clase son importantes y dignas de saberse" (Garofalo,1989)

caracterización serían las siguientes[6] : "solo hay una manera de resolver correctamente cada problema; normalmente es el método que el profesor acaba de mostrar recientemente en clase" (Schoenfeld, 1992); "la primera vez que se lee el enunciado del problema se debería ser capaz de entender inmediatamente qué se pide o qué se pretende que se calcule o se decida" (Woods, 1987); "los problemas de matemáticas son tareas para aplicar reglas aprendidas, por tanto se pueden resolver fácilmente en pocos pasos" (Frank, 1988); "la resolución de un problema se acaba cuando se encuentra la solución" (Callejo, 1994); "el resultado es más importante que el proceso seguido. Si no se encuentra la solución se ha fracasado" (Callejo, 1994).

A pesar de ser ésta la tendencia más acusada en el Grupo, el estudio de algunos casos arroja luz sobre el rango identificado. Así, en un extremo, las creencias rígidas de algunos, en el otro extremo las creencias flexibles y con una amplia visión de otros, y entre ellos una gran casuística, como por ejemplo visiones dualistas de las matemáticas y de la RP: por una parte una visión más bien rígida de la naturaleza de los "problemas habituales" y de la manera de proceder en su resolución; por otra una visión rica, abierta y flexible en cuanto a la manera de proceder en aquellos problemas que se asumen como retos.

En cuanto al aprendizaje y mejora de la actividad de RP, la tendencia subrayada en el Grupo es a centrar las claves que mejoran el *éxito* (reduciendo el significado de éste a la obtención del resultado correcto) en dos aspectos: el aprendizaje de técnicas y conceptos matemático[7] y la mecanización de métodos-tipo de resolución, dando por supuesto que éstos existen y que es papel del profesorado "enseñarlos". En particular se supravalora la importancia de la "buena lectura" del enunciado, en tanto en cuanto ésta se cree que permite identificar claramente qué es lo que se tiene que aplicar.

Una conclusión muy importante del estudio (Vila, 2001) es que el rendimiento académico en matemáticas no es una variable que determine diferencias relevantes en el conjunto de los sistemas de creencias identificados. Esta conclusión tiene una razonable explicación, que creemos que cabe buscarla en el hecho de que a menudo los instrumentos y criterios utilizados para evaluar (¿o medir?) los conocimientos en matemáticas se basan en los aspectos más algorítmicos o conceptuales de ésta, siendo por lo tanto la medida del rendimiento matemático una medida sesgada de la auténtica capacidad matemática del alumno en cuestión.

[6]hemos optado por citar redactados documentados bibliográficamente, más que por los redactados identificados de los alumnos, con los cuales se corresponden.

[7]Schoenfeld (1992) ya identificaba la visión simplista de que "los alumnos que han entendido la matemática serán capaces de resolver cualquier problema propuesto en cinco minutos o menos"

3.2 Origen y formación de las creencias

Por otra parte, en cuanto a los aspectos y *agentes* identificados con relación al *origen y formación de las creencias* del Grupo, distinguiremos los más relevantes agrupados en tres grandes categorías: los agentes que inciden o tienen lugar en el propio contexto escolar, los que inciden fuera de él y algunos aspectos afectivos sobre los cuales es importante centrar la atención.

Contexto escolar

En cuanto a los agentes internos al contexto escolar, se han identificado con especial relevancia aspectos relacionados con la naturaleza de las tareas desarrolladas y el papel del profesorado, y con una menor incidencia, pero en absoluto obviable, aspectos relacionados con el papel que juega la evaluación, las actividades de *popularización* de las matemáticas y finalmente los propios compañeros de clase.

En cuanto a la naturaleza de las tareas escolares, el estudio nos permitió distinguir a su vez dos grandes aspectos:

a) Los que podríamos englobar bajo el denominador de las experiencias vividas en cursos anteriores: se puede tratar de experiencias ricas y personalizadas, con abundancia de tareas de resolución de problemas, con metodologías centradas en trabajos en grupos y actitudes interrogativas, que inciden en la formación de sistemas de creencias muy flexibles y de un amplio rango de visiones, o se puede tratar también de experiencias rutinarias y compartimentadas, y de escaso contenido heurístico, las cuales inciden en la formación de sistemas de creencias rígidos y mecanicistas, de visiones acreditativas e ilustrativas del papel de la RP.

b) Los que pueden relacionarse con distintas tipologías y naturalezas de trabajo en clase, en función de que se desarrollen en horas de materias comunes (habitualmente rutinarias, explicación-práctica, ...) u optativas (más a menudo participativas, investigativas,...) o del profesorado que la proponga, o al menos con la percepción de que ello sea así. El estudio permitió asociar esta dualidad a la formación a su vez de sistemas de creencias dualistas, con creencias que conviven contrapuestas, llegando a dicotomizar la actividad de resolución de problemas según el contexto en el que se plantee. Un efecto a añadir es que habitualmente una de estas visiones (la rutinaria, acreditativa) acaba considerándose la “importante”, o incluso se llega a negar el carácter matemático de la otra.

En cuanto al papel del profesorado, el estudio identificó una relación poco frecuente pero sí importante entre el hecho de otorgar un papel *normativo* a la conducta matemática del profesorado (principalmente desde la perspectiva *sancionadora*) y un proceso de formación de creencias relacionado con el papel acreditativo de la resolución de problemas, normalmente originado en autoimposiciones por parte del propio alumnado. Por otra parte, las experiencias (agradables y desagradables) vividas con relación a determinados profesores “especiales”, acaban siendo a menudo modeladoras de creencias de naturaleza muy diversa.

Finalmente, en cuanto a otros aspectos del contexto escolar, la evaluación tiene una incidencia derivada principalmente del papel normativo de los exámenes (las tareas son relevantes en función de si pueden ser susceptibles de formar parte de un examen) y de la componente *sancionadora* de éstos (por la generación de incertidumbre, frustración y en algunos casos de competitividad); las actividades de *popularización* de las matemáticas tienen una incidencia que cabe relacionar parcialmente con un aspecto ya antes mencionado: la distinta naturaleza de tareas en situaciones escolares diversas; y la incidencia de los compañeros de clase cabe relacionarla con aspectos como la competitividad, el espíritu de superación, la cooperación, el individualismo ...

Agentes externos al contexto escolar

En la segunda de las grandes categorías, los agentes externos al entorno escolar, se identificaron con especial relevancia el papel que juegan los padres y familiares y el papel de los denominados mitos sociales. Con relación al primero de ellos, quisiéramos destacar dos aspectos:

a) El estudio estableció la fuerte influencia de la resolución de problemas junto con familiares directos, fuera del entorno escolar, sobre el proceso que lleva a establecer una visión dualista relacionada con la coexistencia de dos naturalezas de actividad matemática, junto con las inconsistencias en el sistema de creencias que se derivan de ellos.

b) Por otra parte, la presión familiar a la cual pueda estar sometido un alumno puede suponer un agente importante en el proceso de formación de las creencias, especialmente las relacionadas con un papel principalmente acreditativo y mecanicista de la RP. Sin embargo, el grado de presión puede ir ligado con respuestas afectivas, o canalizaciones del estímulo, relacionadas con creencias que se presentan de forma simultánea y contrapuesta a las anteriores.

Y con relación a los mitos sociales, se identificaron dos de incidencia especial, jugando el papel de reforzadores de otros agentes que pueden considerarse más relevantes: la importancia social de las matemáticas y la asociación entre matemáticas e inteligencia.

Aspectos afectivos

La tercera gran categoría identificada hace referencia a aspectos afectivos que guardan relación con la personalidad del alumnado; estos aspectos no pueden considerarse de forma estricta agentes, aunque en cualquier caso están estrechamente relacionados con otros anteriormente mencionados, jugando un papel capital en el proceso de formación de las creencias.

3.3 Consecuencias

Y finalmente, en cuanto a las consecuencias que pueden establecerse con relación a los esquemas de actuación desarrollados cuando se abordan problemas no estándar y al papel que en ellos han jugado los correspondientes sistemas de creencias, podemos mencionar que principalmente el Grupo desarrolla *esquemas ingenuos, impulsivos o irreflexivos* o bien esquemas (aunque no pueda llamárseles así) que se limitan a dar una *respuesta rápida* a la pregunta formulada en el enunciado. La práctica totalidad de los esquemas de actuación observados toman como punto de partida la manipulación (a menudo ciega) de los datos del enunciado o de aspectos parciales de éste; son minoritarios los esquemas centrados en un análisis global de la situación planteada.

Es relevante destacar que se constatan relaciones importantes entre estos esquemas de actuación y los sistemas de creencias identificados, en términos de que se observan maneras de proceder menos efectivas entre el alumnado con sistemas de creencias más rígidos o "menos adecuados", y como hemos dicho independientemente del nivel de resultados académicos. Pero es que de forma más precisa, el estudio nos permite también relacionar el sistema de creencias del alumnado con su manera de proceder y su toma de decisiones durante el proceso de resolución. Por ejemplo, ante un problema no rutinario y no estándar, pero con claros referentes numéricos, como es el de las "tiras de papel doblado" que presentamos en las primeras páginas del presente trabajo, simplificando ligeramente las conclusiones nos encontramos por una parte con aquellos alumnos que lo que destacan en él es la identificación en el enunciado de los referentes numéricos, y por otra parte con aquellos alumnos que lo que hacen es identificar y destacar el carácter no estándar del problema. En el primer caso el alumnado intenta aplicar los "métodos-tipo" de resolución, y entendiendo que la resolución del problema proviene del adecuado "descifrado" del enunciado, y por supuesto de la utilización de las últimas técnicas aprendidas en clase, es donde observamos unas interpretaciones absurdas de la situación ("descifrados ingenuos del enunciado", supravalorando su aritmeticidad). En el segundo caso, nos hallamos mayoritariamente ante alumnos que ante una situación que acaban de identificar como un no-problema de matemáticas o bien un problema de no-matemáticas, en tanto en cuanto no se requiere la aplicación de los "métodos-tipo", se limitan a dar una respuesta rápida, obviamente irreflexiva. Sin embargo, una minoría de los alumnos estudiados, reaccionan en un sentido opuesto al identificar que se hallan ante un problema no estándar: su sistema de creencias, más flexible, más rico, les induce a buscar recursos más heterodoxos (estudiar casos concretos, realizar esquemas o tablas, buscar pautas,...) lo cual les lleva abordajes eficaces de la situación planteada.

Por último, es importante destacar que el estudio nos permite afirmar que estas conclusiones pueden establecerse también si centramos el análisis en el alumnado de mayor rendimiento académico en matemáticas. ¿Qué relevancia tiene este hecho? Creemos que mucha, y más si lo relacionamos con una conclusión anteriormente mencionada en relación a que el rendimiento matemático no determina diferencias relevantes en la identificación de los sistemas de creencias. Es posible que visiones críticas hacia el planteamiento de este trabajo consideren que la importancia y el papel de las creencias matemáticas es mucho menor que la que aquí le otorgamos, y lo es en el sentido siguiente: aprendiendo matemáticas (conceptos, técnicas, procedimientos,...) ya se irá modelando la adecuada visión de qué son las matemáticas, y consecuentemente se asume que "aprendiendo más matemáticas, ya se aprende cuándo y cómo hay que utilizarlas". Creemos que el propio planteamiento teórico del trabajo en particular y de toda la bibliografía al respecto reduce a simplista, sino a completamente errónea, esta visión; pero es que además los datos citados anteriormente nos muestran que incluso los "mejores" alumnos tienen creencias inadecuadas e incluso ellos cometen errores absurdos y difícilmente explicables por otras vías, cuando sin embargo alumnos con menor "rendimiento matemático" tienen creencias más adecuadas y abordan de manera más eficaz los problemas no estándar.

Conclusión

En este artículo hemos tratado de iluminar un concepto que ayuda a explicar los comportamientos de los estudiantes y que es ambiguo y resbaladizo. También hemos presentado las creencias de un grupo de alumnos que inician la Educación Secundaria y hemos visto que las que dominan no son precisamente las más adecuadas para resolver problemas. Este mismo Grupo nos ha dado luz para conocer cómo se han ido modelando y forjando estas creencias.

Con la clarificación de este concepto y desde el contraste con una realidad concreta nos preguntamos: ¿Cómo podemos diagnosticar y evaluar las creencias del alumnado?¿Cómo podemos crear ambientes y entornos de aprendizaje que ayuden a los alumnos a abordar la actividad matemática con espíritu abierto, crítico y flexible? ¿Cómo podemos educar a las jóvenes generaciones iniciándoles en los rudimentos de una ciencia con la que pueden disfrutar y constatar sus potencialidades y capacidades para comprender, definir o demostrar? Son preguntas que hemos abordado en otro trabajo (Vila y Callejo, en imprenta) e invitamos al lector a encontrar sus propias respuestas.

Referencias

ABELSON, R.P. (1979): Differences Between Belief and Knowledge Systems. *Cognitive Science*, 3; pp. 355-366.

CALLEJO, M.L. (1994): *Un Club Matemático para la diversidad*. Narcea. Madrid.

CARRILLO, J. (1996): *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más*

de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
FISHBEIN, M. y AJZEN, I. (1975): *Belief, Attitude, Intention and Behavior: An Introduction to Theory and Research*. Addison Wesley. Reading.
FRANK, M.L. (1985): *Mathematical Beliefs and Problem Solving*. Tesis doctoral. Purdue University. University Microfilms International
FRANK, M.L. (1988): Problem Solving and Mathematical Beliefs. *Arithmetic Teacher*, 35 (5), pp. 32-34.
GAROFALO, J. (1989): Beliefs and Their Influence on Mathematical Performance. *Mathematic Teacher* 82 (7), pp. 502-505.
GREEN, T.F. (1971): Teaching and the Formation of Beliefs. En: *The Activities of Teaching*. NY. McGraw Hill, Book Co (Cap. 3)
LESTER, F.K. (1987): *Why is problem solving such a problem? Reactions to a Set of Research Papers*. PME, Montreal 1987.
LESTER, F.K., GAROFALO, J. y KROLL, D.L. (1989): Self-Confidence, Interest, Beliefs and Metacognition: Key Influences on Problem Solving Behavior. En: *MCLEOD y ADAMS (eds.) Affect and Mathematical Problem Solving*. Springer-Verlag, NY.
LLINARES, S. (1992): Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En: *MARCELO (ed): La investigación sobre la formación del profesorado: métodos de investigación y análisis de datos*. pp. 57-95. Cincel, Buenos Aires.
LÓPEZ, A. y MORENO, M.L. (1997): *Resultados de Matemáticas. Tercer estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, Madrid.
MCLEOD, D.B. (1992): Research on Affect in Mathematics Education: A reconcep-tualization. En: *GROWS, D.A. (ed:) Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. pp. 575-596. MacMillan, New York.
PEHKONEN, E. y TÖRNER, G. (1996): Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *ZDM*, 96(4); pp. 101-108.
PONTE, J.P.(1994): Mathematics teacher's professional knowledge. En: *PONTE, J.P. y MATOS, J.F. (eds.): Proceedings of 18th PME Conference*, vol I, pp. 195-210. Lisboa.
PUIG, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Comares. Granada.
ROKEACH, M. (1968): *Beliefs, Attitudes and Values*. Jassey-Bass, San Francisco.
SCHOENFELD, A.H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando.
SCHOENFELD, A.H. (1992): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics, En: *GROUWS, D.A. (eds): Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. pp. 334-389. MacMillan, New York.

THOMPSON, A.G. (1992): Teacher' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En: *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning.* MacMillan-NCTM, NewYork, pp. 127-146.
VILA, A. (1998): La idea de problema entre l'alumnat. Reflexions per a la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula. *BIAIX*, 11; pp. 16-22.
VILA, A. (2001): *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Versión PDF en www.tdcat.cesca.es/TDCat-0925101-170122/
VILA, A. y CALLEJO, M.L. (en imprenta). *Pensar en clase de matemáticas. El papel del las creencias en la resolución de problemas.* Col. Educación hoy. Narcea, Madrid
WOODS, D.R. (1987): Misconceptions about Problem Solving. *Teaching Thinking and Problem Solving.* Vol. 9(4), pp. 8-9.

María Luz Callejo
Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas.
Madrid

Antoni Vila
I.E.S. Gabriel Ferrater.
Reus

Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos

Luz Manuel Santos Trigo*

Resumen

Reformas recientes sobre el currículo matemático destacan la importancia del empleo de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de los estudiantes. ¿Qué procesos del quehacer matemático se favorecen a través del empleo sistemático de este tipo de herramientas? En este trabajo se presentan ejemplos de problemas o actividades donde se ilustra que algunas representaciones que se producen con el empleo de un software dinámico (Cabri-Geometry) pueden ayudar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas que incluyen la búsqueda de distintas soluciones, la necesidad de plantear conjeturas, el análisis de casos particulares y la importancia de buscar conexiones y significados de las ideas matemáticas.

Abstract

What aspects of mathematical practices can be enhanced through the systematic use of technological tools in students learning of mathematics? This paper illustrates a set of activities in which the utilization of dynamic software (Cabri-Geometry) might help students generate distinct types of representations that are crucial in problem solving practices. In particular, thinking of several ways to solve the problems, analyzing particular cases, relaxing particular conditions, looking for patterns, and searching for extensions or connection of the problems are activities that students have opportunity to exhibit in their approaches to the problems via the use of the software.

*Terminé de escribir este trabajo durante mi estancia académica en la Universidad de la Laguna con el grupo de Didáctica de las Matemáticas en el Departamento de Análisis Matemático. Agradezco al Dr. Matías Camacho por la invitación y ofrecerme la oportunidad de participar en varias tareas de la agenda de trabajo de su grupo de investigación.

Introducción

En una sociedad cambiante y exigente, el estudio de las matemáticas es una necesidad importante de todos los estudiantes; sin embargo, como lo mencionan Romberg y Kaput:

> ...los cambios hacen imperativo que cualquier respuesta a la pregunta ¿qué matemáticas vale la pena enseñar? sea revisada periódicamente... independientemente del contenido específico, el propósito de enseñar matemáticas puede describirse en términos de enseñar a los estudiantes a usar las matemáticas para construir y comunicar ideas, usarlas como una herramienta poderosa para analizar y resolver problemas, y quedar fascinados con los patrones que ellas abarcan y exponen (pp. 15-16).

En esta dirección resulta necesario identificar aspectos del quehacer matemático que los estudiantes deben desarrollar en sus experiencias de aprendizaje. En los últimos años se ha reconocido que el aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planten conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Además el desarrollo de herramientas tecnológicas está influyendo notablemente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. Aquí resulta relevante plantear algunas interrogantes:¿Cuándo un artefacto tecnológico llega a transformarse en una herramienta para resolver problemas? ¿Qué procesos de apropiación de la herramienta exhiben los estudiantes en sus experiencias de resolución de problemas? ¿Qué tipo de recursos y estrategias necesitan los estudiantes para transformar un artefacto en una herramienta de resolución de problemas? ¿Qué tipo de representaciones se destacan con el empleo de la tecnología? La discusión de estas preguntas ayuda a entender que el empleo de herramientas tecnológicas por parte de los estudiantes es un proceso en donde paulatinamente se apropian de la herramienta y eventualmente la utilizan en actividades matemáticas que involucren el planteamiento de conjeturas, la construcción y uso de distintas representaciones, la búsqueda sistemática de relaciones y la presentación o comunicación de resultados.

Se reconoce que el uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma de cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Balacheff & Kaput (1994) afirman que una característica única de los ambientes de aprendizaje basados en la computadora es su carácter cognitivo intrínseco. "La interacción entre un estudiante y una computadora se basa en responder a la demanda de los estudiantes vía una representación simbólica o de cálculo, donde la retroalimentación se realiza a través de un registro propio que permite leerse como un fenómeno matemático" (pp. 469-470). El National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000) identifica el uso de la tecnología como un principio que le debe dar soporte a las propuestas curriculares:

> Las calculadoras y computadoras son herramientas esenciales para la enseñanza, aprendizaje, y desarrollo de las matemáticas. Generan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y realizan cálculos de manera eficiente y precisa...Cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento, y resolución de problemas (p.24).

Un aspecto notable en el uso de la tecnología es que permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas (Santos, 2002). Aquí los estudiantes tienen la oportunidad de mover partes de estas configuraciones y observar cambios o invariantes. La identificación de invariantes en una representación resulta fundamental en el desarrollo de conjeturas y en el proceso de argumentación y comunicación de esas conjeturas por parte del estudiante. En particular, el uso de software dinámico como Cabri Geometry, Sketchpad o Geometry Inventor ofrece una herramienta poderosa para examinar relaciones geométricas desde diversos ángulos o caminos (Goldenberg & Cuoco,1998). Por ejemplo, en algunos casos resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triangulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. Arcavi & Hadas (2000) afirman que:

> Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (pp. 26).

Es decir, el uso de este tipo de software puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes participen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas. ¿Qué características poseen las actividades de aprendizaje donde el uso de la tecnología propicie en los estudiantes el desarrollo de procesos inherentes del quehacer de las matemáticas? ¿Qué tipo de preguntas consideran o formulan los estudiantes como resultado de utilizar la tecnología en el tratamiento de problemas o situaciones matemáticas? Específicamente, ¿a qué nivel el uso de software dinámico ofrece o funciona como una herramienta útil para que los estudiantes visualicen, exploren, y construyan relaciones matemáticas? Estas son algunas preguntas que sirven de referencia para presentar y discutir actividades que ilustran el potencial de este tipo de software en el tratamiento de situaciones. Algunas de las tareas que aquí se presentan han sido utilizadas en seminarios con profesores y alumnos del nivel bachillerato (grados 11 y12). El desarrollo de este trabajo se centra en documentar fases importantes que aparecen durante el uso de estas actividades y en algunos casos se suman comentarios y observaciones que emergieron durante la implementación. En particular interesa destacar la importancia de la tecnología en los procesos que enfrentan los estudiantes al visualizar, conjeturar, formular y utilizar argumentos matemáticos.

> Es improbable que los estudiantes dirijan su experimentación de manera fructífera desde el inicio. Las actividades curriculares, como las situaciones problema, deben diseñarse de tal manera que las clases de preguntas que se les planteen a los estudiantes puedan desempeñar un papel importante en la profundidad e intensidad de las experiencias de aprendizaje...Los estudiantes necesitan explicitar sus predicciones acerca del resultado de un cierto fenómeno o acción. (Arcavi & Hadas, 2000, p.26).

Las actividades o problemas que se presentan intentan ilustrar el potencial de las herramientas tecnológicas en los procesos de resolución donde se destacan: (i) la búsqueda de distintas formas de resolver un problema; (ii) la utilización de estrategias y representaciones fundamentales en el quehacer matemático; y (iii) la búsqueda de significados y conexiones en el estudio de la disciplina.

1 La importancia de buscar distintas formas de solución de un problema

¿Qué información es relevante que permita entender y diseñar un plan de solución de un problema? ¿Qué tipo de representaciones favorecen la identificación y exploración de relaciones alrededor del problema? ¿Qué tipo de herramienta tecnológica puede utilizarse como medio para representar y analizar la información importante del problema? Estas son preguntas que los estudiantes deben considerar y discutir en sus formas de interacción con el problema a resolver. En particular el empleo del software dinámico se puede transformar en una herramienta que permita a los estudiantes generar representaciones que permiten visualizar elementos claves alrededor de la solución. Los estudiantes no sólo pueden mirar, sino también medir, comparar y cambiar figuras de manera directa. Además, con el software dinámico tienen oportunidades de aprender a experimentar y detectar los casos que son susceptibles de un análisis matemático (Santos, et. al, 2003). Un ejemplo, ayuda a ponderar la importancia del empleo de distintas representaciones y la búsqueda de distintos caminos de resolver un problema. Este problema aparece en un libro clásico sobre resolución de problemas (Polya, 1945) y aquí es abordado a través del uso del software dinámico.

El problema: Construir un triángulo dado un lado a, su altura h, perpendicular al lado a, y el ángulo α, opuesto al lado .

Es importante mencionar que este problema aparecía como parte del material a discutir en un curso de resolución de problemas. Los estudiantes inicialmente mostraron dificultades para resolverlo; sin embargo, durante las sesiones de trabajo en grupos pequeños surgieron ideas que eventualmente se materializaron en los tres acercamientos que a continuación se presentan. Sin duda que el uso del software dinámico fue crucial en las fases de representación, plan de trabajo y solución del problema.

Primer Acercamiento: ¿Cómo representar los datos del problema? ¿Qué representaciones nos permiten visualizar relaciones entre los datos? Este tipo de preguntas sirvieron de marco para realizar la siguiente construcción:

1. Dibuje un segmento AB que representa el lado a.
2. Dibuje una recta L que pasa por B y realice una rotación de la recta L alrededor del punto B de un ángulo de medida α. Identifique esa recta como L'.
3. Dibuje una recta paralela a L que pase por el punto A. Esta recta interseca a L' en el punto C. El ángulo ACB tiene la medida del ángulo α. (figura 1).

¿Cuál es el lugar geométrico del punto C cuando la recta L gira alrededor del punto B?

Se observa que el lugar geométrico es una circunferencia (figura 2). En esta representación se traza el segmento $AP = h$ perpendicular a AB y una recta M paralela al segmento AB que pase por el punto P. Esta recta corta a la circunferencia en los puntos Q y Q' (figura 3).

Cuando el punto C coincide con los puntos Q y Q', entonces los triángulos ABQ y ABQ' satisfacen las condiciones del problema (figura 4).

Segundo Acercamiento. Otro método de solución se basa en dibujar inicialmente el ángulo α e identificar un punto P sobre uno de los rayos del

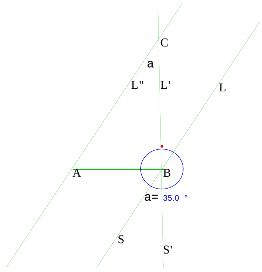


Figura 1. Representación del problema, ubicación del segmento y ángulo

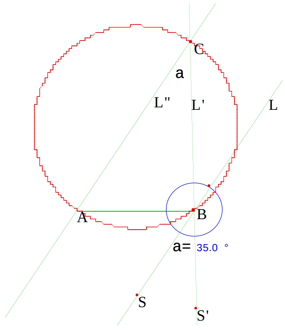


Figura 2. Generación de un lugar geométrico

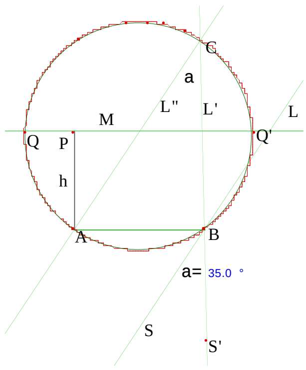


Figura 3. Ubicando la altura del triángulo en la construcción

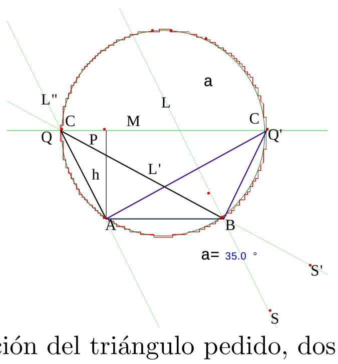


Figura 4. Construcción del triángulo pedido, dos soluciones

ángulo. Posteriormente, se construye una circunferencia con centro en P y radio la longitud del segmento a. Con estos elementos se identifica el triángulo RQP (figura 5).

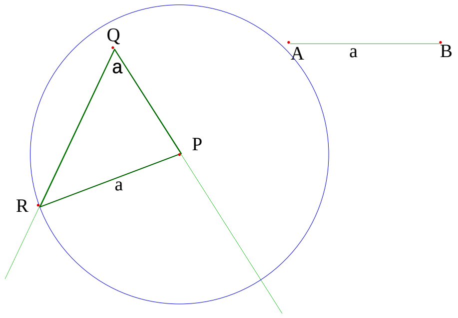


Figura 5. Construcción de dos datos del problema, el lado y un ángulo

El siguiente paso es construir una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo RQP (su centro se determina con la intersección de sus mediatrices) (figura 6).

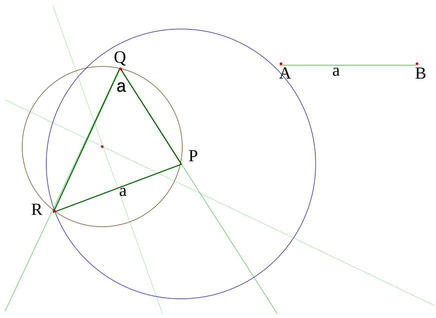


Figura 6. Inscribir el triángulo, un paso importante hacia la solución

Se construye una recta L paralela al segmento a (lado RP) a una distancia h. Esta recta L corta a la circunferencia en los puntos S y T. Así los triángulos SRP y TPR representan la solución del problema (figura 7).

Tercer Acercamiento. Esta forma de solución se basa en utilizar la relación que existe entre el ángulo central e inscrito en una circunferencia. Así se construye un triángulo isósceles con un ángulo C de medida 2α (figura 8). Se observa que los ángulos A y B son congruentes ya que AC y BC son iguales. Con esta información se tiene que si la medida del ángulo C es 2α entonces la medida del ángulo A es $90 - \alpha$.

Para completar la construcción del triángulo se realiza la siguiente construcción:

1. Dibuja el segmento AB que representa al segmento a.

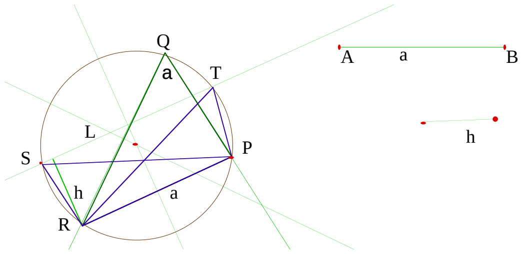


Figura 7. Construcción del triángulo, dos soluciones

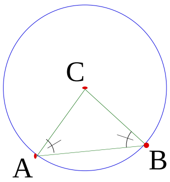


Figura 8. Construcción de un ángulo central

2. Se gira el segmento AB alrededor del punto A un ángulo de $90 - \alpha$.

3. Construye la mediatriz del segmento AB y se localiza el punto C (la intersección entre la mediatriz y segmento AB). El punto C es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos A y B (figura 9).

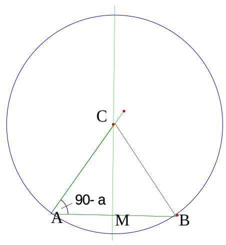


Figura 9. Determinación del centro de la circunferencia

4. Sobre la recta MC, se dibuja el segmento MP igual a la altura h y se dibuja una recta paralela al segmento AB que pase por el punto P. Esta recta corta a la circunferencia en los puntos Q y Q' (figura 10).

5. Así, existen dos soluciones que cumplen las condiciones requeridas, estos son los triángulos ABQ y ABQ' (figura 11).

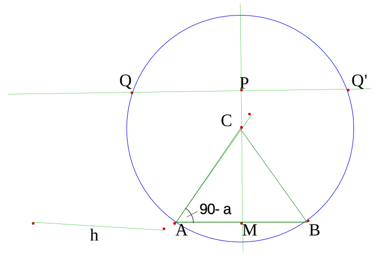


Figura 10. Ubicación de la altura

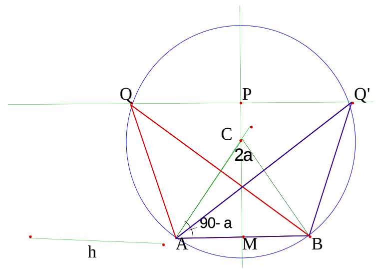


Figura 11. Construcción del triángulo, dos soluciones

Se observa que en el primer acercamiento, el empleo de la herramienta fue importante en determinar el lugar geométrico del punto asociado con el vértice del ángulo, mientras que en los otros acercamientos la precisión y la forma fácil de mover objetos resultó crucial en el diseño de un plan que eventualmente permitió resolver el problema. Contenidos y procesos matemáticos que se destacan en los diferentes métodos de solución se relacionan con propiedades del ángulo central e inscrito de una circunferencia, propiedades de la mediatriz, visualización y determinación de lugares geométricos, y la observación de patrones y el planteamiento de conjeturas.

2 Uso de Casos Particulares y Relajamiento de Condiciones Iniciales.

Existen diversas estrategias de resolución de problemas que cuando se trabajan con el uso de la tecnología adquieren una dimensión notable en el proceso de solución o tratamiento de situaciones. La siguiente actividad ilustra el uso de estrategias como la consideración de casos particulares, el relajamiento de consideraciones iniciales, y el uso de diversas representaciones durante las fases de entendimiento y diseño de un plan de solución. Con el empleo del software se puede generar representaciones dinámicas donde se visualice el comportamiento de ciertos parámetros que generen información o elementos suficientes para el planteamiento de alguna conjetura (Goldenberg & Cuoco, 1998).

La Actividad: Inscribir un Triángulo Equilátero en un Triángulo Dado. ¿Qué significa inscribir un triángulo particular en un triángulo dado? ¿Puedo iniciar la construcción con un triángulo equilátero con sólo dos de sus vértices en el triángulo dado? ¿Qué ocurre con el otro vértice cuando se mueve uno de los otros dos vértices sobre un lado? En atención a estas preguntas los estudiantes pueden inicialmente proponer la construcción de un caso particular y emplear las propiedades del software dinámico para completar la construcción. En este caso, los puntos A, B, y C representan los vértices del triángulo dado y el triángulo equilátero que se inscribe en el triángulo ABC es VWT (figura 12). Una estrategia importante al abordar la construcción del triángulo inscrito es que inicialmente se construye un triángulo equilátero con vértices sobre dos lados del triángulo dado (relajamiento de las condiciones iniciales). Los pasos para realizar esta construcción y demostrar que se trata del triángulo pedido se muestran a continuación.

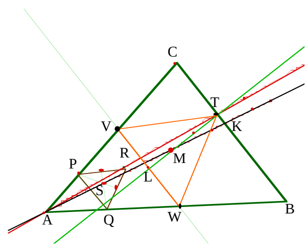


Figura 12. Inscribir un triángulo equilátero en un triángulo dado

(i) Se da el triángulo ABC, se construye un punto P sobre el lado AC. Del punto P se traza el segmento PQ paralelo al lado BC. Tomando al segmento PQ como un lado se construye el triángulo equilátero PQR.

(ii) Con la ayuda del software se puede determinar el lugar geométrico o rastro del vértice R cuando el punto P se mueve a lo largo del lado AC. Se observa que el lugar geométrico es una recta que corta al lado BC en el punto T. Este punto de intersección es candidato a ser un vértice del triángulo inscrito.

(iii) Se determina el centro S del triángulo equilátero PQR y se encuentra el lugar geométrico del punto S cuando el punto P se mueve a lo largo del lado AC. Este lugar geométrico es también una recta que corta al lado BC en el punto K.

Justificación o Prueba Se dibuja una línea perpendicular al segmento PQ que pase por T. La intersección (M) de esta línea con la recta que describe el centro del triángulo PQR será el centro del triángulo inscrito. En virtud de que este centro se localiza a una distancia de $2/3$ del vértice T, entonces L se encuentra sobre la línea TM a una distancia de $1/3$ desde M. Se dibuja una recta paralela a PQ que pase por L, los puntos de intersección de esta recta con los lados del triángulo determinan los otros dos vértices del triángulo inscrito. Así, el triángulo inscrito en el triángulo dado es el triángulo VWT.

3 La importancia de conectar contenidos y significados

Una meta fundamental en el estudio de las matemáticas es que los alumnos establezcan conexiones y significados de los conceptos matemáticos no solamente dentro de la misma disciplina sino también con otras áreas del conocimiento. La tecnología puede ayudar a que los estudiantes exploren y conecten diversos temas y áreas de las matemáticas (Santos, 2001).

En la geometría euclidiana, los alumnos examinan con detalle distintas propiedades de los triángulos (tipos, formas de construcción, propiedades, etc.). En la siguiente actividad, la construcción de un triángulo sirve como plataforma para discutir propiedades de una elipse.

> Dados dos segmentos, uno representa el lado de un triángulo y el otro la suma de los otros dos lados. ¿Puedes construir un triángulo a partir de esta información? Al efectuar la construcción, ¿es ese triángulo único?

¿Cómo puedo construir un triángulo? ¿Qué información es necesaria? Si AB representa uno de los lados del triángulo y DE representa la suma de los dos lados, entonces ¿dónde debo ubicar al punto C para poder construir el triángulo? ¿Cuál es la relación entre el lado AB y el segmento de la suma DE? ¿Cómo puedo representar este problema a través del software? Estas fueron algunas preguntas iniciales que sirvieron de base para plantear un plan de solución. El trabajo y las ideas que mostraron los estudiantes al trabajar esta actividad se describe en las siguientes fases:

(i) El segmento AB representa un lado de un triángulo. El segmento $DE = DC + CE$ representa la suma de sus otros dos lados (figura 13).

(ii) Con la ayuda del software, en particular la herramienta del compás, los alumnos dibujaron dos circunferencias. Uno con centro en A y radio DC y otro con centro en B y radio CE. Estas circunferencias se cortan en los puntos P y Q (figura 14).

Los estudiantes observaron que los triángulos ABP y ABQ satisfacían las condiciones del problema. También notaron que cuando el punto C se aproxima a alguno de los extremos D o E, las circunferencias no se intersecan (figura 15).

¿Cuál es el camino o la huella que dejan los puntos P y Q (intersección de los circunferencias) cuando se mueve el punto C sobre el segmento DE? (figura 16).

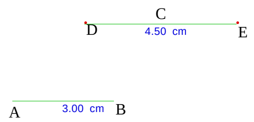


Figura 13. Representación de dos segmentos, AB el lado de un triángulo y DE la suma de los otros dos lados

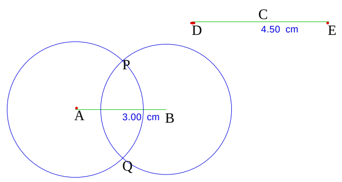


Figura 14: Construcción de un triángulo con las condiciones establecidas

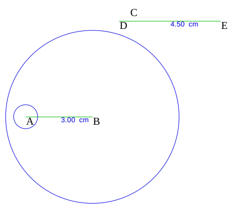


Figura 15: Cuando un lado es mayor que la suma de los otros dos el triángulo no existe

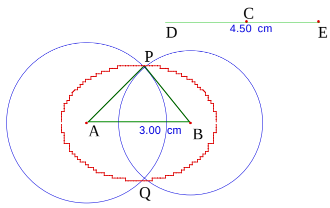


Figura 16: La construcción de una elipse

Con la ayuda del software los estudiantes observaron que el lugar geométrico se trataba de una elipse, definida como el conjunto de puntos en un plano cuya distancia a dos puntos fijos es una suma constante y cuyos focos eran los puntos A y B. De aquí observaron que era posible construir muchos triángulos que satisfacen las condiciones pedidas. También reportaron que había algunos puntos sobre la elipse donde la construcción del triángulo no era posible. En particular, observaron que cuando el punto C (el cuál es un punto sobre el lugar geométrico) se mueve a lo largo del segmento DE, existe una parte del segmento en donde al pasar el punto C, el triángulo desaparece. Los estudiantes le asignaron medidas a los lados del triángulo y documentaron que en este caso (cuando el triángulo desaparece) la suma de los lados es menor que la longitud del otro lado del triángulo. Reafirmaron que una condición necesaria para la construcción del triángulo es que la suma de las longitudes de dos de sus lados siempre debe ser mayor que la longitud del tercer lado (figura 17).

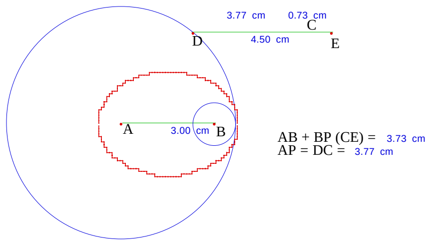


Figura 17: Verificando la desigualdad del triángulo, para justificar su construcción

Después de la discusión sobre la existencia de triángulos con las condiciones iniciales dadas, se orientó a los estudiantes a realizar la siguiente construcción.

Sobre la figura de la elipse realizar las siguientes construcciones:

(i) Trazar la recta que pasa por los focos A y B. Localizar un punto P sobre la recta y el punto O que es el punto medio del segmento AB. También seleccionar un punto Q sobre la elipse y Q' que es el punto reflejado de Q con respecto a la recta AB (figura 18).

(ii) Trazar la recta PQ y $Q'O$, estas se cortan en un punto S (figura 19).

¿Cuál es el lugar geométrico del punto S cuando el punto Q se mueve sobre la elipse? Describir el lugar geométrico o la huella que deja un punto cuando se mueve otro en una configuración resulta ser una acción difícil, sin embargo, con la ayuda del software esta tarea es inmediata (figura 20). Otra vez, el software se convierte en una poderosa herramienta para el estudiante ya que le ayuda a visualizar el comportamiento de algunas partes dentro de una configuración geométrica.

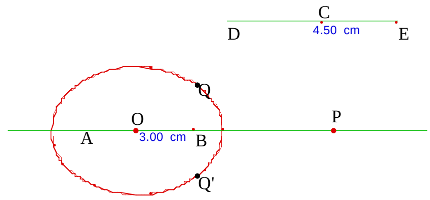


Figura 18: Ensamblando otra configuración

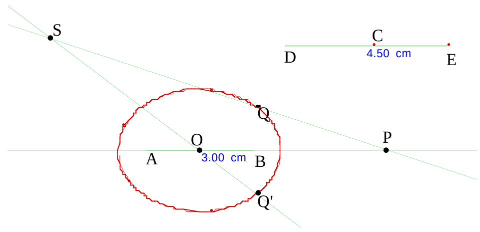


Figura 19: Conectando puntos y rectas

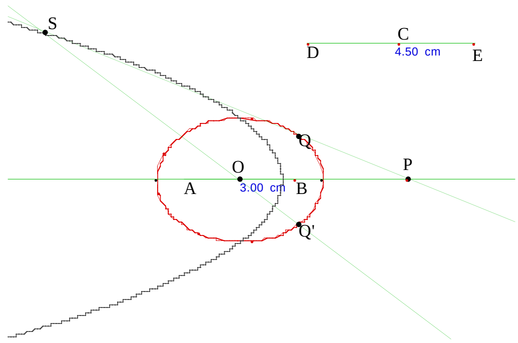


Figura 20: Generación de otros lugares geométricos

Por los rasgos del lugar geométrico parece que se trata de una parábola. De hecho, la tarea aquí se traduce en buscar argumentos geométricos o algebraicos que sustenten la afirmación. En realidad los estudiantes demostraron que cuando el punto P coincide con el punto simétrico del punto O (centro de la elipse) con respecto a uno de los vértices de la elipse, entonces el lugar geométrico se trata de una parábola.

Partiendo de la construcción anterior, los estudiantes observaron que cuando el punto P se mueve a lo largo de la recta AB, el lugar geométrico produce otras figuras. Por ejemplo, cuando P está cerca de uno de los vértices de la elipse aparece la figura 21.

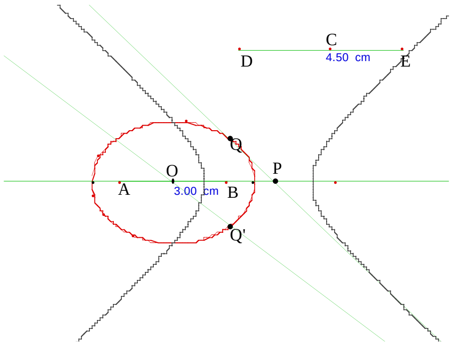


Figura 21: El lugar geométrico de una hipérbola

Cuando P se aleja a cierta distancia de uno de los vértices de la elipse, se produce lo siguiente (figura 22).

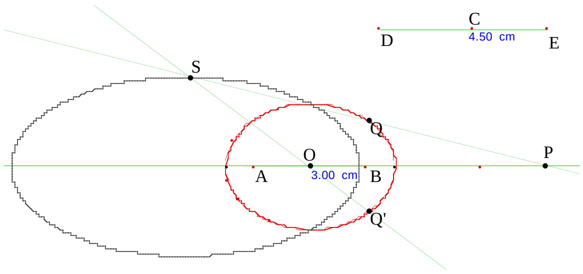


Figura 22: La generación de una elipse

Para demostrar que los lugares geométricos generados a partir de mover el punto P sobre la recta AB, los estudiantes establecieron un sistema de referencia (figura 23) y determinaron elementos asociados a cada uno de las figuras (focos, directriz, vértices, centro, etc.). Esto también les ayudó a verificar propiedades que ellos conocían acerca de esos lugares.

4 Comentarios Finales.

El desarrollo de la tecnología ha influido notablemente en la forma de hacer y aprender matemáticas. En particular el empleo del software dinámico ofrece claras ventajas a los estudiantes para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Cuando los estudiantes interactúan con las construcciones, pueden

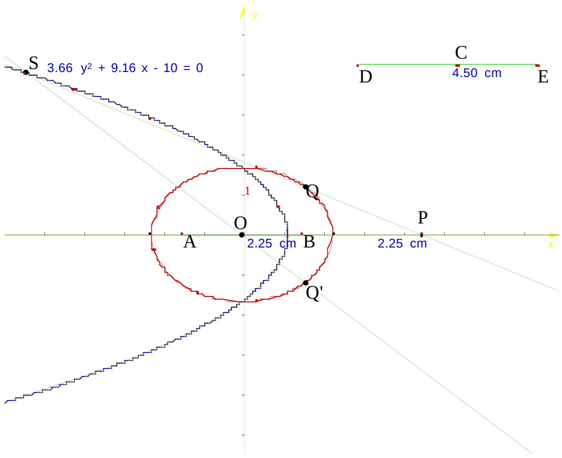


Figura 23: La necesidad de presentar un argumento que justifique las propiedades de las cónicas

resultar que existe demasiada información que inicialmente podría ser relevante para ellos. ¿Qué tipo de recursos necesitan los estudiantes para que el resultado de sus exploraciones incluya relaciones o resultados propios de la disciplina? Es una pregunta que se relaciona con la disposición matemática que los estudiantes posean y está ligada con los valores y creencias que se fomenten en sus experiencias con la disciplina. Una meta importante es que los estudiantes eventualmente identifiquen el uso de la computadora o calculadora como una herramienta que les permite ampliar sus capacidades cognitivas. En este sentido, la tecnología funciona como una lente que le permite al estudiante observar y explorar situaciones desde diversos ángulos.

Aquí el papel del profesor resulta fundamental para dirigir la atención de los estudiantes hacia comportamientos particulares de la configuración o figura (invariantes, por ejemplo). Además, es evidente que para que el estudiantes reconozca elipses, hipérbolas o parábolas este debe conocer cierta información relacionada con estas figuras. De hecho, en algunos casos las figuras que aparecen en la interacción con el software pueden servir para verificar propiedades que ellos recordaban de estos lugares geométricos. De manera general, el software funciona como una herramienta útil para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las soporten. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de software.

Nota: Este trabajo resulta del desarrollo de un proyecto (#42295-S) financiado por el Conacyt, México. Se agradece el apoyo recibido durante las

distintas fases de producción de este artículo.

Referencias

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, pp..469-501. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R.Leher & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 351- 367. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton NJ: Princeton University Press.

Romberg, T. A. & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promote understanding*, pp. 3-17. Mahwah, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Santos, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, pp.247-258.

Santos, M. (2002). Enhancing students cognitive systems via the use of technology in mathematical problem solving. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*, pp. 158-174. Mexico: PMENA.

Santos, M, Agüero, E., Borbón, A., & Páez, C. (2003). Students' use of technology in mathematical problems solving: Transforming technological artifacts into mathematical tools. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, vol. 4, pp. 119-126.* International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Hawai, Honolulu, HI, USA.

Luz Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
msantos@mail.cinvestav.mx

Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología

Fernando Hitt

Resumen

En este documento analizaremos la construcción de conceptos desde una teoría de las representaciones por parte de los estudiantes, y en particular sobre la problemática del uso de la calculadora gráfica para la construcción de conceptos en el aula de matemáticas. El desarrollo de la tecnología y la capacidad de graficación de las computadoras y calculadoras impulsó el estudio del rol que juegan las diferentes representaciones de un concepto matemático en su construcción. Sabemos que las representaciones de un concepto matemático, solo representan una parte del mismo, por lo tanto, el tratamiento de las diferentes representaciones del concepto es lo que nos permitirá su construcción. Es decir, las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión. ¿Cuál es el papel de la tecnología en este contexto? Nuestro propósito es el de discutir sobre el uso reflexivo de la tecnología en el aula de matemáticas.

Summary

This paper focuses on students construction of concepts from a theoretical perspective based on representations. In particular, we recognize that representations associated with a mathematical concept only represent part of it, and the process of relating and transforming those representations will play a fundamental role in its construction. That is, conversions among distinct representations and coherent treatments (manipulation of transformations) will eventually lead to a solid construction of such concept. What is the role of technology in this context? Our goal in this paper is to discuss the reflexive use of technology in students' mathematical learning.

Problemática en el aprendizaje de las matemáticas

Investigaciones recientes que intentan explicar los fenómenos ligados al aprendizaje de las matemáticas han mostrado lo complejo que puede ser la adquisición de conocimientos. Las metodologías de investigación para analizar la construcción de conceptos matemáticos cada vez son más finas, y los resultados de investigación nos muestran que, en general, debemos abordar esta problemática desde varios puntos de vista. Uno, de corte general, que tiene que ver, con la adquisición de conocimiento y consideraciones teóricas sobre la construcción de conceptos matemáticos; y otro, que tiene que ver directamente con la complejidad intrínseca del concepto matemático en cuestión.

Los dos puntos de vista se deben tratar desde una misma base teórica. Nuestro planteamiento se puede ubicar desde una perspectiva constructivista. Dentro de esta teoría del aprendizaje es importante especificar qué aspectos teóricos son los que uno trata, ya que en general, uno se ubica dentro de esta corriente como oposición a la teoría conductista sin explicitar los elementos teóricos considerados al tomar alguna posición. En lo que sigue, iremos describiendo esos aspectos teóricos y conectándolos con aplicaciones hacia la enseñanza de las matemáticas. En este documento no es nuestra intención profundizar sobre esos aspectos teóricos (para una mejor acercamiento de ese punto de vista ver Hitt, 2002a, 2003a).

El avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de conceptos. Ahora, con la tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado.

Desde una perspectiva teórica, donde la tecnología no queda excluida pero tampoco es central, Duval (1998, p. 175) señala que:

> "...estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos".

Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval (Idem, p. 185) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación.

Dentro de este marco de referencia, la visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema. Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros estudiantes. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático. Skemp (1971) ya señalaba que no debemos olvidar que en la transición hacia un pensamiento matemático avanzado la formalización y sistematización de la matemática es una de las últimas etapas y no la única actividad matemática.

En lo que sigue, intentamos clarificar nuestra posición con diferentes ejemplos con experimentaciones realizadas tanto con estudiantes como con profesores en formación para la escuela preuniversitaria. Además, a lo largo de este artículo queremos hacer énfasis en que el uso de la tecnología per se no va a resolver el problema del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes; es por ello, que hemos iniciado este trabajo con algunas consideraciones teóricas que serán importantes de tener en cuenta cuando elaboremos materiales para el aula de matemáticas en ambientes de los llamados "*papel, lápiz y tecnología*".

Desarrollo de habilidades sobre la visualización matemática

¿Por qué debemos desarrollar habilidades en nuestros estudiantes sobre la visualización matemática? Existen muchas investigaciones que nos muestran de manera contundente que los estudiantes de diferentes niveles educativos tienen una gran resistencia a utilizar diferentes representaciones que podrían ayudarlos tanto en la construcción de conocimiento matemático como en la resolución de problemas. Por ejemplo, Eisenberg y Dreyfus (1990) nos han demostrado que existe una resistencia por parte de estudiantes y profesores a visualizar en matemáticas.

Tomemos un ejemplo desarrollado en Hitt (2003b), supongamos que proponemos a nuestros estudiantes que resuelvan la siguiente ecuación $(x-1)^2 = (x+1)^2$. Nuestra experiencia nos indica que en general este tipo de ejercicios es difícil para los estudiantes de enseñanza media ¿Por qué? Una explicación es que, los estudiantes están acostumbrados a trabajar en el sistema algebraico por lo que son propensos a cometer errores que dificultan sus procesos de resolución. Un ejemplo de actuación sería transformar la expresión $(x-1)^2 = (x+1)^2$, en la expresión $\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2}$ y obtener que $(x-1) = (x+1)$, llegando a que $-1 = 1$ y de aqui inferir resultados contradictorios.

Una gráfica como la de la Figura 1, seguramente les plantearía la necesidad de revisar su proceso algebraico.

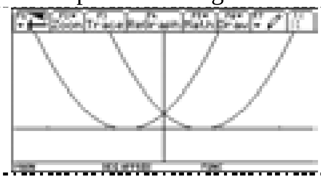
Representación algebraica	Representación gráfica
$(x - 1)^2 = (x + 1)^2$	

Figura 1

¿Por qué nuestros estudiantes no consideran las representaciones geométricas como complementarias en los procesos de resolución de problemas?

En este contexto surge el siguiente interrogante:

¿El profesor de matemáticas se ha preocupado por construir un concepto matemático en términos de una articulación coherente entre representaciones del concepto en cuestión?

De acuerdo a las consideraciones teóricas de Duval (Idem), para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra, y viceversa. Son éstas las que propiciarán la construcción de los conceptos matemáticos. Las investigaciones en educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas en su práctica docente.

Entonces, de acuerdo a la teoría sobre la importancia del uso de diferentes representaciones en la enseñanza de las matemáticas, lo que debemos hacer es introducir los conceptos matemáticos a través de actividades que propicien el trabajo con diferentes representaciones.

La tarea así puesta parece fácil, pero ¿Habrá algún tipo de dificultad con esta nueva orientación de la enseñanza?

Percibir y visualizar

La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo. Por ejemplo, podemos percibir una mosca que vuela y no prestamos atención a ese hecho, sin embargo, al querer atravesar una calle y vemos un coche que viene hacia nosotros, realizamos un acto de conocimiento directo en términos de evaluar su velocidad y decidir si es conveniente atravesar o no la calle. Esto último, visualizar, generalmente lo hacemos inconscientemente. ¿Es posible desarrollar en nuestros estudiantes habilidades sobre la visualización matemática?

En este contexto y en relación con la problemática que hemos estado argumentando, Zimmermann (1990, p. 136) afirma que:

> *Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y ... en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido.*

Con lo anterior queremos señalar que por ejemplo, podemos proporcionar una gráfica a un estudiante y él podrá percibir algunos rasgos de lo que se presenta, pero, posiblemente, no haya mayor trascendencia. Si queremos que el estudiante visualice una gráfica, esta tarea demanda una actividad mental más profunda en el sentido de reconocimiento de ciertos subconceptos allí representados. De hecho, desde el punto de vista teórico de Duval, debemos centrar nuestra atención a entender los problemas que surgen al desarrollar una tarea de conversión entre representaciones.

Clarifiquemos este punto con un ejemplo de un caso de una entrevista a un profesor de enseñanza media. Se le solicitó al profesor que proporcionara una definición de derivada de una función en un punto.

El profesor señaló que una función *f* es derivable en un punto "*x*" si el siguiente límite existe:

$$\lim_{h \to 0} \left(f(x+h) - f(x) \right) / h$$

Al solicitarle que explicara gráficamente la expresión algebraica, mostró la figura adjunta. Figura clásica que se encuentra en los libros de texto.

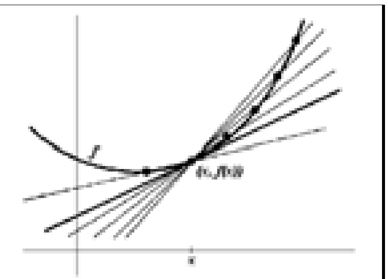


Figura 2

Posterior a esta respuesta, se le pidió que graficara la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y que la analizara para "$x = 0$". El profesor realizó un dibujo como el siguiente y afirmó que la derivada en $x = 0$ era igual a cero (ver Figuras 3 y 4).

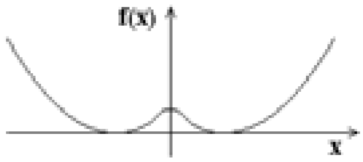


Figura 3

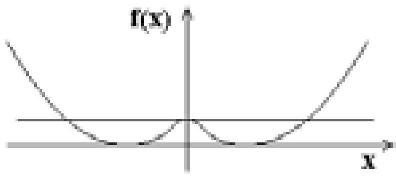


Figura 4

Mi sugerencia en ese momento fue que tomara su idea geométrica como conjetura y que la justificara con un proceso algebraico. Su respuesta fue:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)^2 - (0+1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (h-2) = -2$$

Si el profesor hubiera utilizado una calculadora gráfica, probablemente el resultado en pantalla le hubiera sugerido revisar su primera idea permitiéndole observar que en cero la función no es derivable. Debo mencionar que el profesor en esta experimentación tenía acceso a una calculadora TI-92 que tiene posibilidades para graficar funciones por partes. Para los fines de la experimentación, en este caso, la calculadora no hubiera permitido que el profesor confrontara sus ideas intuitivas sobre la gráfica de la función y su definición de derivada. De hecho, el profesor mencionó que en su definición la "h" era positiva! A insistencia del entrevistador, el profesor tuvo la oportunidad de reflexionar sobre su definición y examinar con mayor detalle la representación gráfica de su definición, otorgándole mayor atención al cálculo de la derivada por la izquierda y por la derecha y a darse cuenta que la representación gráfica que siempre había utilizado le había hecho creer que la "h" siempre era positiva.

Por otro lado, es importante señalar el hecho de que para el profesor fue importante que se percatara por sí mismo de la existencia de una contradicción, ello fue un elemento de avance en su reconstrucción del concepto de derivada.

Con este ejemplo, queremos señalar que tenemos una gran tendencia a dar por sentado que la lectura de gráficas es una habilidad menor que no tiene mucha trascendencia en la construcción de conceptos y dentro de una teoría de las representaciones no es así. Es decir, que la coordinación entre representaciones no es trivial (ver Hitt, 1994 y 1998) y que promover la articulación entre representaciones es una tarea que tenemos que considerar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Veamos algunos ejemplos sobre la importancia de usar la tecnología con mayor cuidado del que usualmente se tiene en el aula de matemáticas. La lectura de gráficas no es una actividad fácil para los estudiantes. De hecho, existen muchas dificultades al respecto. Cuando se empezó a utilizar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, los primeros problemas que se detectaron fueron los de falsas interpretaciones por parte de los estudiantes, porque exclusivamente realizaban una sola gráfica.

Veamos el siguiente ejemplo. Si un estudiante se restringe a lo que percibe en pantalla podría asegurar que en la gráfica representada existe un punto de intersección entre las funciones $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = x^3 - x^2 - 6x$ para $-1 < x < 0$ (ver Figura 5, primeras dos gráficas). Sin embargo, utilizando la instrucción "zoom" se observa que no es así.

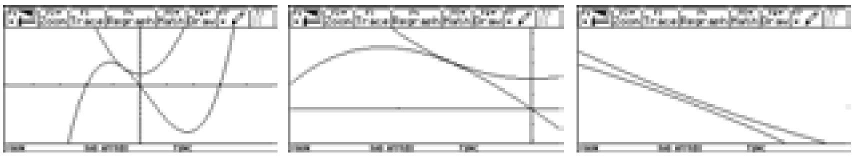


Figura 5

Insistiendo en la búsqueda de intersecciones, los estudiantes se sorprenderán que en realidad la intersección se realiza en el primer cuadrante. Una actividad interesante es la de transformar las dos funciones en otra que represente la diferencia de las mismas y buscar la raíz correspondiente por el método de Newton.

Investigaciones sobre el uso de la tecnología en países en que los alumnos de enseñanza secundaria cuentan con una calculadora gráfica, nos muestran que la problemática sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas es mucho más compleja de lo que anteriormente se pensaba.

Guin y Trouche (1998) señalan las dificultades que tuvieron sus estudiantes bajo estudio al tratar de resolver la ecuación $\tan(x) = x$, en R :

"*En una clase de 32 alumnos (17 años), solamente cuatro estudiantes señalaron una infinidad de soluciones... Los otros estudiantes mencionaron un número finito de soluciones (correspondiente a los que son visibles en la pantalla*" (ver Figura 6). En la resolución de la ecuación $\frac{\sin x}{x} = 0$, en $[0, 600]$ (ver Figura 7), señalan lo siguiente: "Entre 40 estudiantes en Terminal científico (18 años) y primer año científico de universidad (19 años) solamente el 10% respondieron cada vez que $\sin x$ se anula'".

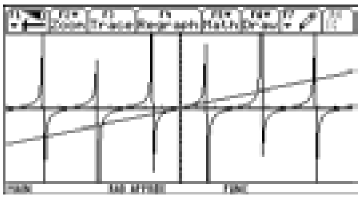


Figura 6

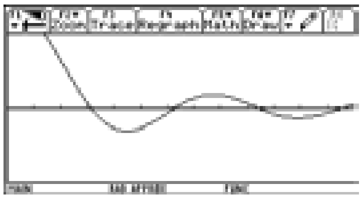


Figura 7

Es decir que la dificultad estriba en que los estudiantes no toman la pantalla como si fuera una ventana en donde solamente estamos observando una parte de la gráfica. Otra dificultad es interpretar lo que se percibe en esa ventana. Los mismos autores (Guin y Trouche) señalan que algunos alumnos consideran las asíntotas como parte de la representación gráfica de la función y por tanto, proponen más intersecciones; y otros señalan que la intersección entre las dos funciones cerca del cero se da en una infinidad de puntos.

Podría parecer que nuestro propósito es el de mostrar que el uso de tecnología no es adecuado en el aula de matemáticas, pero más bien, lo que estamos queriendo enfatizar es la importancia de hacer un uso reflexivo de la misma. Nuestra intención es la de promover habilidades de visualización matemática en el sentido de Hershkowitz, citado por Arcavi (2002), que trata la visualización matemática como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflexionar sobre información visual.

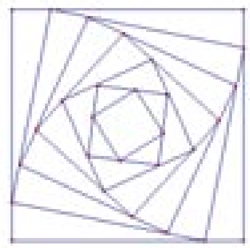
Por otro lado, es muy común que en nuestro acercamiento de enseñanza propongamos problemas que requieran una actividad bien delimitada, como la utilización de un algoritmo o un proceso por etapas como cálculos de mínimos, máximos y puntos de inflexión de alguna función derivable. En este tipo de acercamientos no dejamos cabida a lo que hace algunos años se llegó a denominar como el desarrollo del pensamiento divergente, que tiene como objetivo principal promover la conjetura y verificación de la misma con la intención de provocar una reflexión más profunda antes de promover lo que se designaba como el pensamiento convergente. En otras palabras, lo que queremos señalar es la importancia de proponer actividades a nuestros estudiantes en donde no es explícito el camino o algoritmo a seguir, para promover este tipo de pensamiento divergente.

Un par de actividades que hemos considerado interesantes se exponen a continuación y en ellas, a priori, no es fácil de determinar si estamos frente a un proceso finito o no. De hecho, en el primer caso el proceso es finito y en el segundo no, pese a que la intuición de nuestros estudiantes y de nosotros mismos, generalmente nos dice lo contrario.

Una hormiga camina sobre una tira elástica. Inicia en un extremo y recorre 6 cm por minuto. Al inicio, la tira elástica tiene 24 cm. Después de cada minuto, el elástico se alarga 12 cm. Suponga que la tira se puede alargar indefinidamente de manera uniforme.

a. *¿La hormiga llegará al otro extremo de la tira elástica? Explique su respuesta.*
b. *Si respondiste afirmativamente al inciso a), ¿en cuánto tiempo llegará la hormiga al otro extremo?*

Partiendo de un cuadrado de lado mayor que uno, trace otro al interior desplazando sus vértices como se indica en la figura: cada vértice está sobre un lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Trace otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro más y así sucesivamente.
¿Hasta dónde se puede realizar esta construcción?
Si designamos por l_n el lado del n-ésimo cuadrado, ¿Existe el límite de l_n cuando n va a infinito?



En ambos problemas es posible representar la situación mediante la tecnología lo que nos ayudaría a establecer alguna conjetura y posteriormente confirmarla con un proceso algebraico. Por ejemplo se puede utilizar la calculadora o Excel en el primer caso y algún paquete de geometría dinámica (Cabri Géomètre o SketchPad) en el otro.

Reflexiones

En general el profesor de matemáticas que rechaza el uso de tecnología dice a sus alumnos que no es necesario utilizarla ya que de cualquier modo no les servirá para realizar un proceso algebraico. Sin embargo, en el desarrollo de habilidades matemáticas, el uso de diferentes representaciones constituye una herramienta fundamental para la resolución de problemas.

Los problemas que genera el uso creativo de las calculadoras graficas son de interés en distintos países. Guin y Trouche (idem) mencionan que a pesar de que una gran mayoría de estudiantes del ciclo secundario en Francia (edades de 14 a 17 años) cuentan con una calculadora gráfica, solamente alrededor del 15% de los profesores de enseñanza media las utilizan en el salón de clases. Los mismos autores señalan que en Francia la actividad de aprender a leer gráficas no está en el currículum, y que esa habilidad, los alumnos la deben adquirir fuera del aula de matemáticas.

En el mismo sentido, Malabar et al. (1998) mencionan que a pesar del diseño del software como el Graphics Calculus (Tall et al., 1988) para utilizarse entre los 16 y 19 años en los cursos preuniversitarios en el Reino Unido, no parece ser utilizado salvo por una minoría de profesores. En donde parece haber un fuerte impulso para el uso de calculadoras gráficas es en los Estados Unidos (ver por ejemplo, Waits et al.,1998).

Desde nuestro punto de vista, tanto por los elementos teóricos considerados al inicio de este documento, como por los ejemplos desarrollados, hemos puesto de manifiesto que nos inclinamos por el uso reflexivo de la tecnología. Para ello, es necesario implementar en el aula de matemáticas (ver Hitt, 2002b) tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones. La tecnología, desde este punto de vista, servirá como herramienta fructífera para la construcción de conceptos matemáticos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

Referencias

Arcavi A. & Hadas N. (2002) Computer mediated learning: an example of an approach. In F. Hitt (Editor), Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.

Duval R. (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5 (1993).

Duval R. (1995) Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Eisenberg T. & Dreyfus T. (1990) On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Visualization in Teaching and Mathematics (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA Series. USA.

Guin D. et Trouche L. (1998) Environnements "Calculatrice symbolique": Necessité d'une socialisation des processus d'instrumentation. Evolution des comportements d'eleves au cours de ces processus. Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géometriques dans l'enseignement des mathématics (Dominique Guin Ed.). IREM de Monntpellier, France.

Guin D. & Trouche L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. International Journal of Computers for Mathematical Learning 3, pp. 195-227.

Hitt F. (1994) Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol.

16, No. 4, pp. 10-20.
Hitt F. (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior , 17(1), pp. 123-134.
Hitt F. (Editor, 2002a) Representations and Mathematics Visualization. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. México.
Hitt F. (2002b) Funciones en Contexto. México: Pearson Educación (Prentice Hall).
Hitt F. (2003a) Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg, Vol. 8, pp. 255-271.
Hitt F. (2003b) The role of the external representations in the constructions of mathematical concepts. L'educazione Matematica. Italia.
Malabar I., Pountney D. C. & Townend M. S. (1998) Combining Visual and Symbolic Skills in the Teaching and Learning of Mathematics. Proceedings of the 3rd International Derive and TI-92 Conference, Gettysburg, Penn.
Skemp R. (1971) The psychology of learning mathematics. London, Pelican.
Tall D., Van Blockland P. & Kok D. (1988) Graphics Calculus. Rivendell Software. U. K.
Waits B., Longhart F. y Longhart K. (1998) Le Rôle des Calculatrices Symboliques dans la Reforme de l'Enseignement des Mathematiques. Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géometriques dans l'enseignement des mathématics (Dominique Guin Ed.). IREM de Monntpellier, France.
Zimmermann W. (1990) Visual Thinking in Calculus. In Visualization in Teaching and Mathematics (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA, No. 19.

Fernando Hitt
Département de Mathématiques,
Université du Québec à Montréal
Canada
e-mail: hitt.fernando@uqam.ca

La Tarea Intelectual en Matemáticas Afecto, Meta-afecto y los Sistemas de Creencias

Inés M. Gómez-Chacón

1 Introducción

La investigación en Educación matemática ha estado principalmente centrada en los aspectos cognitivos, dejando un poco de lado los aspectos afectivos. En gran parte, posiblemente, esto sea debido al popular mito de que las matemáticas son algo puramente intelectual, donde el comportamiento relativo a las emociones no juega un papel esencial.

Por supuesto que nuestra perspectiva no es ésta y como los matemáticos Halmos y Polya consideramos que "la matemática es algo emocional":

> ¿Son las matemáticas algo emocional? La gente suele decir que no, pero yo creo que sí lo son. Un matemático es una persona y tiende a sentir emociones fuertes sobre qué parte de las matemáticas está dispuesto a soportar y, naturalmente, emociones fuertes sobre otras personas y las clases de matemáticas que les gustan. Por ejemplo: "¿qué prefieres, números o dibujos, símbolos o gráficas, álgebra o geometría?". Yo soy principalmente un hombre de números, y no sólo me ponen nervioso los dibujos, sino incluso la gente que los prefiere" (Paul R. Halmos, 1991: 34)[1].

> "Seria un error el creer que la solución de un problema es un "asunto puramente intelectual"; la determinación, las emociones, juegan un papel importante. Una determinación un tanto tibia, un vago deseo de hacer lo menos posible pueden bastar a un problema de rutina que se plantea en la clase; pero, para resolver un problema científico serio, hace falta una fuerza de voluntad capaz de resistir años de trabajos y de amargos fracasos" (Polya, Como plantear y resolver problemas, 80-81)[2].

[1]HALMOS, P. R.: 1991, ¿Qué es un matemático? Epsilón, 20, 33-40

[2]POLYA, G.: 1945, How to solve it. Doubledoy. New York. Traducido al castellano: Cómo plantear y resolver problemas. Trillas: México, 1972.

Al igual que ellos, nosotros también creemos que el estilo matemático está relacionado con las emociones. En este texto de Halmos podemos ver cómo este matemático expresa su forma de concebir las matemáticas, su forma de relación y su reacción con este área y con otras personas que trabajan la actividad matemática, y cómo a través del objeto -las matemáticas- él se define -“soy un hombre de números”-.

En los ámbitos de aprendizaje de la matemática, los afectos no son un lujo. Desempeñan un papel en la comunicación de intenciones de los estudiantes a los demás, y de guía cognitiva, facilitando o bloqueando la adquisición de conocimientos.

En este trabajo queremos comunicar al lector tres aspectos que consideramos esenciales en el desarrollo de la tarea intelectual matemática: qué es esto del afecto, cómo favorecer un mejor rendimiento en los estudiantes, de qué instrumentos metodológicos y de investigación se dispone para trabajar estas dimensiones. Para ello consideramos pertinente manejar tres constructos teóricos: afecto, meta-afecto y sistemas de creencias.

Este artículo está organizado como sigue: en primer lugar situaremos el tema de los afectos en el ámbito de investigación en Educación Matemática, pasaremos en un segundo momento a precisar algunos constructos a través del planteamiento de casos, seguidamente ejemplificaremos algunos instrumentos útiles para trabajar la dimensión emocional y concluiremos el articulo señalando algunas recomendaciones o estrategias para el profesorado.

2 Algunas perspectivas en afecto

La importancia de los factores afectivos en educación, y en particular en el aprendizaje de la Matemática, es un tema que emerge periódicamente y desde aproximaciones diferentes. Por ejemplo, en los años 70 aparece en los estudios sobre obstáculos para el aprendizaje matemático de la mujer (como ejemplo, Fennema y Sherman, 1976) y en estudios con población universitaria y en educación de adultos en general. En educación matemática el paradigma alternativo de investigación en afecto que ha surgido con más fuerza en los años 90, se ha desarrollado al margen de la psicología evolutiva, a la sombra de los trabajos más recientes de la psicología cognitiva y del socioconstructivismo (McLeod, 1988, 1992, Goldin, 1988, etc.). La necesidad de tener en cuenta los bloqueos en la resolución de problemas ha hecho que las investigaciones se centren en el estudio de estos bloqueos. Se ha puesto el acento en tres descriptores básicos del dominio afectivo (emociones, actitudes y creencias), especificando varias dimensiones del estado emocional del resolutor de problemas: magnitud, dirección de la emoción, duración y nivel de consciencia y de control del estudiante. Se da mayor relevancia a las emociones, apoyándose en que la mayoría de los factores afectivos surgen de las respuestas emocionales a la interrupción de los planes en la resolución de problemas. En estas investigaciones se pone especial atención en personas individuales y en situaciones de laboratorio. Otros autores como Walkerdine (1988), Nimier (1988, 1993), Taylor (1989), Evans (2000) consideraron de utilidad las aproximaciones psicoanalítica y las ideas post-estructuralistas como marco de interpretación de las reacciones afectivas de estudiantes y profesores.

La reconceptualización del dominio afectivo en la década actual viene marcada por dos intencionalidades esenciales: por el intento de consolidación de un marco teórico y por la apertura para tomar en cuenta el contexto social de aprendizaje (Gómez-Chacón, 1997, 2000a). En nuestros trabajos nos hemos centrado en el estudio de los bloqueos afectivos en la resolución de problemas y en la actividad matemática, y en la descripción de episodios emocionales de los estudiantes en el aula (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b, 2001). En la descripción de estos casos, tratamos de detectar las reacciones afectivas observando a la persona en su contexto social y cultural. Pudimos constatar que algunas explicaciones a los bloqueos en el aprendizaje venían dadas si tomábamos en consideración los sentimientos y actitudes que refuerzan las estructuras de creencia y el origen de éstos (lo que denominamos afecto global). Por ejemplo, las reacciones emocionales definidas por la pertenencia a un grupo social determinado, las valoraciones y creencias asociadas con las diferentes formas de conocimiento matemático. El estudio de la reacción afectiva hacia la Matemática y la motivación por el aprendizaje de los estudiantes no debe restringirse a situaciones de laboratorio o niveles de sujeto o de aula, sino que debe tener en cuenta la realidad social que produce estas reacciones y el contexto sociocultural de los alumnos. Tradicionalmente, en las investigaciones sobre afecto, encontramos que cuando interesaba indagar las actitudes hacia la Matemática, éstas se medían mediante escalas de actitudes o cuestionarios; o si se quería estudiar las reacciones emocionales se indagaban observando al sujeto al abordar un problema. Son menos las investigaciones que estudian las reacciones afectivas en situaciones de aula (natural), en las que los sujetos desarrollan la actividad matemática en interacción con otros (Cobb, Yackel y Wood, 1989, Planas 2000) y, aún menos, los que contextualizan estas reacciones en la realidad social que las produce, indagando el origen de las reacciones afectivas y viendo la relación existente entre éstas y las convenciones culturales, creencias y representaciones sociales del grupo en el que están inmersos los estudiantes (Abreu, 1998, Gómez-Chacón, 1997). Indagar la relación afectiva hacia la Matemática y la motivación por el aprendizaje demanda una base amplia de comprensión del contexto sociocultural, dentro y fuera del ámbito escolar que influye en los estudiantes[3].

Tras este breve resumen de las distintas aproximaciones al estudio de la dimensión afectiva quiero reseñar varias aspectos que considero pertinente para

[3]Referencias bibliográficas sobre el tema de afectos y Matemáticas pueden consultarse en GÓMEZ-CHACÓN, I. M.: 2001, The emotional dimension in mathematics education: A bibliography, en Statistical Education Research Newsletter, vol. 2, nº2, May, p. 20-32. (http://www.ugr.es/~batanero/sergroup.htm).

el desarrollo del articulo:

1. **El afecto se entiende como un sistema de representación en los individuos.** Es decir, el sistema afectivo no es un mero acompañante de la cognición o un sistema que actúa como respuesta lateral a las representaciones cognitivas, sino que el afecto tiene en si mismo una función representacional (Goldin, 1988). El afecto codifica información de manera significativa. Esto puede conllevar información acerca del contexto físico y social (como ejemplo el sentimiento de miedo que codifica peligro), información acerca de las configuraciones cognitivas y afectivas del individuo mismo (por ejemplo sentimientos de desconcierto y perplejidad pueden codificar insuficiente comprensión, sentimientos de aburrimiento pueden codificar ausencia de compromiso. . .) y la información relativa a las configuraciones cognitivas de otros, en las que se encuentran incluidas las expectativas sociales representadas y proyectadas por el mismo individuo (sentimientos de orgullo pueden codificar la satisfacción que tienen sus padres por su rendimiento académico).

   Cuando las estudiantes están trabajando la matemática, el sistema afectivo no actúa como un mero auxiliar de lo cognitivo, sino por el contrario se sitúa central. En uno de nuestro estudios (Gómez-Chacón, 1997, 2000a) hemos explicitado la configuración de las rutas del sistema afectivo de los estudiante (positivas y negativas) al trabajar las matemáticas. Consideramos que esta explicitación puede favorecer el establecimiento de un modelo para el desarrollo de compentencias de resolución de problemas. En el trabajo al que antes he aludido hemos rastreado el origen de las emociones y cuales son sus representaciones[4].

2. **Los afectos tienen tanto una base biológica como social.** Es importante detenerse en el lenguaje de comunicación de la dimensión emocional (gestos corporales, expresiones, palabras, etc. . .) tanto en lo consciente como en lo inconsciente. La dimensión emocional se manifiesta en la interacción. En la discusión del afecto es importante tener en cuenta lo que desde la neurociencia se denomina afecto individual y afecto compartido desde el rol que juega en el plano consciente (Damasio, 2001). En nuestros trabajos a estas dimensiones les hemos llamado *afecto global* y *afecto local* y *emociones situadas*. Por ejemplo, las creencias proporcionan significado personal y ayudan al individuo a atribuirle cierta relevancia como miembro de un grupo social. Las características del contexto social tienen una influencia fuerte sobre las creencias, dado que muchas se adquieren a través de un proceso de transmisión cultural. En su origen y formación detectamos una relación dinámica entre las informaciones almacenadas y

[4]Para el lector interesado puede consultar el capitulo 6 del libro Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje de la matemática. Narcea, Madrid.

la realidad (siempre nueva), los sentimientos y afectos relativos a cada experiencia y las situaciones vividas, etc.

3. Se pueden distinguir **distintos descriptores básicos del dominio afectivo: emociones** (son rápidos cambios de sentimientos y de fuerte intensidad, respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial), **actitudes** (como una moderada estable predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento, consta de la componente cognitiva y afectiva), **creencias** (esa parte del conocimiento, perteneciente al dominio cognitivo, compuesta por elementos afectivos, evaluativos y sociales, con una fuerte estabilidad), **valores** -éticos, morales...- (se concibe como aquel bien que el hombre ama y que descubre en cuanto le rodea, como merecedor de estima, están altamente estructuradas en el individuo).

   Asimismo, se dan situaciones de *afecto compartido*, por ejemplo la tensión que experimentan toda una clase ante un examen. O situaciones afectiva generadas por los contextos sociales y culturales que involucran un entretejido de actitudes, creencias y valores.

4. Nosotros consideramos importante discutir en los estudios **las competencias afectivas y las estructuras afectivas en los individuos**. Para ello, parece significativo tomar en cuenta algunos constructos: el afecto local (transitorio, en un contexto especifico) y el afecto global (multi-contextual y más permanente), las nociones de rutas significativas (caminos, secuencias, enlaces entre los estados emocionales), las configuraciones significativas afectivas, los mecanismos de defensa (estructuras afectivas que sirven de protección al individuo ante experiencias negativa) y los procesos de cambio en el afecto global que se relacionan con la identidad del individuo.

3 Metaafecto y regulación del afecto-cognición

De cara al desarrollo de competencias emocionales de los estudiantes en Matemáticas consideramos importante centrarnos en tres áreas de competencia:

- el de la autoconsciencia: reconocimiento de reacciones emocionales y sentimientos, temperamento y estilo de aprendizaje;
- el de la autorregulación cognitiva y emocional: control de los impulsos, organización y utilización;

- el de las relaciones o interacciones sociales en el aula y en el contexto sociocultural, dentro y fuera del ámbito escolar que influye en los estudiantes (imagen social del conocimiento matemático, habilidades sociales, trabajo en equipo y toma de decisiones. . .).

Muchos de los retrasos o dificultades de aprendizaje tienen una alta correlación con la limitación en la capacidad de generalización o transferencia, consecuencia a su vez de las dificultades que los alumnos tienen a la hora de planificar y regular sus procesos de conocimiento, es decir, cuando no consiguen la habilidad de organizar un plan de acción y de llevarlo a la práctica de manera coherente, autónoma y flexible. Se ha verificado que los programas de intervención que favorecen este tipo de procesos, llamados metacognitivos, facilitan el aprendizaje y la transferencia de lo aprendido. Por consiguiente, si para todo el alumnado es básica la adquisición de estas habilidades se hace imprescindible una planificación consciente y sistemática de su adquisición por parte del profesorado, para aquellos alumnos y alumnas que presentan dificultades en el aprendizaje.

Utilizamos el término *metaafecto* o toma de conciencia de la actividad emocional para referirnos a la conciencia de las propias emociones y a la gestión de las mismas. Es estar atento a los estados internos sin reaccionar ante ellos y sin juzgarlos. Ser consciente de uno mismo significa “ser consciente de nuestros estados de ánimo, y de los pensamientos que tenemos acerca de esos estados de ánimo”. La toma de conciencia de las emociones (observar, identificar y nombrar) constituye la habilidad emocional fundamental, el cimiento sobre el que se edifican otras habilidades de este tipo, como el autocontrol emocional. Aunque hay una diferencia lógica entre ser consciente de los sentimientos e intentar transformarlos, hemos descubierto que, para todo propósito práctico, ambas cuestiones van de la mano y que tomar conciencia de un estado de ánimo negativo conlleva también el intento de desembarazarse de él.

Dentro de la categoría de toma de conciencia de la actividad emocional consideramos dos aspectos relacionados entre sí: los conocimientos acerca de los fenómenos metaafectivos y la gestión de la actividad emocional (Ver Cuadro 1).

En los estudios que hemos realizado se ha puesto de manifiesto que la estabilidad de las creencias de los individuos tiene mucho que ver con la interacción de la estructura de creencias no sólo con el afecto (sentimientos, emociones), sino también, y muy especialmente, con el metaafecto (las emociones acerca de los estados emocionales, las emociones acerca de los estados cognitivos, los pensamientos acerca de las emociones y cogniciones, la regulación de las emociones).

A continuación, presentamos el caso de Jazmín para mostrar el metafecto. Jazmín es una alumna de Secundaria perteneciente a un estudio que se realizó, en el curso 98/99, con 27 alumnos del Taller de Matemáticas de 4$^{\underline{o}}$ de Secundaria[5]. En este trabajo se estudió la relación cognición-afecto y los aspectos metaafectivos según el modelo propuesto en Gómez-Chacón (1997, 2000a y b)[6].

Toma de conciencia de la actividad emocional	Conocimientos metaafectivos	1. Conocimiento de las personas (de sí mismo, de los otros, y de las personas en general) 2. Conocimiento de la tarea (reacciones que me produce, creencias, exigencias, objetivos) 3. Conocimiento de las estrategias afectivas (valoración, regulación y utilización)
	Gestión de la actividad emocional	1. Valoración, consciencia y expresión 2. Regulación (Advertir, identificar, control, respuesta) 3. Utilización

Cuadro 1. Aspectos metaafectivos

El Metaafecto en Jazmín

Ante el siguiente problema "Cuadro de Mondrian":

> *PIET MONDRIAN (1872-1944) fue un pintor holandés que, en la evolución del arte abstracto, tuvo una gran importancia al aplicar las normas geométricas más rigurosas y austeras a los colores puros. ¿Quieres emularle? Dibuja un cuadrado de 16 cm de lado y divídelo*

[5]PINILLA, C.: 2000, Influencia de la emoción en los procesos de enseñanza/aprendizaje en Matemáticas a través de la Resolución de Problemas con alumnos de Enseñanza Secundaria. Treball de Recerca, Universidad Autónoma de Barcelona.

[6]En el trabajo que realizamos propusimos un modelo de análisis para el estudio de la interacción cognición y afecto en el aprendizaje de la Matemática. Con el tipo de análisis que se presentó, se quiso poner de relieve que con este modelo no sólo se describen cuáles son las reacciones emocionales y su origen, sino que también se pueden constatar los cambios y evolución en el sujeto. Se describieron algunas dimensiones importantes en las relaciones afecto-cognición y se ilustraron, a través del estudio de casos, las incorporaciones de esas dimensiones al análisis de datos procedentes de la investigación realizada con poblaciones de fracaso escolar.

> *en proporciones áureas formando cuadrados y rectángulos. Con cartulinas de colores rellénalos. ¡Pero sólo puedes cortar las cartulinas longitudinalmente!*

En la actitud afectiva inicial de Jazmín prima la curiosidad, incentivada por unas características que lo hacen inicialmente *interesante* (positiva) y *divertido* (positiva). Se percibió en ella un estado de *animación* (positiva) consecuencia de sus primeras impresiones.

El cambio de dirección de positiva a negativa, aunque ella misma relata en su protocolo los motivos que le han inducido al cambio de actitud en relación con el problema, se podía sintetizar en la negativa sorpresa que le produce después de la lectura intuir que hay algo de "manualidades" en el desarrollo del problema, lo que hace que vincule su actividad resolutora al gusto por la heterogeneidad de acciones que debe desarrollar para resolverlo (algebraicas y manipulativas). Esto le hace en principio desistir de progresar confiadamente hacia la solución.

> *"No me gustan los trabajos manuales y aquí se mezclan éstos con las Matemáticas"*

Aunque en la ejecución de esta alumna no se percibían excesivas dificultades matemáticas, le sobrepujan sus estados emocionales negativos y a pesar de que dispone de buenos propósitos para sucesivas ocasiones, quedó definitivamente instalada en estados emocionales negativos hasta el final del trabajo. Cuantitativamente, se pudo constatar que existía una cierta equiparación entre las emociones más frecuentes, no obstante, son más intensas las negativas: *ira* (negativa), *enfado* (negativa), *disgusto* (negativa), que finalmente decantan el resultado hacia su ámbito de influencia.

> *"Y eso me causaba rabia y así es como he decidido dejarlo por imposible"*

Siendo una alumna influida por fuertes tensiones emocionales, esto no le impide discernir con cierta claridad una toma de conciencia de sus propios estados emocionales que pudieron ser secuenciados y diferenciados una vez analizada la información que aportaba la estudiante o recogía la profesora.

> *"De ahora en adelante me tomaré los problemas que no me gustan de otra forma a ver si así no me bloqueo con tanta facilidad"*

Las tendencias cognitivas y afectivas de esta alumna se pueden catalogar en una sucesión como la que sigue: valora, expresa, advierte, identifica y planifica el control futuro de la emoción. Se constató que esta sucesión no se diferenciaba tanto de un posible itinerario emocional en problemas sucesivos.

En el aula de Matemáticas las observaciones que realizaba la profesora estaban dirigidas a las dimensiones del estado emocional del resolutor y a los procesos cognitivos, metacognitivos y meta-afectivos. Principalmente a las huellas de emociones que se manifiestan en los sujetos (que permiten describir y corroborar la emoción del estudiante), instantáneas emocionales en el proceso de resolución de problemas, exigencias cognitivas que son necesarias en el proceso de ejecución y aprendizaje de la actividad, procesos metacognitivos y metaafectivos e interacciones en el aula[7].

La noción de *metaafecto* es central. Referida al "afecto acerca del afecto". Como hemos indicado en los estudios que hemos realizado, con un grupo de jóvenes en situación de fracaso escolar y con otros estudiantes de Secundaria, se ha puesto de manifiesto que la estabilidad de las creencias de los individuos tiene mucho que ver con la interacción de la estructura de creencias no sólo con el afecto, sino también, y muy especialmente, con el *metaafecto*). En muchas situaciones el *metaafecto* es la parte más importante del afecto.

Por ejemplo, si tomamos la emoción de "*desconcierto*", en el estudio que realizamos con estudiantes en situación de fracaso escolar (Gómez-Chacón, 2000: 150), aparecía como un momento de turbación del orden, el concierto y la composición de una cosa; es un momento de conflicto cognitivo. Se trata de una situación en la que no se sabe por dónde ir, en la que se produce un desacoplamiento entre lo que se quiere resolver y el conocimiento del camino que se tiene que tomar. Se manifiesta como un momento de búsqueda de por qué, como un salto a la abstracción. La persona se encuentra desarmada y no sabe cómo dar respuesta.

Esta reacción emocional puede codificar el hecho de una información inesperada o aparentemente contradictoria, o bien la necesidad de responderse a una pregunta no contestada. En una situación cómo ésta ¿qué aportaría el meta-afecto?

La ansiedad, el miedo, el temor, la desesperación -y no la perplejidad, el desconcierto, el comerse la cabeza o el bloqueo y la frustración- son estados afectivos esencialmente indeseables. Es necesario proporcionar y favorecer experiencias productivas y constructivas en los alumnos. Éstos, ocasionalmente, experimentarán la perplejidad, el desconcierto o el bloqueo, y deberán aprender respuestas para esas emociones negativas, utilizándolas para transformar la dirección y calidad del afecto y volver a la ruta positiva de diversión, placer, regocijo, satisfacción.

En el mismo caso un resolutor de problemas competente –que sabe gestionar sus afectos- se desarrollaría la decisión de intentar casos particulares, pensar en un problema más simple, buscar representaciones, notaciones, diagramas, etc.; teniendo como elemento común un plan avanzado para mejorar la comprensión,

[7]Para el lector interesado en recursos para evaluar los afectos puede consultarse Gómez-Chacón (2000a).

y capturar la estructura del problema. Adquirir estas estrategias mitigaría este afecto, llevando a quien resuelve el problema a un estado de estímulo.

El *metaafecto* desempeña "*una función ecológica*" ya que ayuda a estabilizar niveles de creencias al interactuar con el sistema cognitivo.

En nuestra investigación la reacción emocional de desconcierto aparece entretejida con la perplejidad y el estado que provoca desvelar aspectos importantes no resueltos sobre cómo proceder (codificando algún fracaso en la comprensión) o inestabilidad en la representación imaginaria de quien resuelve, de la situación del problema. Esto puede provocar en el resolutor nuevos problemas, o bien iniciar desafíos de cuestionamiento saludables para el profesor, quien, para resolver este problema de perplejidad, puede cuestionar, insistiendo o construyendo una representación cognitiva adecuada para apoyar o refutar la fuente de autoridad.

Además las creencias y los valores del individuo desempeñan un rol importante en el desempeño de la Matemática, el metafecto puede colaborar a traerlos al plano consciente y evitar los mecanismos de defensa que se generan para ponerse a salvo.

4 Creencias, sistemas de creencias, conocimiento y valores

En la literatura reciente sobre el aprendizaje de la Matemática, las investigaciones sobre la influencia de las creencias ocupan un lugar destacado (Pehkonen y Törner (1995)[8]). Cuando nos acercamos al tema de creencias nos podemos hacer las siguientes preguntas: qué son creencias, dónde las encontramos, sobre qué versan las creencias, cómo se originan, cómo influyen en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este artículo nos queremos detener en este último y en la relación entre conocimiento y sistema de creencias.

Es importante en los modelos de enseñanza el diferenciar entre el conocimiento objetivo y el conocimiento subjetivo. Las creencias pertenecen a este último.

Utilizo *conocimiento* para referirme a la amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos. Utilizamos el concepto *creencia* conforme a trabajos anteriores (Gómez-Chacón, 2000). Consideramos las creencias como esa parte del conocimiento, perteneciente al dominio cognitivo, compuesta por elementos afectivos, evaluativos y sociales. Son estructuras cognitivas que permiten al individuo organizar y filtrar las informaciones recibidas, y que van construyendo su noción de realidad y su visión del mundo. Las creencias constituyen un esquema conceptual que filtra las nuevas informaciones sobre la base de las procesadas anteriormente, cumpliendo la función

[8]Para más ampliación sobre el tema de creencias en la enseñanza y aprendizaje de la matemática se puede consultar la recopilación bibliográfica realizada por Törner, & Penkonned (1996).

de organizar la identidad social del individuo y permitiéndole realizar anticipaciones y juicios acerca de la realidad. Las creencias del estudiante en el ámbito de la educación matemática se categorizan en términos del objeto de creencia: creencias acerca de la Matemática (el objeto); acerca de uno mismo; acerca de la enseñanza de la Matemática; y creencias acerca del contexto en el cual la educación matemática acontece (contexto social).

En el conocimiento, nosotros distinguimos entre *conocimiento objetivo* y *conocimiento subjetivo*. Siguiendo la formulación de creencia de Ortega y Gasset, dice "La creencia es *certidumbre* en que nos encontramos, sin saber cómo ni por dónde hemos entrado en ella.... No llegamos a ellas tras una faena de entendimiento, sino que operan ya en nuestro fondo cuando nos ponemos a pensar sobre algo"[9].

El *conocimiento objetivo* podemos representarlo fuera del individuo (Pehkonen, E. y Pietilä, A. 2003)[10]. Sin embargo, el conocimiento subjetivo y objetivo los concebimos en continua interacción. El conocimiento subjetivo contiene parte de las emociones –estas dos áreas las representamos mediante una interacción-. Por ejemplo, podemos pensar que el alumno tiene conocimiento de sus emociones, el alumno reconoce que el ha resuelto una dificultad en la tarea, por tanto siente alegría y satisfacción.

Las creencias, las actitudes y las emociones pertenecen al conocimiento subjetivo. El subdominio de las creencias y de las actitudes interseca, dado que algunas veces puede ser comprendido como creencia y como actitud. Por ejemplo, la expresión "soy bueno en calculo mental" puede comprenderse como creencia concerniente a uno mismo y también como actitud hacia las matemáticas (cf. Figura 1).

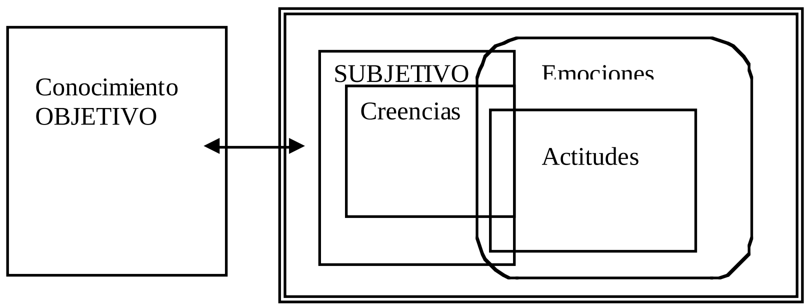


Figura 1. Relación entre principales conceptos y creencias.

[9]ORTEGA Y GASSET, J.: 1976, Ideas y creencias. Colección Austral, 8ª Edición.

[10]Pehkonen, E. y Pietilä, A.: 2003, On Relationships between beliefs and knowledge in Mathematics Education, CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 28 February - 3 March 2003 in Bellaria, Italy

Los *sistemas de creencias*[11] hay que diferenciarlos claramente de sistema de conocimiento:

1. "Los elementos (conceptos, proposiciones, reglas, etc.) de un sistema de creencias no son fruto del consenso...

2. Los sistemas de creencias se refieren parcialmente a la existencia o no de ciertas entidades conceptuales...

3. Los sistemas de creencias incluyen con frecuencia representaciones de "mundos alternativos"...

4. Los sistemas de creencias dependen en gran medida de componentes evaluadoras y afectivas...

5. Los sistemas de creencias son proclives a incluir gran cantidad de material episódico...

6. El conjunto de contenido a incluir es un sistema de creencias suele ser muy "abierto" (difícil establecer fronteras)...

7. Las creencias pueden poseerse con un grado variable de certeza." (p. 356-360)

En las investigaciones actuales se está poniendo más el acento en el estudio de sistemas de creencias de estudiantes o de profesores más que en el estudio de creencias aisladas, esto puede permitir una comprensión mejor de cómo las creencias influyen en el aprendizaje de la matemática.

Por ejemplo, entre los rasgos característicos sobre la visión que los alumnos tienen de las Matemáticas encontramos que son:

- fijas, inmutables,
- desconectadas de la realidad
- misterio asequible a pocos
- colección de reglas y de cosas que hay que recordar
- materia en que los puntos de vista y las opiniones no tienen ningún valor
- materia llena de x, de y y de fórmulas incomprensibles.

[11] Ya fue estudiada ampliamente esta relación por ABELSON, R.: 1979, Differences between belief system anda knowledge systems, *Cognitive Science*, 3, 355-366.

Las ideas que los estudiantes tienen acerca de sí mismos con respecto a las Matemáticas moldean sus comportamientos en el estudio de esta disciplina. En otros trabajos hemos puesto de manifiesto cómo algunas de las creencias mostradas acerca de las Matemáticas provienen del tipo de instrucción que reciben en el aula[12]. Así, por ejemplo, el tipo de problemas usados en la clase, la forma de evaluación, las dinámicas de grupo y las tareas contribuyen directamente a que el estudiante desarrolle unas determinadas creencias que pueden dar lugar a patrones de falso o de verdadero aprendizaje. El alumno desarrolla ideas de cómo trabajar problemas matemáticos mediante procedimientos que abstraen de su propia experiencia. Uno de los trabajos más delicados del profesorado es el de guiar el alumnado, partiendo de sus errores y concepciones deficientes, hacia un conocimiento que pueda ser validado como matemático.

Las creencias crean resultados; si son positivas, actúan sobre nuestras capacidades aumentándolas; si son limitativas, por lo general giran alrededor del “no puedo...”. Pero en muchos casos, es posible cambiarlas y desarrollarlas. Cambiar las creencias permite variar la conducta y ésta se modifica más rápidamente si se dispone de las capacidades o estrategias para realizar una tarea. Sin embargo, cambiar la conducta no implica cambiar las creencias de forma tan fiable, pues algunas personas no se convencen nunca mediante la repetición de experiencias, simplemente ven una serie de coincidencias desconectadas.

Desde este punto de vista, consideramos importante utilizar en las clases de Matemáticas una determinada instrucción, para una mejor comprensión por parte del profesorado de cómo, quienes resuelven los problemas, los perciben y cómo seleccionan los procedimientos que se van a seguir. Su exploración nos podría dar pistas de los factores que facilitan o dificultan el aprendizaje.

Detengámonos en el siguiente caso que titularíamos la creencia en el tipo de metodología a utilizar. Presentamos el caso de un profesor que parte de la creencia de que habitualmente las propuestas de aprendizaje cooperativo tienen la finalidad de reducir la ansiedad y potenciar la autorregulación de los alumnos. Este profesor tiene la firme convicción de que la interacción entre pares mejora la competencia personal de los alumnos en la resolución de problemas, ya que les obliga a enfrentar enfoques cognitivos cuando entran en conflicto las diferentes perspectivas a la hora de abordar el problema. Por tanto, plantea en el aula, a un grupo de cuatro alumnos de primero de Secundaria, el siguiente problema:

El diseño del puzzle

A mi compañera y a mí nos han encargado el diseño de un puzzle; ella se comprometió a realizar el 22,22...% de las piezas y yo el 16,66...%. Lo hemos hecho de forma que el número total de piezas

[12] GÓMEZ CHACÓN , I. Mª.: 2002, Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras y L. J. Blanco, *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* pp. 23-58, Cáceres: Universidad de Extremadura, pp. 23-58.

no llega a 40, aunque sobrepasa las 30. Razona las siguientes cuestiones; puedes invertir o ir alternando el orden según lo consideres más conveniente.
- ¿De cuántas piezas se compone el puzzle que hemos diseñado?
- ¿Qué es lo que sabes?
- ¿Qué es lo que crees?

Este escenario ilustra una fuente continua de frustración para el profesorado. Cuando el profesor propone el problema, parte de que los cuatro estudiantes tienen una habilidad media en Matemáticas para trabajar en equipo. Además, piensa que disponen de conocimientos suficientes para resolver el problema o por lo menos para comenzar. Sin embargo, lo que se puso de manifiesto es que los alumnos creen que no pueden hacerlo. Están convencidos de que los porcentajes son muy difíciles y, como consecuencia, ni lo intentan. Estos estudiantes muestran falta de confianza en sí mismos para afrontar este tipo de problemas. La falta de confianza puede estar justificada, por ejemplo, porque no comprendan muy bien el concepto de porcentaje. No obstante, lo que se constató es cómo esto actúa en su estructura de creencia y en la formación de actitudes hacia la Matemática.

Hemos señalado algunas imágenes que tienen los estudiantes y que proceden del ámbito escolar. Con estos ejemplos se ha querido poner de manifiesto que para entender el desarrollo de los procesos de aprendizaje matemático, es preciso conocer las estructuras representacionales cognoscitivas y axiológicas de los estudiantes. No solamente las representaciones individuales específicas, sino también secuencias de representaciones genéricas, socialmente ancladas y culturalmente condicionadas.

En el caso que nos venimos refiriendo de la disciplina de matemáticas, las creencias en torno a la matemática no pueden ser consideradas independientes de la formación matemática específica y esto debería llevar a plantearse a la comunidad educativa y a las propuestas políticas de formación del profesorado que los cambios que se demandan a nuestra sociedad en relación con la cultura científica son muy poco probables si no se cuida más la propia formación científica. Cuando a los estudiantes no se les ofrece y exige esta formación se está limitando enormemente su capacidad para aceptar y elaborar nuevas creencias, para aplicar conocimientos importantes y, en último término, para la participación social en lo que a decisiones técnicas o científicas se refiere.

5 Instrumentos para desarrollar la dimensión emocional de los estudiantes

A continuación vamos a plantear algunos recursos que el profesorado puede utilizar en el aula de matemáticas. Mostramos dos tipologías de recursos: instrumentos para la autorregulación de la reacciones emocionales por parte de los estudiantes y para que el profesor pueda diagnosticar las reacciones emocionales de los alumnos e instrumentos para que el profesor pueda favorece las creencias no limitativas de los estudiantes hacia las matemáticas. La mayoría de estos instrumentos están tomados de Gómez-Chacón (2000a).

Instrumentos para trabajar el "metaafecto"

Para realizar el diagnóstico interacción cognición-afecto podemos utilizar distintas técnicas: entrevistas, parrillas de observación, cuestionarios, instrumentos de autoevaluación, etc. En este caso proponemos el uso de la *Gráfica emocional.* Consta de 6 cuestiones, 3 referidas a sentimientos y reacciones emocionales y 3 relacionadas con aspectos de transferencia y de aprendizaje en el taller y en la vida cotidiana (cfr. Cuadro 1). Después de cada problema o actividad matemática se les pasaba a los estudiantes. La utilización del instrumento tiene como objetivo recoger información a través de la gráfica de las reacciones afectivas de los estudiantes (magnitud, dirección, consciencia y control de las emociones) y origen de las mismas (dinámica de interacción entre los factores afectivos y cognitivos). Las dimensiones de magnitud, dirección y consciencia quedan explicitadas a través de los trazos que efectúa el alumno al dibujar la gráfica de su emoción y a través de las anotación que realiza sobre las exigencias cognitivas necesarias para resolver la tarea propuesta.

Cuadro 1. Instrumento: *Gráfica emocional*

Nombre **Fecha**

1. Cómo te sientes después de acabar el problema:
Muy satisfecho Satisfecho Insatisfecho Muy insatisfecho

2. Cuenta brevemente por qué te sientes así.

3. Representa mediante una gráfica tus sentimientos, tus reacciones en el proceso de resolución de este problema.

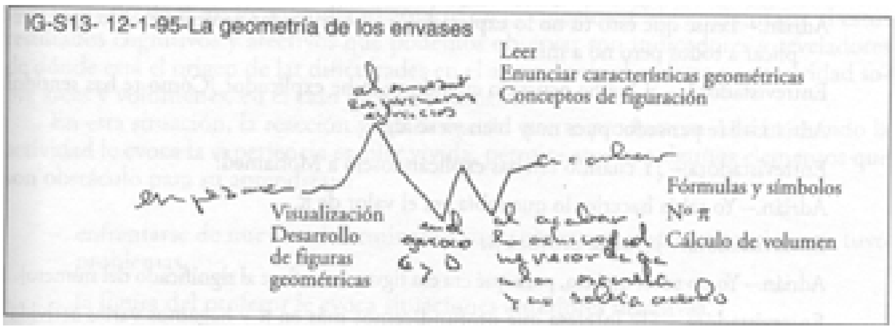
4. ¿Te recuerda alguna de las situaciones que trabajas en fuera del instituto (en tu casa, en la calle, etc.)? Comenta brevemente tu respuesta.

5. Lo que has aprendido en este problema ¿te sirve para tu vida diaria?

6. ¿Puedes aportar sugerencias para completar esta actividad?

Además, el profesor puede completar y contrastar la información que aporta el alumno mediante una entrevista. Principalmente el objetivo de esta entrevista es el de confirmar los aspectos que habíamos detectado, sobre todo las reacciones emocionales que aparecen más explícitas e iterativas en la vivencia del sujeto. Se busca una mayor explicitación, por parte del sujeto, de su origen; y una toma de conciencia, por parte de éste, para su posterior regulación y control de la emoción.

Por ejemplo, tomemos el caso de Adrián (Cuadro 2). Adrián es un alumno con dificultades de aprendizaje en matemática, perteneciente a un programa de diversificación curricular[13]. En los datos que se recogieron sobre las reacciones emocionales, origen de las mismas, en las prácticas de clase durante el período comprendido desde el 27-10-94 hasta el 2-2-95 al desarrollar distintos Módulos de Aprendizaje (18 sesiones de aula) aparecen diversos orígenes: la experiencia pasada de aprendizaje escolar en relación a la matemática y al profesorado; la organización del conocimiento, habilidades matemáticas (respecto a la obtención de la información matemática, respecto al procesamiento de la información, respecto de la memoria matemática); efecto del hecho de que la actividad corresponde a una parte de la matemática que le desagrada; al estado de ánimo con que inicia las clases; creencias de la matemática como tipo de conocimiento; creencias vinculadas al hecho de que es necesario tener unas características personales para trabajar la matemática.



Cuadro 2. Gráfica emocional de la actividad Geometría de los envasados.

A través del estudio del instrumento de las gráficas emocionales del estudiante se pudo detectar ¿A qué se deben las interrupciones (los cortes o saltos) en la interacción afecto-cognición? ¿Cómo se articulan con el proceso de resolución de problemas? En la realización de las mismas se pone de manifiesto la dirección, magnitud, consciencia de las emociones del alumno. Realizando el seguimiento

[13]Son adaptaciones que se realizan del currículo "estándar" según las condiciones culturales y sociales, niveles de dificultades de aprendizaje y necesidades educativas especiales de los estudiantes.

de varías sesiones y teniendo en cuenta lo explicitado en las gráficas emocionales se podría decir que la tendencia de este estudiante con respecto a los cortes o cambios de dirección de la interacción entre afecto y cognición son los siguientes:

De la *dirección positiva a negativa*: los cambios de dirección negativa *en los primeros contactos* con la actividad matemática se deben: a cuando tiene que leer el enunciado, ante la comprensión del enunciado; al ver la portada de la actividad o materiales manipulativos que tiene que utilizar; a cuando tiene la primera visión global de la tarea. *A lo largo del proceso* de resolución estos cambios son debidos al desconocimiento de los modos y medios para trabajar con hechos específicos de matemática (conocimiento de convenciones, criterios, metodologías...); a la ausencia u olvido de conocimientos teóricos y de estructura; a la dificultad del razonamiento con símbolos matemáticos y relaciones espaciales; a la búsqueda de relaciones y conexiones de los elementos matemáticos del problema con los conocimientos adquiridos; a perseverar en la búsqueda de una estrategia; a procesos de justificación, verificación y de extensión del problema; a los cambios propios de nivel de dificultad de la tarea; al esfuerzo requerido por estos cambios, y al esfuerzo propio de la consolidación y verbalización de lo aprendido; a su visión de la matemática y a experiencias que le evocan su vivencia escolar anterior.

Las huellas de emoción negativa recogidas durante las sesiones de aula en estos casos son rechazos, resistencias, protestas, agresividades, disgusto, malhumor, irritaciones, miedo distracciones, bloqueos, paralizaciones, "come la cabeza", aburrimiento, indecisiones e inseguridades, apatía y pasotismo.

En relación a la *dirección de negativa a positiva*, los cambios están vinculados, también, a diversidad de motivos, los cuales, consideramos que se podrían aglutinar en los siguientes aspectos: cuando utiliza procedimientos que habitualmente trabaja en el taller de ebanistería, como dibujar o medir, que le facilitan la captura de la estructura del problema; cuando se ha dado una retención de información matemática y es capaz de recuperar y transferirla; en momentos de intuición o hallazgo de la solución; cuando recibe soporte cognitivo y afectivo de la profesora o de alguno de sus compañeros; en momentos de consciencia y regulación de sus emociones; cuando es capaz de identificar y aceptar el error; cuando es capaz de avanzar por sí mismo y es soporte para otros; ante los propios logros y competencia en la tarea. En último término esta dirección de la emoción está condicionada a su visión de la tarea matemática.

Instrumentos para trabajar las *creencias limitativas*

Muchos estudiantes de secundaria creen que todos los problemas de matemáticas se pueden resolver mediante la aplicación directa de hechos, reglas, fórmulas y procedimientos mostrados por el profesor o presentado en los libros de texto, conduciéndoles a la conclusión de que el pensamiento matemático consiste en ser capaz de aplicar hechos, reglas, fórmulas y procedimientos. Desde la perspectiva motivacional estos estudiantes estarán motivados para memorizar reglas y fórmulas. No estarán interesados en los aspectos conceptuales, en las conexiones entre distintos conceptos matemáticos. Invertirán más tiempo en hacer que en reflexionar sobre el problema, sobre lo que hacen y sobre para qué les sirve lo que están haciendo.

Descubrir y explorar algunas de las *concepciones y creencias* que el grupo de estudiantes tienen sobre las matemáticas y la conexión entre ésta y su "manera de proceder" ante los planteamientos de los problemas matemáticos, puede ayudar al profesorado a trabajar y desarrollar esa "conexión" para proporcionar la experiencia que les permita cambiar aquellas creencias limitativas que bloquean en la resolución de las actividades matemáticas.

Un buen recurso e instrumento es utilizar *actividades provocativas*. Desde este punto de vista, consideramos importante utilizar en las clases de matemáticas una determinada instrucción, para una mejor comprensión por parte del profesorado de cómo quienes resuelven los problemas los perciben y cómo seleccionan los procedimientos a seguir, su exploración nos podría dar pistas de los factores que facilitan o dificultan el aprendizaje.

Al plantear el problema, *el cajón de cerveza*, -enunciado a continuación- en el aula se puede incidir y tratar de modificar las creencias limitativas de los estudiantes. Por ejemplo, la creencia que hacer matemáticas es cuando se trabaja sólo con cuentas y con fórmulas. El problema del *cajón de cerveza* permite presentar una visión y una definición de la matemática, más amplia de lo que involucra el razonamiento matemático. Posibilita el manejo de modelos matemáticos que respondan a la situación que queremos resolver y establecer analogías entre situaciones: búsqueda y reconocimiento.

El cajón de cerveza

Se dispone de un cajón para transportar botellas de cerveza. El cajón tiene forma rectangular y puede contener hasta 24 botellas. ¿Se podría colocar 18 botellas, de forma que en cada fila y en cada columna quede un número par de botellas? ¿Existe una única forma de hacerlo?

Resolvemos el problema e ilustramos como se puede comunicar en el aula.

Comenzamos comentando el proceso de resolución. Haciendo una reformulación del problema, se trata de:

Obtener 18 como suma de 6 números pares menores o iguales que 4 y como suma de 4 números pares menores o iguales que 6.

En las columnas:
$2+2+2+2+4+4+4$
$0+2+4+4+4+4+4$
En las filas
$6+6+6+0$
$6+6+4+2$
$6+4+4+4$
Los casos posibles: 6.

Si en una columna no hay ninguna botella es incompatible con las tres posibilidades de las filas. Luego tiene que ser $2+2+2+4+4+4$ para la suma de las columnas. Se ve que esto es incompatible con las dos primeras posibilidades de las filas. Se llega por tanto a que la solución es:

	4	4	4	2	2	2
6	B	B	B	B	B	B
4	B	B	B	B		
4	B	B	B		B	
4	B	B	B			B

Lo mismo para los impares. Para un número impar de botellas tenemos: $3+3+3+3+3+3$ que sumen las tres columnas y $5+5+5+3$ que sumen las cuatro filas. La solución en este caso es única, salvo permutaciones con filas entre sí y columnas entre sí.

Podemos enfocar de otra forma este mismo problema:

Si el número de botellas ha de ser par se puede estudiar el número de huecos que podemos dejar en la fila $(0,2,4,6)$ y en la columna $(0,2,4)$.

Para un número par de botellas, habrá que dejar huecos en la fila $(0,2,4,6)$ y en la columna $(0,2,4)$. Si dejamos 6 huecos en una fila nos quedamos con impares en columna. Si dejamos 0 huecos en una fila tenemos: $2+2+2$ huecos ó $2+4+0$ huecos. Esta última opción es imposible. Se llega por tanto a la misma solución que antes.

Para lograr el cálculo de todas las soluciones posibles. A partir de una solución cualquiera se pueden trasladar las filas y las columnas y obtener otras: serían las permutaciones de 4 filas y las permutaciones con repetición de 6 columnas, donde 3 de ellas son iguales. Luego el número total de posiciones es:

$$PR_6^{3,1,1,1} \times P_4 = 2880$$

Como se puede observar los conocimientos previos que son necesarios para resolver este problema son los conceptos de: fila y de columna, de par e impar, de simetría y traslación. No obstante, son varios los temas en los que puede ser útil trabajar este problema: aplicaciones de los números naturales: sumas, pares, impares; producto cartesiano, identificación del punto en el plano: lectura de las celdillas $(1, 1)$..., columna $\times$ fila....; combinatoria. Por último, reseñar que algunas de las cuestiones que pueden surgir a los estudiantes al leer el enunciado son:

- ¿El número 0 es par?
- En algún caso se puede dar la circunstancia de pensar que el número par de botellas tiene que ser el mismo en filas que en columnas. Este es un supuesto implícito de tipo restrictivo, que no está expresamente dicho en el enunciado.

No debemos olvidar que parte de la complejidad de aprender y enseñar la resolución de problemas se debe a la interconexión que el principiante ha de establecer entre:

- recursos matemáticos previos (conocimientos de conceptos, hechos y procedimientos);
- la competencia en el uso de los procesos de investigación matemática;
- la confianza en el dominio de los estados emocionales y psicológicos para sacar ventaja de ellos.

Esto exige que el profesorado establezca otra metodología y otra temporalización del trabajo en clase; la evaluación de los procesos requiere más tiempo. Además para que el alumno realice la interconexión de que antes hablábamos, es necesario que se dé una dirección clara por parte del profesorado, para lo cual debe seleccionar adecuadamente los contenidos, los materiales, etc. En definitiva, tiene que hace una revisión del programa reestructurándolo y orientándolo los procesos y los contenidos.

6 A modo de conclusión

No es mi intención cerrar el tema, más bien, deseo intencionadamente dejarlo abierto para que el lector o lectora interesada pueda completarlo y establecer conclusiones por si mismo. Si existen varias cuestiones que deseo subrayar para concluir:
1. *La propuesta y elaboración de marcos más amplios y visiones holísticas* para adaptar las relaciones profundas que rigen las matemáticas y su enseñanza

en ciertos contextos y paradigmas culturales, teniendo en cuenta las características afectivas, cognitivas de los estudiantes, *es uno de los retos actuales en la Didáctica de las Matemáticas*. Los contenidos matemáticos son estructuras elaboradas a través de un amplio esfuerzo colectivo que, en muchos casos, ha tenido lugar durante muchos siglos de esfuerzos. Es natural que la labor de transmisión presente problemas bien complicados. La enseñanza de los contenidos matemáticos ha de hacerse poniendo la atención en las personas concretas a quienes van dirigidos, con características afectivas, cognitivas, contextuales, etc. muy diferentes. Es necesario tener en cuenta, que tales personas están inmersas en una cultura y en una sociedad bien específicas, con sus formas de existencia y de comunicación propias y marcadamente diferentes unas de otras.
2. *Los aspectos metafectivos* son necesario trabajarlos en el aprendizaje matemático, por lo que supone de estabilización del *sistema de creencias* acerca de la matemática tanto en estudiantes como profesores.
3. *La dimensión emocional debería ser trabaja en el aprendizaje matemático*, esto conlleva aproximarse al tema tanto *desde una perspectiva psicológica como sociológica*. Hemos puesto de manifiesto que las relaciones entre la dimensión emocional y las Matemáticas no son fáciles y requieren que el profesor se prepare específicamente en aspectos pertenecientes al área de Psicología y Sociología de la Educación Matemática.
4. Las creencias pueden crear al mismo tiempo una estructura relativamente estable, que orienta al individuo en cada nueva situación, en cada tiempo (*sistemas de creencias*). Pueden cristalizarse y facilitar o bloquear o impedir el establecimiento de nuevos conocimientos. Descubrir y explorar algunas de las *concepciones* y *creencias* que el grupo de estudiantes tienen sobre las Matemáticas y la conexión entre ésta y su "manera de proceder" ante los planteamientos de los problemas matemáticos, puede ayudar al profesorado a trabajar y desarrollar esa "conexión" para proporcionar la experiencia que les permita cambiar aquellas creencias limitativas que bloquean en la resolución de las actividades matemáticas. Las creencias son un factor esencial en la construcción del significado matemático.
Y por último reseñar la influencia de *la instrucción como proceso de socialización y contrasocialización en las creencias* de los estudiantes, y la necesidad de revisión de estos modos de instrucción. Ahora bien esto no es posible sin trabajar paralelamente en el desarrollo del conocimiento matemático. Y esto conlleva un gran cambio en nuestra aulas actuales.

Referencias

ABREU, G.: 1998, Studying social representations of mathematics learning in multiethnic primary schools: work in progress, *Papers on social representations:*

Thereads of discussion, Vol 7 (1-2), 1-20.
COBB, P. , YACKEL, E. y WOOD, T.: 1989, Young childrens's emotional acts while engaged in mathematical problem solving. En *D. B. McLeod y V M. Adams (Eds), Affect and mathematical problem solving: A new perspective.* Springer Verlag. New York. p. 117-148.
DAMASIO, A.: 2001, *El error de Descartes. La razón de las emociones.* Planeta.
DOWLING, P.: 1998, *The sociology of mathematics education.* Falmer Press, Londres.
EVANS, J.: 2000, *AdultsMathematical thinking and emotions.* Falmer Press, Londres.
FENNEMA E. and SHERMAN J.: 1976, Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales, *Catalogue of Selected Documents in Psychology*, 6.
GOLDIN, G. A.: 1988, Affective representation and mathematical problem solving. En *M. J. Behr, C. B. Lacampagne; y M. M. Wheler (Eds.), Proceedings of the Tenth Annual Meeting on the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter of International Group. North Illinois University. DeKalb, IL.* p. 1-7.
GÓMEZ-CHACÓN, I. M.: 1997, *Procesos de aprendizaje en Matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las Matemáticas.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.
GÓMEZ-CHACÓN, I. M.: 2000a, *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea, Madrid.
GÓMEZ-CHACÓN, I. M.: 2000b, Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 43 (2), 149-168.
GÓMEZ-CHACÓN, I. M.: 2001, Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional. En *J. Carrillo, Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas.* Publicaciones Universidad de Huelva.
HART, L. E.: 1989, Describing the affective domain: saying what we mean. En *D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new perspectitve.* Springer-Verlag. New York. p. 37- 48.
HENRIQUES J., HOLLWAY W., URWIN C., VENN C. and WALKERDINE V.: 1984, *Changing the Subject: psychology, social regulation and subjectivity*, Methuen. London.
LAFORTUNE, L. & ST-PIERRE, L.: 1994, *La pensée et les émotions en mathématiques. Métacognition et affectivité*, Les Editions Logiques, Quebec.
LESTER, F. K., GAROFALO, J. y LAMBDIN KROLL, D.: 1989, Self-confidence, Interest, Beliefs, and Metacognition: Key Influences on Problem-Solving Behavior En *D. B. McLeod y V M. Adams (Eds) Affect and mathematical problem solving: A new perspectitve.* Springer-Verlag. New York. p. 75-89

MCLEOD, D. B.: 1988, Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *JournaI for Research in Mathematics Education*, 19, 134-141.
MCLEOD, D. B.: 1992, Resarch on affect in mathematics education: A reconceptualization, En *Douglas A. Grows (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NCTM New York, pp. 575-596.
NIMIER, J.: 1988, *Les modes de relations aux mathématiques. Attitudes et représentations.* Paris: Méridiens Klincksieck.
NIMIER, J.: 1993, Defence mechanisms against mathematics, *For the Learning of mathematics*, 13 (1), 30-34.
PLANAS, N.: 2001, *Obstacles en l'aprenentatge matemàtic: La diversitat dinterpretations de la norma.* Tesi Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Barcelona.
TAYLOR N.: 1989, Let Them Eat Cake: Desire, Cognition and Culture in Mathematics Learning, pp. 161-163 En *C. Keitel, A. Bishop, P. Damerow and P. Gerders (Eds). Mathematics for All.* UNESCO. Paris.
TÖRNER, G. y PEHKONNEN, E.: 1996, Literature on mathematical beliefs. *Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik.* Gerhard Mercator Universität. Gesamthochschule Duisburg.
WALKERDINE V.: 1988, *The Mastery of Reason: Cognitive development and the production of rationality.* Routledge. London.

Inés M. Gómez-Chacón
Didáctica de las Matemáticas
Education for an Interdependent World (EDIW)
Bélgica

Matemáticas y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática

Vicenç Font

1 Introducción

En nuestra opinión, los diversos enfoques que se han propuesto en la didáctica de las matemáticas se posicionan de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos: 1) Una ontología general, 2) Una epistemología, general, 3) Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas, 4) Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular, 5) Una definición del objeto de investigación de la didáctica de las matemáticas y 6) Una metodología de investigación. Si un programa de investigación problematiza y se posiciona explícitamente sobre cuestiones de ontología y de epistemología general, diremos que se trata de un programa de investigación global (puntos 1 y 2), si problematiza la naturaleza de las matemáticas hablaremos de programa semilocal (punto 3) y si sólo se posiciona en los últimos tres puntos hablaremos de programa local. En Font (2002) analizamos el posicionamiento sobre estos seis puntos de algunos de los principales programas de investigación en didáctica de las matemáticas: el enfoque cognitivo, el constructivismo radical, el constructivismo social, el enfoque sistémico, el enfoque antropológico, el enfoque semiótico y el enfoque crítico.

El hecho de que los diferentes programas de investigación se posicionen explícitamente o bien implícitamente sobre la naturaleza de las matemáticas conlleva que, para una parte de los investigadores en didáctica de las matemáticas, una preocupación central haya sido la clarificación de la propia naturaleza de las matemáticas, realizando investigaciones propias de la filosofía de las matemáticas.

A continuación se exponen algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas" y se comentan algunas implicaciones sobre los modos de enseñar matemáticas que de ellos se derivan. Si bien el trabajo que presentamos es fundamentalmente una reflexión de tipo filosófico, es una mirada realizada desde la perspectiva de la educación matemática.

2 Distintas Concepciones sobre la Relación entre las Matemáticas y las Cosas

Un hecho ampliamente aceptado en el campo de la educación matemática es que las concepciones de los profesores, y de las instituciones escolares, sobre la naturaleza de las matemáticas influye en su enseñanza. También está ampliamente aceptado que no es el único factor a tener en cuenta ya que hay otros que también son muy importantes como, por ejemplo, las concepciones pedagógicas y psicológicas de tipo general. A continuación se realiza un recorrido por algunos puntos de vista sobre la relación entre las matemáticas y las "cosas" y se comentan algunas de sus implicaciones didácticas.

2.1 De las Teorías Acabadas a la Praxis

Las matemáticas se pueden considerar como una determinada organización de los productos de la actividad matemática. Esta organización no es estática sino que va evolucionando históricamente. El análisis de las diferentes organizaciones de los productos de la actividad matemática, según el Positivismo Lógico, se puede hacer desde un punto de vista interno (contexto de justificación) o bien desde un punto de vista externo (contexto de descubrimiento). El contexto de justificación tendría que ver con los criterios metodológicos normativos subyacentes a la ciencia y, consiguientemente, podría ser objeto de un análisis "a priori" y metacientífico, mientras que los procesos de descubrimiento deberían ser objeto de los estudios de historiadores, sociólogos y psicólogos de la ciencia, en tanto que interesados en la descripción "a posteriori" de aspectos diversos vinculados a la actividad científica. Actualmente, después de un largo proceso, se ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia que han dejado de centrarse en las teorías y han pasado al análisis de las prácticas. Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división propuesta por el Positivismo Lógico.

Las prácticas matemáticas, también llamadas actividad matemática, se pueden considerar tanto como una actividad social (institucional) como una actividad individual. La actividad matemática se puede considerar como un conjunto de prácticas realizadas en el seno de una institución, o bien como la actividad que desarrolla un sujeto individual. La sociología del conocimiento explica cómo se genera la actividad personal a partir de las instituciones y cómo la actividad institucional se genera a partir de la actividad de los miembros de la institución.

En nuestra opinión, la actividad matemática (personal e institucional) se puede considerar como una manipulación de ostensivos acompañada de pensamiento en el que se manipulan símbolos mentales. Por este motivo, siguiendo a Heidegger (1975), consideramos que la actividad matemática es una determinada manera de pensar sobre las "cosas". Los diferentes puntos de vista sobre las matemáticas que se han ido proponiendo a lo largo de la historia polemizan tanto sobre el tipo de "cosas" como sobre la "manera de pensar" sobre estas "cosas".

2.2 Respuestas Clásicas

1) *El "pensamiento matemático" se puede entender como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que no depende de las "cosas" o bien como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que sí depende de ellas.*

A los juicios que nos aportan información sobre las "cosas" como árboles, sillas, etc. se les llama juicios "sintéticos". Estos juicios se distinguen de otra clase de afirmaciones, como por ejemplo el juicio "todos los solteros no son casados", que para muchos lógicos son vacías, y no aportan información. Este tipo de juicios recibe el nombre de "analíticos". Si nos preguntamos cómo podemos averiguar si una afirmación general es verdadera, observamos que por lo que respecta a las implicaciones analíticas, esta cuestión se resuelve fácilmente. La implicación "todos los solteros no son casados" no es sino una consecuencia de la palabra "soltero". Pero sucede una cosa diferente con los juicios sintéticos del tipo "todos los metales se dilatan". El significado de las palabras "metal" y "caliente" no incluye ninguna referencia a la dilatación. La implicación puede, por lo tanto, comprobarse sólo por medio de la observación. Los juicios sintéticos tales que su verdad depende de la experiencia se llaman "sintéticos a posteriori".

Se puede considerar que afirmaciones matemáticas del tipo "los ángulos formados por tres torres suman 180º" son analíticas y que no informan sobre las cosas de nuestra experiencia, o bien considerar que son sintéticas (informativas), en este último caso ¿su verdad depende de la experiencia?. Esta pregunta se puede responder afirmativamente o negativamente. Si se responde negativamente tenemos que, por una parte, la afirmación "los ángulos de un triángulo suman 180º" se considera un juicio sintético que informa sobre las cosas del mundo físico, ya que de él podemos deducir que "los ángulos formados por tres torres suman 180º", y, por otra parte, tenemos que su verdad no depende de la experiencia, ya que no resulta de una generalización de nuestras experiencias en la medición de los ángulos de un triángulo, ni puede ser refutada por el hecho de encontrar un triángulo tal que sus ángulos no sumen 180º. De hecho, la verdad de esta afirmación se demuestra a partir de los axiomas por razonamiento.

Si se considera que las afirmaciones matemáticas son juicios sintéticos que no dependen de la experiencia -son a priori y no a posteriori-, se esta defendiendo que la razón humana tiene capacidad de descubrir propiedades generales de los objetos físicos independientemente de la experiencia y se tiene que explicar cómo la razón puede descubrir la verdad sintética. Una de las primeras explicaciones se debe a Platón.

2) *La dependencia respecto de las "cosas" se ha entendido, históricamente, de diferentes maneras. La primera explicación es la platónica y consiste en*

considerar que hay unas determinadas "cosas" que son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de los árboles, sillas, etc., que forman un mundo trascendente que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual.

Platón dice que además de las cosas físicas hay otra clase de cosas que él llama "ideas". Existe, por ejemplo, la idea de triángulo además de las correspondientes figuras trazadas sobre el papel. Las ideas son superiores a los objetos físicos, muestran las propiedades de estos objetos de un modo perfecto, y por ello sabemos más sobre los objetos físicos mirando sus ideas que mirando los objetos mismos. Según Reichenbach (1951) la teoría de las ideas de Platón se puede considerar como un intento para explicar la naturaleza aparentemente sintética de las matemáticas. La visión intuitiva de las ideas se considera como una fuente de conocimiento comparable a la observación de los objetos reales, pero superior a ella por el hecho de que revela propiedades "necesarias" de sus objetos. La observación sensorial no puede darnos la verdad infalible, pero la visión intuitiva sí. Es importante remarcar que, para Platón, los actos de visión intuitiva pueden suministrar conocimiento sólo porque los objetos ideales existen con independencia de las personas. Esta manera de entender la existencia es indispensable para él.

Platón introduce un mundo trascendente de ideas platónicas que está fuera de la mente de las personas. Su existencia es independiente de las personas (consideradas individualmente y colectivamente). Esta manera de considerar la existencia es la esencia del platonismo actual. Según esta concepción, los objetos matemáticos son reales, y su existencia un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Su existencia se halla fuera del espacio y del tiempo. Toda cuestión provista de significado que pueda hacerse al respecto de un objeto matemático tiene respuesta definida, seamos o no capaces de determinarla. Para el platonismo, los matemáticos nada pueden inventar, porque todo está ya presente. Todo cuanto pueden hacer es descubrir. Según el platonismo tenemos una facultad mental que nos permite intuir ciertas verdades como evidentes y, a partir de ellas, siguiendo demostraciones rigurosas podemos llegar a resultados que, de entrada, permanecen ocultos.

El platonismo entiende las matemáticas como una determinada manera de pensar sobre las cosas del mundo platónico. Las características de este modo de pensar son, entre otras: 1) los objetos producidos (descubiertos) en la actividad matemática son objetos intemporales, 2) las relaciones y propiedades de estos objetos son verdaderas ya que pueden ser demostradas por una prueba lógica a partir de una verdades que se captan intuitivamente (axiomas). Desde esta perspectiva, el proceso de producción de los objetos matemáticos y su organización en teorías que tienen una evolución histórica no se considera muy relevante ya que, en definitiva, es un descubrimiento de objetos y propiedades preexistentes. Lo que realmente interesa es la demostración de la verdad de las proposiciones de las teorías matemáticas entendida como demostración lógica a partir de los axiomas.

La repercusión de este punto de vista sobre la enseñanza de las matemáticas es la siguiente: considera que se tienen que enseñar teorías acabadas organizadas deductivamente. Entre las muchas y diferentes implicaciones de este punto de vista destacan: 1) la separación de las teorías acabadas de los problemas que las originaron, los cuales no juegan ningún papel importante en su organización. 2) las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente "neutras" ya que se consideran como diferentes significantes de objetos matemáticos ahistóricos. El efecto que producen las diferentes representaciones ostensivas en la producción de sentido es un tema que no preocupa en demasía a la concepción platónica, ya que este posible efecto corresponde al "contexto de descubrimiento" y no al "contexto de justificación". Desde un punto de vista didáctico, el platonismo tiende a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido (Font y Peraire 2001).

Contrariamente al punto de vista platónico, las investigaciones sobre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos ha puesto de manifiesto la importancia de éstas[1]. Las investigaciones de tipo semiótico han destacado el doble papel de los sistemas de signos matemáticos: 1) representacional: nos permite designar los objetos matemáticos, 2) instrumental: como herramienta para hacer el trabajo matemático æ el valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de, símbolos, gràficas, etc. Por otra parte, la investigación en educación matemàtica de tipo cognitivo ha puesto de manifiesto que el estudio de diversos sistemas de representación de un mismo contenido matemático es esencial para su comprensión.

3) *Se puede considerar el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" que sí depende de las "cosas" de nuestra experiencia como árboles, piedras, etc. En su versión fuerte o "empírica", dice que las matemáticas es una ciencia que depende de las "cosas" como los árboles, sillas, etc. exactamente igual a como dependen de ellas las ciencias experimentales.*

Los empiristas sostenían que todo conocimiento, exceptuando el conocimiento matemático, es consecuencia de la observación. Para resolver la paradoja de que por una parte las matemáticas se aplican a la realidad y por la otra sus resultados no dependen de la observación, optaron por diferentes soluciones. Según Davis y Hersh (1988), Locke consideraba el conocimiento matemático como absolutamente seguro, por ser sintético y, por lo tanto, lo distinguía del conocimiento empírico. Las proposiciones necesarias eran, según él, "fútiles" o "instructivas", distinción por medio de la cual, al parecer, anuncia la distinción kantiana entre proposiciones analíticas y sintéticas y que, si se interpreta de este

[1]En Font (2001) se puede encontrar un desarrollo amplio de cómo entienden las representaciones los diferentes programas de investigación en didáctica de las matemáticas.

modo, lo convertiría en partidario de la síntesis a priori.

Hume no acepta la solución sugerida por Locke y sólo admite como sintético el conocimiento que depende de la experiencia. Para Hume las matemáticas y la lógica son analíticas ya que no dependen de la experiencia. Hume entiende que la "dependencia" quiere decir no sólo que los conceptos tienen su origen en la percepción sensible, sino también que la percepción sensible es la base de la validez de todo conocimiento no analítico. Para Hume, la adición suministrada al conocimiento empírico por la inteligencia es de naturaleza vacía. La solución de Hume de considerar que el pensamiento matemático no informa sobre las cosas de nuestra experiencia porqué son verdades analíticas que no dependen de ella, al no conocer aún las geometrías no-euclidianas, no podía explicar la doble naturaleza de la geometría de la época, tanto como producto de la razón como predictor de observaciones, por lo que su punto de vista tuvo que esperar al Positivismo Lógico del siglo XX para desarrollarse.

Si bien Locke aceptó el principio de que todos los conceptos, aun los de las matemáticas y la lógica, se incorporan a nuestra mente a través de la experiencia; no estuvo dispuesto a ampliarlo hacia la tesis de que todo conocimiento sintético adquiere su valor a partir de la experiencia. Ampliación que si llevó a cabo Mill en "A System of Logic ratiocinative and inductive" publicada en 1843, donde sostiene una concepción claramente empírica de la lógica y las matemáticas ya que considera que las ciencias matemáticas no están fundadas completamente sobre verdades necesarias, sino solamente sobre hipótesis y sobre algunos axiomas que constituyen generalizaciones de la experiencia. Para Mill, las hipótesis son deformaciones de los objetos reales, en donde algunas circunstancias son omitidas o exageradas (por ejemplo, línea sin anchura, etc.); en cambio los axiomas (por ejemplo, "dos líneas rectas no pueden contener un espacio") son verdades inductivamente adquiridas sobre la base de la experiencia y mediante un paso al límite.

El punto de vista de Mill es que las matemáticas son el producto de una determinada manera de pensar sobre las cosas de nuestra experiencia que es la misma que tienen la física o la química. Su propósito era mostrar que las matemáticas eran una ciencia inductiva. El punto de vista de Mill presentaba muchos puntos débiles, el primero es que las ciencias experimentales no funcionan por el método inductivo; el segundo es que tampoco lo hacen las matemáticas, y el tercero es que sólo tiene en cuenta aspectos psicológicos y no considera aspectos sociales. Su propuesta, a pesar del poco éxito que tuvo, tiene aspectos interesantes. Uno de ellos es que, tal como remarca Bloor (1998), el enfoque de Mill está claramente relacionado con ideas educativas.

Según Bloor (1998), la idea fundamental de Mill es que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. Algunas de esas experiencias caen bajo categorías que constituirán más tarde las distintas ciencias empíricas; así, por ejemplo, el hecho de que los metales se dilaten pertenece a la física. Paralelamente a este tipo de hechos referentes a ámbitos bastante estrechos, también tenemos conocimiento de hechos que se aplican indiferentemente a ámbitos muy amplios; por ejemplo, existen múltiples colecciones de objetos que pueden ser ordenados y clasificados, organizados según ciertas pautas o series, agrupados o separados, alineados o intercambiados entre si, etc. Es esta categoría de hechos la que Mill piensa que subyace a las matemáticas. El agrupamiento y la organización de objetos físicos suministran modelos para nuestros procesos mentales, de modo que cuando pensamos matemáticamente estamos apelando tácitamente a ese saber. Los procesos de razonamiento matemático no son sino pálidas sombras de las operaciones físicas con objetos, y ese carácter forzoso que tienen los pasos de una demostración y sus conclusiones reside en la necesidad propia de las operaciones físicas que subyacen como modelos. Si el campo de aplicación de los razonamientos aritméticos es tan vasto se debe a que podemos, con mayor o menor dificultad, asimilar a esos modelos una gran variedad de situaciones diferentes.

En Mill se encuentran ideas sobre la enseñanza de las matemáticas que hoy son ampliamente aceptadas. Mill consideraba que en la enseñanza de las matemáticas hay que rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en beneficio de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo éstas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan. Sin duda la perspectiva de Mill apunta elementos interesantes. Los objetos físicos, las situaciones y las manipulaciones pueden funcionar claramente como modelos de las diversas operaciones matemáticas básicas. Las experiencias de tales operaciones físicas pueden plausiblemente presentarse como la base empírica del pensamiento matemático. Las ideas de Mill apuntan hacia una enseñanza de las matemáticas basada en la exploración del alumno.

4) *La no-dependencia de las "cosas" de nuestra experiencia como los árboles, sillas, etc. se puede entender sin recurrir a un mundo platónico. La primera manera consiste en considerar que el pensamiento matemático no informa sobre este tipo de cosas porque son verdades analíticas que no dependen de la experiencia.*

La crisis de fundamentos ocurrida en las matemáticas a finales del siglo pasado se intentó resolver primeramente por medio del programa logicista. Este programa fue iniciado por Frege en su intento de dotar a la aritmética de unos fundamentos seguros. Frege considera que las verdades aritméticas son "analíticas" y "a priori", y que serían a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Frege critica la idea de que los números son propiedades de las cosas externas ya que el número que adscribimos a las cosas depende de cómo las clasifiquemos previamente y esto depende de nuestros propósitos, y también critica la idea de que el número sea algo subjetivo. Frege en los “Fundamentos de Aritmética” define los números a partir de la relación de equinumerabilidad y considera que demuestra la tesis logicista: esto es: la reducción de la aritmética a la lógica, deduciendo los teoremas matemáticos por cálculo lógico. Russell descubrió una paradoja lógica que afectaba profundamente la base de los Fundamentos de Aritmética de Frege. Russell y Whitehead intentaron completar el programa logicista iniciado por Frege, esto es probar que la matemática es una rama de la lógica porque toda ella puede derivarse de la lógica.

El programa logicista se enfrentó a dificultades que muchos consideran insuperables. La primera tiene que ver con la tesis fundamental de su programa: “las matemáticas se pueden reducir a la lógica”, mientras que la segunda tiene que ver con la suposición de que los axiomas de la lógica son evidentes para cualquier persona. Con relación a esta segunda dificultad hay que tener en cuenta que el logicismo, muy a su pesar, se vio obligado a aceptar unos axiomas que difícilmente encajan en esta versión. Por ejemplo, en relación al axioma de la reducibilidad los autores de los “Principia” en la introducción a la segunda edición dicen: “*La justificación de este axioma es puramente pragmática: lleva a los resultados deseados y no a otros. Pero es claro que no es la clase de axioma del cual podamos quedar satisfechos*” (citado en Dou, 1970, p. 73). Con relación a la primera, hay diferentes objeciones. Una muy importante es que la teoría de los tipos o la reducción lógica del número natural suponen intuiciones previas que aunque se llamen lógicas son típicamente matemáticas.

El segundo intento de superar la crisis de fundamentos fue el programa formalista iniciado por Hilbert. En esta concepción no hay objetos matemáticos (a diferencia del platonismo) solamente hay símbolos ostensivos. Para el formalismo extremo, lo único que hay son reglas mediante las cuales se pueden deducir fórmulas a partir de otras, pero las fórmulas no se refieren a nada; son nada más ristras de símbolos que no tienen significado, y tampoco tienen asignado valor de verdad. El primer objetivo del programa formalista es la “completa formalización” de un sistema deductivo. Una página entera cubierta con los signos “carentes de significado” de este tipo de matemáticas formalizadas permite formular declaraciones sobre su configuración y sobre sus relaciones. Puede uno decir que una “hilera” está compuesta de otras tres distintas, etc. Estas afirmaciones poseen, evidentemente, significado y pueden suministrar información importante acerca del sistema formal. Es preciso observar, no obstante, que tales declaraciones significativas acerca de un sistema matemático carente de significado (o formalizado) no pertenecen plenamente a dicho sistema. Pertenecen a lo que Hilbert denominó “metamatemáticas”, o sea al lenguaje que se formula “acerca” de la matemáticas. Las declaraciones metamatemáticas son declaraciones acerca de los signos existentes dentro de un sistema matemático formalizado.

Un requisito esencial del programa formalista de Hilbert en su primitiva concepción era que las demostraciones de consistencia implicaran únicamente procedimientos que no hicieran referencia ni a un número infinito de propiedades estructurales de fórmulas ni a un número infinito de operaciones con fórmulas. Hilbert, al optar por admitir únicamente métodos finitistas en la metamatemática, en cierta manera acepta los planteamientos intuicionostas, pero en lugar de aplicarlos, como hacen estos, a las matemáticas, los reserva para la metamatemática.

Hacia la mitad del siglo XX, el formalismo se convirtió en el punto de vista predominante en las instituciones universitarias. El formalismo contemporáneo, también llamado conjuntismo, es descendiente del formalismo hilbertiano, pero no es exactamente lo mismo. Este tipo de formalismo (Mosterin 1980) considera que en la evolución y desarrollo de las teorías matemáticas hay que considerar, como mínimo, tres estadios sucesivos, correspondientes a tres diferentes niveles de precisión y rigor en el concepto de prueba. En el primer estadio, llamado intuitivo o ingenuo, se prueban los enunciados de la teoría, pero no se dice ni de dónde parte la prueba ni cuáles son los procedimientos admisibles para probar. En el segundo estadio, llamado axiomático, se determina el punto de partida de la prueba, eligiendo ciertos enunciados de la teoría como axiomas y exigiendo que todos los demás sean probados a partir de ellos, aunque sigue sin explicitarse cuáles son los procedimientos o reglas o medios de prueba admisibles. En el tercer y último estadio, llamado formalizado, el concepto de prueba está completamente precisado y explicitado, tanto en lo que respecta al punto de partida de la prueba como a los medios de prueba permitidos.

A finales del siglo XIX se fundamenta toda la matemática sobre los números naturales y éstos sobre la teoría de conjuntos. La aparición de las paradojas lleva a la crisis de fundamentos de principios de siglo. Por un lado la matemática entera se fundamenta en la teoría de conjuntos y la lógica y por otro lado en la teoría intuitiva de conjuntos se descubren contradicciones que la hacen insostenible. Como respuesta a estas paradojas aparecen a principios de siglo tres respuestas diferentes: La respuesta de Brouwer que rechaza la lógica clásica y el infinito actual y postula una nueva lógica y una nueva matemática, dando lugar al intuicionismo. La respuesta de los Principia de Russell y Whitehead, que formula la teoría ramificada de los tipos, en la cual la eliminación de las contradicciones se obtiene al precio de una notable complicación técnica. Y la respuesta de Zermelo, consistente en axiomatizar la teoría de conjuntos con axiomas ad hoc que impidan la aparición de las contradicciones conocidas, conservando en lo posible la riqueza y agilidad de la teoría intuitiva de conjuntos. Aunque las dos primeras respuestas eliminan el peligro de caer en contradicciones de un modo mucho más seguro y radical, la corriente central de la matemática ha hecho suya la respuesta axiomática de Zermelo que hasta ahora no ha dado lugar a contradicciones. Desde el punto de vista formalista, la pregunta por la verdad o la falsedad de los enunciados matemáticos no tiene sentido en el estadio axiomático, ya que lo más que podemos preguntar con sentido es por la consistencia o contradicción del sistema. En ninguna de las actuales axiomatizaciones de la teoría de conjuntos se han producido contradicciones; pero en ninguno de ellos ha podido probarse que no puedan producirse el día menos pensado.

En 1931, Gödel, en el artículo "Sobre sentencias formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines", muestra que no hay ningún sistema formal matemático con un número finito de axiomas del cual pueda desarrollarse la aritmética que sea completo; por el contrario, hay problemas relativamente simples de la aritmética de números naturales que no pueden ser decididos con sus axiomas y reglas. La incidencia del resultado de Gödel sobre el logicismo y el formalismo fue la siguiente: 1) El teorema de incompletitud significó para el logicismo de Russell y Whitehead el fracaso de su intento de construir un sistema lógico que permita incluir la aritmética. 2) Respecto al formalismo cabe destacar que Gödel demostró los límites internos de los sistemas formales al demostrar que la matemática es inagotable desde cualquier sistema formal: siempre contendrán verdades matemáticas indecidibles.

Desde el punto de vista filosófico, la herencia de Frege, Russell, el primer Wittgenstein y el Positivismo Lógico ha sido una escuela de filosofía analítica que sostiene que el problema central de la filosofía es el análisis referencial del significado y que el instrumento esencial para efectuarlo es la lógica. Este punto de vista considera que la filosofía de las matemáticas tiene por objetivo el estudio de las teorías formalizadas. Desde esta perspectiva sólo interesa lo que se llamó "contexto de justificación" y se relega a otras disciplinas el "contexto de descubrimiento".

Desde el punto de vista educativo la herencia del formalismo ha sido las "matemáticas modernas", tanto en la enseñanza universitaria como no universitaria. La idea que inspiró esta reforma fue que la enseñanza de las matemáticas tenía que estar de acuerdo con el espíritu de la época, que creía que las matemáticas servían para estructurar el pensamiento y que eran el lenguaje de la ciencia. Podemos encontrar matemáticas en todas partes, se decía, pero no cualquier clase de matemáticas, sino las matemáticas de hoy en día: la teoría de conjuntos, las estructuras matemáticas, la probabilidad, la estadística, el álgebra, etc.; y cuanto más pronto los alumnos entren en contacto con estas matemáticas, mejor.

Como ejemplo de este interés por introducir lo más tempranamente posible las matemáticas modernas, tenemos la introducción de la teoría de conjuntos en la etapa infantil. Este intento de poner la enseñanza de las matemáticas al nivel de las matemáticas del siglo XX se consideraba especialmente necesario en los niveles primario y secundario, en los cuales se creía que se estaban enseñando contenidos obsoletos por no estar de acuerdo con el espíritu de las matemáticas modernas.

En la elaboración de los nuevos programas se procuró conseguir una coherencia interna desde el punto de vista de los contenidos matemáticos que se concretó en: 1) el desarrollo consecuente del punto de vista conjuntista y vectorial, 2) el desarrollo sistemático y coherente de la geometría a través del concepto de transformación y 3) el desarrollo de las estructuras algebraicas con aplicación inmediata a diferentes partes de la aritmética, del álgebra y de la geometría.

Los matemáticos profesionales partidarios de esta reforma creían que las dificultades que se producían en el aprendizaje de las matemáticas eran causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática tradicional (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducían en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa. Dicho en términos constructivistas actuales: consideraban que la matemática tradicional hacía una presentación confusa de las matemáticas y que, por lo tanto, no era potencialmente significativa para los alumnos.

Sin entrar en un análisis exhaustivo de las consecuencias del enfoque "moderno" de las matemáticas en la enseñanza no universitaria, podemos decir que los aspectos más perjudiciales de la aplicación concreta de esta reforma fueron (Núñez y Font 1995): a) Deductivismo exagerado: las matemáticas se presentaban como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente. Esta presentación podía poner de manifiesto al alumno la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impedía la acción, las conjeturas, la imaginación, etc; es decir, en la terminología de la época, "impedía hacer matemáticas". b) Definiciones formalizadas: se cayó en el error de identificar el concepto que se quería enseñar con su definición formalizada. Esta identificación llevó: 1) a presentar a los alumnos un exceso de simbolismo, 2) a hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber lo que estaban haciendo (formalismo prematuro) y 3) a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido, al mismo tiempo que permiten descubrir las relaciones con otros conceptos. c) Exceso de generalización y, por tanto, falta de procesos de abstracción: los conceptos se presentaban de la manera más general posible, con lo cual se iba de lo más general a lo más particular y, por tanto, no se mostraban al alumno las situaciones concretas que permitían abstraer sus similitudes e ir de lo concreto a lo más general. d) Las matemáticas por las matemáticas: se presentaban unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias. Los textos didácticos ofrecían pocas situaciones no matemáticas que permitiesen a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, lo cual facilitaba preguntas del tipo "esto para qué sirve".

El estrepitoso fracaso de la aplicación concreta de las matemáticas modernas modificó la manera de enseñarlas en las instituciones no universitarias en diferentes direcciones. Una fue enseñar teorías acabadas, sin demostrarlas deductivamente, focalizando el trabajo en el aula en el dominio de las técnicas algorítmicas que se derivaban de la teoría. Los partidarios de este estilo docente asumían, en muchos casos implícitamente, el punto de vista conductista en psicología. La otra, si bien consideraba fundamental el aprendizaje de las estructuras matemáticas, inició tímidamente una línea de trabajo, que llamaremos “semántica” -entendiendo por semántica todo aquello que tiene que ver con la construcción de significado que hace el alumno-, que pretendía resolver una de las grandes dificultades del aprendizaje de las matemáticas: su nivel de abstracción y generalización. Esta forma de entender la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideraba imprescindible presentar contextos variados que diesen sentido al concepto; oponiéndose a las versiones más formalistas de la matemática moderna, las cuales pretendían presentarlos de la manera más general posible y separados de los contextos que les daban sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir.

En el inicio de esta tímida línea semántica, además de las ideas de Piaget, las ideas de Bruner y Dienes tuvieron mucha influencia. Bruner se preocupó de estudiar el concepto de representación cognitiva. Según Bruner las hay de tres tipos: 1) La representación enactiva es un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada. 2) La representación icónica consiste en recrear mentalmente una situación anterior. 3) La representación simbólica permite representar las situaciones mediante símbolos. Bruner propuso que los conceptos se enseñasen siguiendo estas tres fases.

Dienes se preocupó del aprendizaje de los conceptos matemáticos y diseñó una serie de secuencias didácticas regidas por los siguientes principios: 1) Principio dinámico: Deben incluirse actividades prácticas o mentales que provean de la necesaria experiencia fundamental. 2) Principio de constructividad: Esencialmente implica la inducción desde lo particular a lo general (en contraste con el análisis que va de lo general a lo particular). 3) Principio de variabilidad matemática: Debe variarse la estructura matemática a partir de la cual el nuevo concepto o proceso se desarrolla para permitir que se distingan claramente todas las características matemáticas implicadas. 4) Principio de variabilidad perceptiva: Debe variarse suficientemente el marco de experiencia a partir del cual se desarrollan ideas y procesos al objeto de prevenir su fijación en un conjunto o conjuntos particulares de experiencias, esto es, debe propiciarse la abstracción.

Los partidarios de esta “línea semántica” decían que la enseñanza de las matemáticas debía de tener en cuenta el desarrollo de las capacidades intelectuales de los alumnos, y que se tenía que ir de la acción a la abstracción, de acuerdo con Piaget, Lovell, Bruner, Dienes, etc. Todos estos autores coincidían en que, para poner de manifiesto las estructuras subyacentes de las matemáticas, el alumno tenía que pasar por tres fases: 1) Fase de manipulación: los conceptos tienen su origen en las acciones realizadas sobre los objetos. 2) Fase de representación: aquello que se ha comprendido se ha de poder explicar oralmente y se ha de saber representar icónicamente, y 3) Fase simbólica: esta etapa es la más reflexiva y la que posibilita el paso efectivo a la abstracción; aquello que se ha comprendido se ha de saber trabajar con símbolos sin un referente concreto.

Estas ideas se concretaron en la producción y utilización de diferentes materiales (los bloques lógicos y los bloques multibase de Dienes entre otros) que fueron muy importantes durante los años 75-80 y que aún son usados actualmente. Sin embargo, pronto aparecieron los críticos, entre los que hay que destacar a Freudenthal (1983), a este punto de vista. Su crítica consistía en poner en cuestión que la vía indicada fuese ir de las estructuras matemáticas a las situaciones que las ejemplifican. Frente a este punto de vista, Freudenthal desarrolla lo que conocemos por "fenomenología didáctica". Lo que una fenomenología didáctica permite es precisamente preparar y organizar el camino contrario: se parte de los "phenomena" que solicitan ser organizados y entonces la tarea consiste en enseñar al estudiante a manipular los medios de su organización. Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los "phenomena" tanto del mundo real como del mundo imaginario. Así los números organizan el "phenomenon" de la cantidad, las figuras geométricas organizan el "phenomenon" del contorno, forma, etc.

5) *Se puede considerar que el pensamiento matemático no informa de las "cosas" como los árboles, sillas, etc porque lo que hace es informar sobre aquello que nosotros ponemos (ya sabemos) en ellas. Por ejemplo, los juicios sintéticos a priori basados en el apriorismo kantiano.*

Kant intentó una síntesis entre el racionalismo y el empirismo. Su solución consistió en dar la vuelta a la relación de las personas con el mundo real. En lugar de suponer que los objetos existen independientemente de nosotros, y preguntarnos después cómo podemos conocerlos, Kant sostenía que nuestras actividades cognitivas eran parcialmente constitutivas de los objetos de los cuales tenemos experiencia. Mantenía, además, que es precisamente nuestra propia participación en la construcción de los objetos de percepción lo que hace posible que conozcamos. Al explicar como nuestra actividad cognitiva es constitutiva de los fenómenos que experimentamos, Kant subscribió en parte el enfoque racionalista. Afirmaba que nuestra capacidad de percibir y de pensar sobre la naturaleza dependía de conceptos o categorías del entendimiento que nosotros aportamos a la experiencia, categorías que poseemos de manera innata. Estas categorías se han de aplicar al input sensorial que recibimos, para constituir nuestro mundo de experiencia. Para tener experiencia de un objeto, el intelecto ha de aplicar las categorías a nuestros inputs sensoriales.

Kant mantenía que los objetos que causan las experiencias sensoriales (noúmenos) son incognoscible para nosotros; por tanto, no tiene sentido investigar qué son. Por otra parte, los objetos de la experiencia fenoménica, los que se construyen aplicando las categorías a los estímulos sensoriales, están dentro de nuestro dominio de conocimientos. Debido a que estos objetos se han construido de acuerdo con nuestras categorías, podemos estar seguros que se adapten a ellas. Por ejemplo, debido a que construimos el mundo de manera que cada suceso tenga una causa, sabemos con certeza que todo suceso tiene una causa. De la obra de Kant nos interesa constatar que: 1) El mundo de los noúmenos queda despojado de las categorías, 2) Las categorías las aporta el sujeto, 3) Las categorías son innatas y 4) el mundo fenoménico deja de ser concebido como la representación pasiva de la realidad exterior y, en su lugar, es visto como una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales.

El punto de vista kantiano permite una alternativa ontológica al platonismo: "el constructivismo". Para Kant, las matemáticas son el resultado de una construcción "a priori", que las personas imponen a la realidad física, y algunos de sus resultados son sintéticos a priori. O sea, incluso antes de la experiencia, algunos juicios matemáticos permiten conocer como han de ser las cosas en la naturaleza. Para Kant, algunos axiomas de la geometría eran sintéticos a priori, pero la aparición de las geometrías no euclídeas tiró por tierra tal suposición.

La aparición de las geometrías no euclídeas obligó a abandonar el apriorismo kantiano del espacio, pero permitía mantener el apriorismo temporal. Esta fue la opción que tomó el intuicionismo de Brouwer al postular que los números naturales se construyen a partir del apriorismo temporal del ser humano. El principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático, afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales. Una definición perfecta, sin ambigüedad, de qué es lo que constituye una construcción mental como construcción matemática, no se puede dar, pues la intuición de lo que es esa construcción matemática mental es irreducible a otros conceptos más primitivos. Estas construcciones mentales son verdaderas porque son lo que nosotros ponemos en las cosas, pero no implican verdad alguna sobre el mundo si lo consideramos independiente de la experiencia humana.

Según el intuicionismo, los números naturales se construyen inmediatamente en la mente del sujeto y su verdad se basa en la evidencia de la intuición. A partir de los números naturales los intuicionistas no tienen problemas para construir los racionales. Ahora bien, la necesidad de sujetarse a definiciones estrictamente constructivas excluye las definiciones de número real de Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Para la mayoría de los matemáticos, el aspecto inaceptable del intuicionismo es la mutilación que realiza de la matemática. No obstante, el debate sobre algunos aspectos de la teoría de conjuntos -y en especial sobre el axioma de elección- está produciendo un renacido interés por las ideas constructivistas. Este interés ha sido impulsado en gran medida por Errett Bishop. El trabajo de E. Bishop pone en relieve que los métodos constructivistas pueden ser tan beneficiosos como los formalistas para el desarrollo de las matemáticas. La principal diferencia entre E. Bishop y Brouwer es que el primero no rechaza la teoría de conjuntos de Cantor, sino que intenta modificarla para dotarla de validez constructivista. Según esto, el axioma de elección, que fue el más criticado de la teoría de conjuntos de Cantor por Brouwer y sus seguidores, es ahora aceptado.

La principal repercusión del punto de vista constructivista, propuesto inicialmente por Kant y asumido posteriormente por el intuicionismo, es la aparición de una alternativa ontológica al platonismo. Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos. Otra repercusión importante es la constatación de que el mundo fenoménico es una construcción activa, que es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus categorías) y sus experiencias sensoriales. Cómo se realiza esta construcción y el papel que juega en ella la intuición se convierte en una sugerente agenda de investigación para la didáctica de las matemáticas.

Con relación al papel de la intuición hay que destacar que Efraim Fischbein nos ha legado un enfoque original hacia los problemas educativos centrado en esta compleja noción. La síntesis de este enfoque está contenida en su libro "Intuition in Science and Mathematics" (1987), donde se esboza una "teoría de la intuición" que se ofrece a la comunidad de investigadores como una herramienta útil para la interpretación de fenómenos en educación.

2.3 Respuestas Actuales

6) *Se puede buscar una síntesis entre el punto de vista que considera que las matemáticas son un modo de pensar que no depende de las "cosas" de nuestra experiencia y el punto de vista que considera que sí dependen de ellas. Estas síntesis excluyen recurrir a mundos platónicos.*

7) *La primera síntesis pone el acento en el punto de vista que considera que las matemáticas son un modo de pensar que depende de las "cosas" de nuestra experiencia y propone una alternativa más sofisticada de la que propuso Mill. En esta versión (débil), no se dice que las matemáticas dependen de las "cosas" de nuestra experiencia como los árboles, sillas, etc. de la misma manera que lo hacen las otras ciencias experimentales (versión fuerte), sino que las matemáticas es una ciencia que presenta las mismas características que las ciencias empíricas. Esta última tesis recibe el nombre de "cuasi-empirismo" o falibilismo y se debe a Lakatos.*

Lakatos considera que el problema de los fundamentos de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del siglo XX es un capítulo del problema del fundamento del conocimiento en general; y es desde esta perspectiva que tiene que examinarse. Las dos posturas dadas al problema del conocimiento son: 1) el dogmatismo que defiende la posibilidad del conocimiento y cuya tarea consiste en encontrar un fundamento "infalible" sobre el cual construir con certeza todas las verdades; 2) el escepticismo que considera imposible el conocimiento porque no puede evitarse el regreso al infinito. De estas dos posturas, Lakatos considera que el escepticismo ha ido ganando terreno en las ciencias empíricas; pero que no ha podido penetrar en el área de la matemática. Siempre que el dogmatismo matemático de la época entraba en "crisis", una nueva versión suministraba de nuevo genuino rigor y fundamentos últimos, restaurando con ello la imagen autoritaria, infalible e irrefutable de las matemáticas. Las filosofías logicista y formalista de las matemáticas, dice Lakatos, constituyen los últimos eslabones de la larga cadena de filosofías dogmáticas de las matemáticas.

Uno de los objetivos de Lakatos es acabar con el dogmatismo matemático. Los dos teoremas de Gödel significan, para él, el fin del ideal de infalibilidad de la matemática que persiguen tanto el logicismo como el formalismo. Para no caer en el escepticismo, Lakatos se propone seguir el falibilismo crítico de Popper, pero, a diferencia de él, que no era falibilista en matemáticas y lógica, Lakatos se propone aplicarlo a la matemática.

Según el nivel en el que se inyecta el valor de verdad y el significado de los términos, las teorías pueden ser, según Lakatos, euclídeas o empiristas. Mientras que el Programa Euclídeo los pone en la cúspide, el Programa Empirista los pone en la base. De estos dos, al primero lo denomina Programa de Trivialización del Conocimiento, en cuanto que las teorías están formadas por axiomas infalibles que constan de términos primitivos perfectamente conocidos, y el tipo de prueba que emplea para demostrar los teoremas garantiza la verdad y la transmite de arriba-abajo. El programa "logicista" y el programa "formalista" son dos tipos de Programas Euclídeos cuyo fin es fundamentar la matemática frente a la crítica escéptica. Ahora bien, este intento choca con los dos teoremas de Gödel, que ponen de manifiesto, según Lakatos, que el regreso al infinito en pruebas y definiciones no puede detenerse.

Una vez admitida la derrota del dogmatismo Lakatos se pregunta, ¿no conduce esto a la derrota escéptica? y su respuesta es: "*Pero ello no lleva necesariamente al escepticismo matemático: sólo obliga a admitir la falibilidad de una especulación audaz.*" (Lakatos 1981 p. 39). Su propósito es mostrar que la matemática es conjetural, pero sin que signifique necesariamente abandonar la razón por completo. La matemática no puede sostener su certeza sobre la trivialidad de su contenido, como ha pretendido el Positivismo Lógico, sino que consiste en conjeturas audaces y profundas, a costa de su falibilidad. Puesto que el regreso al infinito imposibilita la fundamentación de la matemática, Lakatos propone sustituir esta tarea por el problema del avance del conocimiento y se formula la siguiente pregunta: ¿Cómo sabemos que avanzamos? A la que responde: lo conjeturamos.

Para Lakatos, los teoremas de Godel, invalidan la demarcación de las ciencias sostenida por el Positivismo Lógico entre las ciencias naturales -a posteriori, empíricas y falibles- y la matemática -a priori, tautológica e infalible. Lakatos también considera que los dos teoremas de Gödel propiciaron un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática, en el cual incluye, por diferentes motivos, a Russell, Church, Gödel, Carnap, Quine, Rosser, Weyl, Mostowski y Kalmar. A Russell, por ejemplo, lo incluye porque en 1924 dice que la lógica y matemática son aceptadas, igual que la electrodinámica de Maxwell, por sus consecuencias observadas.

En su libro "Pruebas y refutaciones" (1978) Lakatos presenta un intercambio de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar el producto de la actividad matemática -las matemáticas formalizadas, presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura. En este libro Lakatos utiliza la historia para intentar convencer al lector de que las matemáticas "informales" -las matemáticas en proceso de crecimiento y de descubrimiento- lo mismo que las ciencias experimentales, son falibles y no indubitables; que también se desarrollan gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión. Lakatos señala que su teoría es cuasi-empirista (no pura y simplemente empirista) porque los falsadores potenciales y los enunciados básicos de las matemáticas, a diferencia de los de la ciencia natural, no son enunciados singulares espacio-temporales. Para Lakatos los falsadores potenciales de las teorías matemáticas formalizadas son teorías informales. Dicho con otras palabras, ante la cuestión de si aceptar o rechazar un sistema de axiomas que se nos proponga para la teoría de conjuntos tomaremos nuestra decisión dependiendo de la medida en que el sistema formal reproduzca o se conforme a la teoría matemática que inicialmente tuviéramos en mente. Evidentemente, Lakatos tiene plena conciencia de que podemos también optar por modificar nuestra teoría informal, y que la decisión de cuál haya de ser el camino a tomar puede ser cuestión compleja y controvertida. Llegados a este punto, Lakatos se encuentra cara a cara con el problema principal, ¿Cuáles son los "objetos" de las teorías matemáticas "informales"? Cuando hablamos de triángulos, números, etc., sin referencia a ningún sistema de definiciones y axiomas, ¿de qué clases de entidades estamos hablando?. Tal como señalan Davis y Hersh (1988), Lakatos deja sin responder a esta pregunta.

La principal repercusión del punto de vista de Lakatos en la enseñanza de las matemáticas fue poner en primer plano la resolución de problemas. Como alternativa al formalismo en que había degenerado la introducción de las matemáticas modernas en la enseñanza no universitaria, surgieron, tanto en España como en otros países, diferentes grupos de renovación que profundizaron en la línea semántica. Estos grupos proponían una alternativa basada en: 1) enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y 2) hacer ver a los alumnos que las matemáticas se podían aplicar a situaciones de la vida real. Para estos grupos, la obra de Lakatos era la justificación teórica de algo que habían constatado en su práctica: la necesidad de pasar de enseñar teorías matemáticas acabadas a enseñar a "hacer matemáticas". Desde esta perspectiva, en la enseñanza de las matemáticas escolares se debía poner el enfoque en la resolución de problemas.

Si bien la obra de Lakatos fue uno de los principales referentes epistemológicos del punto de vista que considera que la esencia de las matemáticas es la resolución de problemas, otros autores ayudaron a desarrollarlo. Entre estos autores destaca Polya. Para Polya (1965), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal. Ahora bien ¿Por qué es tan difícil, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas? Los trabajos de Schoenfeld (1985) tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas. Schoenfeld propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles, 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles y 4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

Guzmán (1991) partiendo de las ideas de Polya, de los trabajos de Schoenfeld y de los de Mason, Burton y Stacey, (1988) ha elaborado un modelo para la resolución de problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática, a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces. Consta de las fases siguientes: 1) Familiarízación con el problema, 2) Búsqueda de estrategias 3) Ejecución de la estrategia y 4) Revisión del proceso y extracción de consecuencias.

Los intentos prácticos de poner la resolución de problemas como eje de la enseñanza de las matemáticas escolares tuvieron que responder a la pregunta ¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas? Cabe al menos tres interpretaciones: 1) Enseñar para resolver problemas, 2) Enseñar sobre la resolución de problemas y 3) Enseñar vía la resolución de problemas.

De entrada, podemos considerar que enseñar para resolver problemas consiste en proponer al alumno la resolución de una serie de problemas, que tiene que resolver como resultado de su actividad. Los principales argumentos a favor de este tipo de enseñanza-aprendizaje son: 1) el alumno, resolviendo problemas aprende a "hacer" matemáticas y de esta manera las vive como un proceso más que como un producto terminado, 2) la resolución de problemas es una actividad que puede motivar más fácilmente a los alumnos que la clase expositiva tradicional y 3) la actividad de resolución de problemas es intrínsecamente gratificante para los alumnos. Las asignaturas que se plantean enseñar a resolver problemas a base de resolver problemas en el aula están basadas en la suposición de que la forma fundamental de aprender a resolver problemas es resolver muchos problemas y que, al hacerlo, se aprenden las técnicas, los métodos o las herramientas heurísticas que están implícitas en ellos. Esta suposición está de acuerdo con uno de los resultados a los que ha llegado la investigación sobre resolución de problemas: intentar resolver muchos problemas es esencial para poder resolver problemas.

La segunda interpretación considera que no basta con resolver problemas sino que hay que reflexionar también sobre las heurísticas y destrezas que permiten resolverlos. La novedad de este segundo punto de vista está en considerar como parte del currículum la reflexión sobre las técnicas que permiten resolver problemas. Desde este punto de vista, los problemas se eligen de manera que la aplicación a ellos de una herramienta heurística concreta sirva para ilustrar el valor instrumental de esta herramienta en determinados tipos de problemas.

La tercera opción consiste en enseñar vía la resolución de problemas. Desde este punto de vista, hemos de entender los procesos de enseñanza como la presentación de secuencias de actividades que tienen por objetivo, en el tiempo y con los medios disponibles, la emergencia y organización de objetos matemáticos. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

Es importante remarcar que la opción que propone las bases psicopedagógicas del curriculum del estado español ha resuelto en parte la polémica entre las tres interpretaciones anteriores al reconocer que aprender no consiste en acumular información ni tampoco únicamente en investigar y solucionar problemas. Un aprendizaje significativo y funcional requiere, al mismo tiempo, la adquisición de conceptos y de procedimientos. Por este motivo, la resolución de problemas se ha de incorporar como uno de los procedimientos que hay que enseñar a los alumnos.

8) *La segunda síntesis es la propuesta por Piaget. Ésta pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia, que no depende de ellas.*

Para la epistemología genética, la esencia del pensamiento matemático es la universalidad y la necesidad, y cualquier sujeto, como resultado del proceso evolutivo de especie, está biológicamente preparado para desarrollar un pensamiento matemático universal y necesario. La epistemología genética de Piaget, igual que la filosofía kantiana, pretende ser una síntesis entre el empirismo y el racionalismo. Piaget considera que las proposiciones de las matemáticas son verdades necesarias, mientras que las de las ciencias de la naturaleza dependen de la experiencia. Ahora bien, Piaget pretende aportar la explicación psicológica adecuada para mostrar como las proposiciones lógico-matemáticas son adquiridas también a partir de la experiencia sin que esta génesis empírica comprometa su valor universal y necesario. Piaget considera que no es cierto que la actividad cognitiva del sujeto extraiga los universales de la experiencia a partir de la abstracción por comparación (punto de vista empirista) ni tampoco lo es que el conocimiento universal y necesario sea el resultado de la actividad constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento en virtud de ideas innatas o bien de estructuras a priori presentes desde el principio en cualquier sujeto (punto de vista racionalista). Piaget considera que las estructuras de conocimiento que hacen que las proposiciones de las matemáticas sean verdades necesarias son el resultado de un proceso, que comienza con la etapa sensomotriz y acaba en la etapa del pensamiento formal, que tiene por objetivo la adaptación del sujeto al mundo que le rodea.

Piaget (1979) diferencia la construcción matemática del descubrimiento y de la invención, y dice que el conocimiento matemático es una construcción que no es una invención ni un descubrimiento. Pero que, en cierta manera, esta construcción tiene algo de descubrimiento, ya que, como resultado de un proceso evolutivo de la especie, todos estamos en condiciones de construir el mismo conocimiento; y también hay algo de invención porque las construcciones matemáticas pueden ir en distintas direcciones.

Piaget fue uno de los psicólogos que más claramente puso de manifiesto las limitaciones del punto de vista que considera que generalizamos como resultado de un proceso de comparación. Piaget considera que la abstracción es la facultad que nos permite construir los conceptos, pero no considera que ésta construcción sea sólo el resultado de la comparación, sino que cree que nuestras acciones son muy importantes para abstraer los conceptos. En función de las experiencias que intervienen en la formación de un concepto, Piaget distingue la abstracción simple o empírica de la abstracción reflexiva o lógico-matemática. Estos dos tipos de abstracciones funcionan de manera coordinada en la mayoría de las situaciones en las que generalizamos, aunque de cara a su estudio conviene tratarlas separadamente. Esta manera de entender el proceso de abstracción permite explicar la construcción de los objetos matemáticos. Estas ideas han tenido influencia en los trabajos de Dubinsky (1996) y Dörfler (1991) y en general sobre las investigaciones que estudian el pensamiento matemático avanzado (Tall 1991).

Piaget considera que el aprendizaje es constructivo, para él comprender es inventar, es construcción realizada por uno mismo. Aunque podemos ayudar a los alumnos a adquirir conceptos matemáticos por medio de materiales didácticos y de preguntas y explicaciones de los profesores, sólo por su propio esfuerzo pueden comprender verdaderamente. Con este punto de vista coinciden muchos otros psicólogos y hoy en día podemos hablar de una concepción constructivista del proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene a Piaget como uno de sus principales referentes. Este tipo de constructivismo psicológico no tiene en cuenta la especificidad del contenido a enseñar -sirve tanto para enseñar historia como para enseñar matemáticas- y en el que, a pesar de contemplar aspectos sociales e institucionales, prima la construcción individual del sujeto.

9) *La tercera síntesis es la propuesta por la actual ciencia cognitiva de las matemáticas basada en el reconocimiento de la importancia que tiene nuestro cuerpo sobre nuestra mente y en el pensamiento metafórico. Ésta también pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia que no depende de ellas.*

La nueva disciplina, llamada por sus autores "Ciencia Cognitiva de la Matemática" (Lakoff y Núñez, 2000, Núñez 2000), afirma que el origen de las ideas matemáticas de las personas hay que buscarlo en los mecanismos cognoscitivos cotidianos, basados en la importancia que tiene el cuerpo sobre la mente, como son los esquemas de las imágenes y el pensamiento metafórico. Según este punto de vista, la naturaleza de las matemáticas hay que buscarla en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones ni en mundos trascendentes platónicos. Estas ideas surgen de los mecanismos cognitivos y corporales de las personas. Debido a su origen, común a todas las personas, las ideas matemáticas no son arbitrarias, no son el producto de convenciones completamente sociales y culturales (aunque los aspectos sociohistóricos son importantes en la formación y desarrollo de estas ideas). Al igual que la teoría de Piaget, esta teoría afirma que las matemáticas son el resultado de la experiencia humana pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las matemáticas.

Recientemente la ciencia cognitiva no dualista en la que se basa la nueva teoría ha realizado importantes avances en la comprensión del funcionamiento de la mente y más en concreto sobre nuestra comprensión de las matemáticas. Estos son: 1) *La importancia que tiene el cuerpo sobre la mente.* La naturaleza y dinámica de nuestros cuerpos, nuestros cerebros, y nuestro funcionamiento de todos los días tiene una importancia fundamental en la estructura de la razón humana, la cual incluye el pensamiento matemático. 2) *El papel del conocimiento inconsciente.* La mayoría de los procesos cognitivos son inconscientes en el sentido de que no son accesibles a nuestra introspección consciente. Nosotros no podemos llegar directamente por medio de la introspección a nuestros sistemas conceptuales y a nuestros procesos cognitivos de nivel inferior. Esto incluye una gran parte del pensamiento matemático, y 3) *El pensamiento metafórico.* La mayor parte de los seres humanos conceptúan conceptos abstractos en términos concretos y usan la estructura inferencial y unos modos de razonar conectados con nuestro sistema motórico y sensorial. El mecanismo cognitivo que permite que lo abstracto se comprende en términos de lo concreto es la metáfora conceptual. El pensamiento matemático también hace uso de la metáfora conceptual, como cuando nosotros conceptuamos números como puntos en una línea, o espacio como conjunto de puntos.

A la pregunta ¿Cuáles son las capacidades cognitivas, basadas en la importancia del cuerpo sobre la mente, que permiten a una persona pasar de las habilidades numéricas básicas innatas a un entender profundo y rico de, por ejemplo, las matemáticas de una licenciatura universitaria de una facultad de ciencias? Lakoff y Nuñez responden que éstas no son independientes del aparato cognitivo usado fuera de matemática. Según estos autores, la estructura cognitiva necesaria para la matemática avanzada usa el mismo aparato conceptual que el pensamiento cotidiano en las situaciones ordinarias no matemáticas, esto es: esquemas de la imagen, esquemas aspectuales, mezclas conceptuales y la metáfora conceptual. De ellos, es el pensamiento metafórico el más importante para la construcción de las matemáticas.

Este punto de vista es en cierta forma apriorístico ya que considera que la actividad constitutiva del sujeto en el acto de comprensión matemática lleva a verdades consideradas necesarias para cualquier sujeto normal. Por una parte, considera probado por la actual neuropsicología que todos los individuos de la especie Homo Sapiens nacen con la capacidad de distinguir entre un número muy pequeño de objetos y sucesos, y, por otra parte, considera que casi todos los sujetos tienen la capacidad de llegar a comprender las verdades matemáticas, puesto que estas se basan en unos procesos cognitivos básicos y comunes a todos los miembros de la especie. De todas maneras es un tipo de apriorismo relativamente débil.

La principal aportación de este punto de vista a la educación matemática consiste en señalar la importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción de las matemáticas. El papel del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido, en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia en la investigación en didáctica de las matemáticas (v.g. English 1997, Font y Acevedo 2003, Lakoff y Núñez 2000, Núñez 2000 y Pimm 1990).

Las metáforas se caracterizan por crear un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite la transfusión de propiedades del dominio de partida dentro del domino de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se transpongan una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Las investigaciones sobre el pensamiento metafórico han detectado diferentes clases de metáforas.

Hay una primera clase de tipo extramatemático, por ejemplo "una función es una máquina", que sirven para explicar o interpretar situaciones matemáticas en términos de situaciones reales. Uno de los ejemplos más notables de este tipo es la del "contenedor", usada para estructurar la teoría de clases, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana. En las aulas, además de las metáforas extramatemáticas, son frecuentes también las matemáticas, las cuales permiten estructurar partes del conocimiento matemático a partir de otras partes de las matemáticas que ya son conocidas. Ejemplos de este tipo son "los números reales son los puntos de una recta", "los números complejos son vectores", etc.

El uso de metáforas plantea algunas dificultades. En efecto, puede ocurrir, por ejemplo, que el alumno, en lugar de entender que una función se puede comprender a partir del funcionamiento de una máquina, tome la expresión "una función es una máquina" de manera literal, es decir: que piense que una función realmente es una máquina. Ahora bien, las dificultades relacionadas con el pensamiento metafórico no se pueden reducir a la causada por el significado literal de la metáfora; ya que incluso cuando se hace un uso correcto de la metáfora y se estructura un campo de conocimiento en términos de otro ya conocido, se corre el peligro de trasladar relaciones que no son válidas.

10) *La cuarta síntesis tiene un fuerte componente pragmático y pone el acento en el punto de vista que considera el pensamiento matemático como una determinada manera de pensar sobre las "cosas" de nuestra experiencia que sí depende de las "cosas", ya que postula que las matemáticas son un producto histórico que se consideran universales y necesarias porque han resultado útiles para organizar nuestro conocimiento de las "cosas" de nuestra experiencia.*

Uno de los primeros sociólogos que se opuso a la idea de que las matemáticas no puedan variar igual que varía la organización social fue Spengler en el capítulo "El sentido de los números" de su obra "La decadencia de Occidente" publicada en 1918. En este capítulo Spengler expone tres ideas que, con el tiempo, han ido adquiriendo una gran importancia. La primera es la distinción entre la actividad matemática y su producto. La segunda es el cuestionamiento de la división entre síntesis a priori y síntesis a posteriori y la tercera es que cada cultura genera su matemática (Spengler, 1958).

La obra de Spengler tuvo una fuerte influencia sobre Wittgenstein. Este filósofo en sus trabajos sobre los Fundamentos de Matemática (1987) sostiene que la actividad matemática consiste en juegos del lenguaje. Éstos no son juegos en el sentido trivial, sino prácticas sometidas a reglas. Wittgenstein defiende que nosotros seguimos a menudo reglas en el razonamiento matemático debido a la costumbre, no debido a necesidad lógica. Para Wittgenstein, la verdad, certeza o "necesidad" matemática no es más que el "estar de acuerdo" con el resultado de seguir una regla que forma parte de un juego de lenguaje que se pone en funcionamiento en determinadas prácticas sociales. No es un "acuerdo de opiniones" arbitrarias es un "acuerdo" de prácticas sometidas a reglas. La contribución de Wittgenstein es señalar que lo importante es lo que los matemáticos hacen en la práctica, y no los resultados de esta práctica.

La visión de las Matemáticas de Wittgenstein se basa en una concepción pragmatista del significado. Para él, el significado es el uso y se opone a la visión referencial del significado. El punto de vista referencial se puede formular así: "algo" representa "algo". Desde este punto de vista un signo matemático representa un objeto matemático. Este punto de vista relega al usuario de las matemáticas y las contempla como "conocimiento sin sujeto cognoscente" ya que lo que interesa son los productos de la actividad matemática y no las prácticas de los matemáticos. Los estudios sobre la actividad matemática de tipo naturalista (Kitcher 1984) y los histórico-sociales (Wittgenstein 1987, Ernest 1998 y Restivo 1992) desarrollados en los últimos años han desplazado el centro de interés desde las teorías matemáticas como productos acabados hacia la actividad matemática entendida como una práctica social en un doble sentido: por un lado, en cuanto es aprendida de otras personas, y por otro, porque está formada por reglas que se siguen habitualmente.

Los estudios naturalistas y los histórico-sociales sobre las matemáticas han puesto de manifiesto que la significación no se agota en el plano semántico ya que hay que considerar al usuario. Los orígenes de esta perspectiva pragmática se pueden encontrar en la semiótica de Peirce, la cual estudia la relación entre un interpretante y los signos en el marco de una teoría comprehensiva de éstos. El punto de vista pragmático se puede formular así: "algo" representa "algo" para "alguien". Desde esta perspectiva, el significado no es inherente al objeto sino que se construye en el proceso de interpretación de manera no arbitraria ya que está vehiculado por la intersubjetividad. El hecho de considerar al interpretante permite postular una teoría de la significación de los objetos matemáticos compatible con la máxima pragmática de Peirce para captar el significado de las ideas que utilizamos: "*consideremos los efectos prácticos que creemos que podrían producirse por el objeto de nuestra concepción. La concepción de todos los efectos es la concepción completa del objeto (CP, 5.402)*". (citado en Ibarra y Mormann, 1997, p. 277).

Esta manera de entender el significado se basa en la suposición que los sistemas matemáticos de signos que se manipulan en el aula adquieren significado para los alumnos al ser usados. Desde este punto de vista, diremos que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Se entiende pues, la comprensión y el significado, básicamente, como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental que se produce en su mente cuando usa el contenido matemático. La capacidad se traduce en prácticas que son evaluables públicamente, mientras que el proceso mental es una experiencia privada de la persona. Dicho de otra manera: optar por una visión pragmática del significado implica focalizar el interés en las prácticas públicas y dejar en segundo plano el interés por los procesos mentales de las personas -que como mucho se pueden considerar prácticas privadas-. Desde este punto de vista, la objetividad se entiende como la intersubjetividad que resulta de una construcción social. El conocimiento se entiende como un producto de las instituciones de la sociedad y, a pesar de la objetividad que lo caracteriza, no por eso adquiere un status ontológico diferente de la actividad humana que lo ha producido.

La interpretación pragmatista del significado choca con el problema de "la objetividad de la teoría". Si no se puede explicar desde un punto de vista pragmatista "la objetividad de la teoría", su interpretación del significado resulta ser muy limitada. La explicación desde un punto de vista pragmatista de "la objetividad de la teoría" es un tema complejo porque la objetividad (certeza o verdad necesaria) es un objetivo que las ciencias pretenden conseguir haciendo abstracción de los utilizadores. La aceptación de la explicación pragmatista de "la objetividad de la teoría" sólo es posible si previamente se ha puesto entre paréntesis como mínimo: 1) la suposición que la ciencia nos ofrece copias cada vez mejores de una realidad que tiene sus propias determinaciones, 2) la teoría referencial del significado y 3) la suposición que la actividad constitutiva del sujeto lleva a verdades necesarias. El cuestionamiento de estas tres suposiciones es el resultado de un largo proceso que ha producido un desplazamiento de los estudios sobre la ciencia desde el estudio de las teorías al análisis de las prácticas.

Este desplazamiento ha sido posible gracias a la superación de la división entre el "contexto de justificación" y "el contexto de descubrimiento". En esta superación han tenido un papel destacado el libro de Kuhn "La estructura de las revoluciones científicas" publicado en 1962 (Kuhn 1981) y el artículo de Quine "Naturalización de la epistemología" publicado en 1969 (Quine 2002). El primero, que se puede considerar una de las bases del punto de vista llamado "socio-histórico" atrajo la atención de los filósofos de la ciencia sobre el desarrollo histórico de las teorías científicas, mientras que el segundo, que está en la base de lo que se ha venido en llamar "naturalismo" en la filosofía de la ciencia, postula que no es posible disponer en filosofía de ninguna posición ventajosa desde la que puedan realizarse hallazgos "a priori". Quine en 1950 (Quine 1984) consideró que no hay posible distinción entre verdades de hecho, susceptibles de ser demostradas por la experiencia y verdades de la lógica y de las matemáticas que, al no decir nada de los hechos, no tienen que ser verificadas por la observación. Los enunciados, tanto si son analíticos como si son sintéticos, forman parte de una teoría que debe ser confirmada globalmente por la experiencia.

Los planteamientos que presentan un fuerte componente pragmatista explican la producción y la evolución del conocimiento matemático a partir de las "cosas" de nuestra experiencia, no de una manera simple como la de Mill sino que intentan explicar esta dependencia de una manera más compleja en la que las instituciones sociales juegan un papel fundamental. Para ello es necesario ir más allá de un estudio de los resultados de la actividad matemática, tras los productos hay que estudiar los actos de producción. Una característica común a todos los partidarios de este punto de vista es la aceptación del falibilismo de las matemáticas.

Estos puntos de vista están de acuerdo con la visión falibilista de las matemáticas propuesta por Lakatos. Aunque no queda suficientemente explícito en sus "Pruebas y Refutaciones" (Lakatos 1978) que este autor considere que las matemáticas proceden por negociación, o que la heurística sea la esencia de las matemáticas en lugar de los resultados, estos autores así lo han considerado y han interpretado que Lakatos propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. Están de acuerdo con él en que las matemáticas son falibles, pero no en que las matemáticas y el conocimiento científico en general evolucione por pruebas y refutaciones hacia la verdad tal como propone Popper.

Entre las contribuciones más recientes a este punto de vista destaca la propuesta de Kitcher (1984). Un punto de vista intermedio entre Piaget y el pragmatismo es el de Kitcher. Este autor sostiene que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera. El input original es empírico y útil y, luego, la capacidad humana de realizar acciones operatorias hace las matemáticas herméticas a la influencia empírica o pragmática cotidiana. Para Kitcher, los nuevos resultados matemáticos obedecen a la necesidad de resolver problemas que se plantea la comunidad matemática. Para Kitcher la materia última de las matemáticas es la forma en la cual los seres humanos estructuramos el mundo, realizando manipulaciones físicas o a través de las operaciones del pensamiento. Las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual se le atribuyen poderes de actuación superiores a los que tienen las personas normales -por ejemplo, recorrer los términos de una progresión geométrica.

Este sujeto ideal es esencial para poder dar cuenta de gran parte de las matemáticas actuales. Ahora bien, la introducción de este sujeto ideal conlleva el peligro de hacer pensar que las matemáticas, al desarrollarse a partir de estos poderes, generen conceptos matemáticos carentes de significado o de utilidad. Kitcher considera que este peligro se evita por la actuación conjunta de dos factores. Uno es la comunidad matemática y el otro es que las acciones nuevas que consideramos que son realizables no son acciones cualesquiera sino aquellas que amplian acciones que se consideran realizables por las personas. Kitcher considera por una parte que la matemática es la ciencia de las operaciones humanas, y por otra que su evolución y racionalidad sólo se puede establecer de manera histórica a través de la evolución misma de las comunidades matemáticas, al igual que en las otras ciencias naturales. Para Kitcher la verdad en matemáticas es lo que establece en cada momento la evolución histórica.

Otro punto de vista que pone el acento en los aspectos sociales es el de Bloor (1998). Bloor parte del punto de vista propuesto por Mill y analiza la crítica que le hizo Frege. A continuación expone la teoría de Mill modificada por factores sociales que él considera que superan la crítica de Frege. Para Bloor, la lógica de Mill aporta la idea fundamental de que las situaciones físicas sirven de modelos para el razonamiento matemático (una idea desarrollada después por la didáctica de las matemáticas). Pero este análisis no da la sensación de ser correcto, hay algo que le falta. Las objeciones de Frege hacen ver cuál es ese ingrediente ausente: la teoría de Mill no hace justicia a la objetividad del conocimiento matemático, no da cuenta de la naturaleza ineluctable de sus deducciones, no explica por qué las conclusiones matemáticas dan esa sensación de no poder ser distintas de las que son. Para Bloor el componente sociológico explica cómo se dota de un aura de autoridad a las matemáticas.

Entre los enfoques que ofrecen una visión social de las matemáticas destaca el "constructivismo social". Ernest (1998) explica la actividad matemática a partir del constructivismo social. Este punto de vista filosófico aplicado a las matemáticas se basa en: 1) La lógica del descubrimiento matemático propuesta por Lakatos basada en la prueba y la refutación. Ernest interpreta que en "Pruebas y Refutaciones" este autor propone una visión de las matemáticas basada en la negociación y la aceptación. 2) Los trabajos de Wittgenstein (1987). Ernest recoge de este autor la certeza y la necesidad de las matemáticas derivan de la aceptación de unas "reglas de juego" que se encuentran en una "forma de vida" socialmente preexistente. 3) La interpretación de la objetividad como intersubjetividad. El conocimiento objetivo se entiende como un conocimiento social, cultural, público y colectivo y no como un conocimiento personal, privado o construcción individual ni tampoco como un conocimiento externo, absoluto o trascendente. Dicho de otra manera, no se considera que la intervención constitutiva del sujeto en el acto de conocimiento lleve a verdades necesarias ni que la objetividad dependa de la adecuación isomórfica del conocimiento a un mundo trascendente. 4) La interpretación de las matemáticas como algo básicamente conversacional. El constructivismo social entiende las matemáticas como algo básicamente lingüístico, textual y semiótico, que está inmerso en la interacción humana.

El constructivismo social no pone en cuestión la existencia del mundo de la vida (tanto el físico como el social) ya que presupone su existencia tal como nos lo sugiere el sentido común. No parte de un sujeto que experimenta estas dos esferas de la realidad sino que lo hace de una intersubjetividad histórica previa que ordena y da significado al mundo de la vida del sujeto. En cambio, el constructivismo radical (von Glasersfeld 1995) toma como punto de partida la experiencia del sujeto ya que sus dos principios básicos son: 1) el conocimiento es activamente construido por el sujeto y 2) la función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir una realidad trascendente. El constructivismo radical, si bien propone un punto de vista de tipo constructivista-pragmático que puede llegar a ser compatible con el constructivismo social, corre el peligro de caer en el solipsismo tal como argumentan sus críticos.

Otra de las líneas de investigación que, a nuestro parecer, también se puede englobar en este paradigma pragmático-constructivista son los estudios de tipo antropológico que han puesto de manifiesto el hecho de que las diferentes sociedades han generado diferentes matemáticas. Si al cuestionamiento de la distinción analítico-sintético, argumentada fundamentalmente por Quine, le sumamos que cada cultura genera su matemática, hay que matizar la suposición que considera que las matemáticas dependen de la experiencia de la manera siguiente: las diferentes sociedades han fundado sus respectivas matemáticas sobre la experiencia, pero en una experiencia que resulta de seleccionar ciertos hechos según criterios mudables, una experiencia a la que se dota de significados, conexiones y usos que también son variables.

Para Bishop (1999), existen seis actividades sociales esenciales que constituyen el fundamento para el desarrollo de las matemáticas propias de cada cultura. Estas son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Bishop considera que, si bien todas las culturas han desarrollado necesariamente su propia tecnología simbólica de las matemáticas como respuesta a las demandas del entorno experimentadas a través de estas actividades, como resultado de ciertos desarrollos intraculturales y también de la interacción y el conflicto entre culturas diferentes, han surgido las "Matemáticas", la disciplina internacionalizada que conocemos hoy. Para Bishop, las Matemáticas, además de ser una clase determinada de tecnología simbólica, también es portadora, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados. Estos son: racionalismo, objetivismo, control, progreso, apertura y misterio. Este punto de vista antropológico ha mostrado interés en la investigación de los problemas que tienen las personas que aprenden matemáticas en situaciones de "conflicto cultural", es decir, donde su cultura propia difiere marcadamente de la cultura de la escuela. Por ejemplo, poblaciones indígenas que están en una situación minoritaria o bien inmigrantes recientes en sociedades occidentales europeas.

Los puntos de vista anteriormente comentados, al destacar el papel que la negociación de los significados juega en la construcción personal, han producido una ampliación (o desplazamiento) del punto de vista constructivista hacia consideraciones de tipo social e institucional. Los puntos de vista pragmático-constructivistas parten de una comunidad pre-dada en la que se forma el sujeto. El proceso de incorporación del sujeto a esta comunidad lo hace partícipe de una intersubjetividad. Una caracterización que puede ser aceptada, por su generalidad, por las diferentes variantes pragmático-constructivistas es la siguiente: *el sujeto, que se ha formado como sujeto dentro de una comunidad y que, por tanto, es partícipe de una intersubjetividad, a partir de sus acciones y operaciones sobre el medio físico y social (normalmente realizadas en instituciones), construye un objeto (sistema organizado de objetos) matemático personal, que se puede representar en el mundo material por diferentes sistemas de signos sujetos a unas determinadas reglas (sintácticas, semánticas y pragmáticas) vehiculadas por el lenguaje y consensuadas por la intersubjetividad (objeto institucional).*

Desde esta perspectiva la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un "alumno" a ser un "alumno-en-una-institución". Esta nueva perspectiva obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos. El constructivismo psicológico, y en general todas las investigaciones realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas desde el enfoque cognitivo, se ha centrado en los objetos personales. En el otro extremo tenemos la antropología cognitiva propuesta por Chevallard y sus colaboradores (Chevallard 1992) en la que prima el aspecto institucional y el sujeto se considera un simple "corte institucional", es decir aquello que la institución en la que nos situamos, y desde donde miramos a la persona en cuestión, nos permite percibir en un momento dado. Entre estos dos extremos hay diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica personal-institucional sin olvidar ninguno de los dos polos. Entre estas teorías destaca la teoría de los objetos personales e institucionales (Godino y Batanero 1994) la cual postula unas entidades mentales que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen en el curso de una interacción en el marco de una institución.

La crítica que se hace a los puntos de vista pragmático-constructivistas es que caen en un cierto relativismo ya sea éste social o histórico. Ahora bien, el énfasis en lo social les lleva a postular una aproximación a las matemáticas que obliga a superar los puntos de vista apriorísticos sobre las matemáticas.

Bibliografía

BISHOP, A. (1999). *Enculturación matemática.* Barcelona: Paidós.

BLOOR, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social.* Barcelona: Gedisa

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12, 1, 73-112.

DAVIS, P.; HERSH, R. (1988). *Experiencia Matemática.* Barcelona: Labor-MEC

DÖRFLER, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics, en

Bishop A.J. Mellin-Olsen S., Van Dormolen, J. (eds.): *Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

DOU, A. (1970). *Fundamentos de matemáticas.* Barcelona: Labor

DUBINSKY, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8, 3, 25-41

ENGLISH, L.D. (ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

ERNEST, P. (1998). Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, en C. Alsina et al. (eds.): *ICME 8. Selected Lectures* (pp.153-171). Sevilla: SAEM THALES.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht: Kluwer

FONT, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14. (En línea. Documento disponible en: http://www.ex.ac.uk/%7ePErnest/pome14/-contents.htm)

FONT, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7 (2), 127-170.

FONT, V.; ACEVEDO, J. (2003). Fenómenos relacionados con el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21-3, (en prensa)

FONT, V.; PERAIRE, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, 13, 2, 55-67.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of matehematical structures.* Dordrecht: Reidel.

GODINO, J D.; BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.

GUZMÁN, M. de (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor

HEIDEGGER, M. (1975). *La pregunta por la cosa.* Buenos Aires: Alfa

IBARRA, A.; MORMANN, T. (1997) *Representaciones en la ciencia. De la invariancia estructural a la significatividad pragmática.* Barcelona: Ed. del bronce.

KITCHER, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford: Oxford University Press.

KUHN, T. (1981). *La estructura de las revoluciones científicas.* Madrid: Fondo de Cultura Económica.

LAKATOS, I. (1978) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Editorial.

LAKATOS, I. (1981) *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Editorial.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the*

embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.
MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. (1988). *Pensar matemáticamente.* Madrid: M.E.C- Labor.
MOSTERÍN, J. (1980). *Teoría axiomática de conjuntos.* Barcelona: Ariel
NÚÑEZ, J.M.; FONT, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las Matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de Educación*, 306, 293-314.
NÚÑEZ, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. En T. Nakaora y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.
PIAGET, J. (1979). Los problemas principales de la epistemología de la matemática, en J. Piaget (comp.), *Epistemología de la matemática* (pp. 147-182). Buenos Aires: Paidós.
PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Madrid: MEC/Morata.
POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?.* México: Trillas.
QUINE, W.V.O. (2002). *La relatividad ontológica y otros ensayos.* Madrid: Tecnos.
QUINE, W.V.O. (1984). *Desde un punto de vista lógico.* Barcelona: Orbis.
REICHENBACH, H. (1951). *The Rise of Scientific Philosophy.* Berkeley, University of California Press.
RESTIVO, S. (1992). *Mathematics in Society and History.* Dordrecht: Kluwer
SCHOENFELD, A.(1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, New York
SPENGLER, O. (1958). *La decadencia de Occidente.* Madrid: Espasa Calpe.
TALL, D. (ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer A. P.
von GLASERSFELD, E.: (1995). *Radical Constructivism. A Way of Knowing and Learning.* London: The Falmer Press.
WITTGENSTEIN, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

VICENÇ FONT
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CCEE Y LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA
ESPAÑA

INFORMACIÓN NACIONAL

Programa de Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media - USB

Enrique Planchart

1 Justificación

La Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media es un programa de postgrado de la Universidad Simón Bolívar (Venezuela) que cuenta con la cooperación de la Asociación *Education for an Interdependent World (EDIW)*, cuya sede está ubicada en Bruselas (Bélgica). Se dirige a profesores de Educación Media Diversificada y Profesional.

Actualmente en la enseñanza de las Matemáticas en Venezuela uno de los principales problemas es la deficiencia en la aplicación efectiva de la didáctica que permita garantizar el éxito de los procesos de enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas, particularmente en los niveles antes señalados. Esto es aún más evidente en el tema de la geometría que sistemáticamente es omitida a pesar de estar en los contenidos de los programas de los niveles educativos precedentes al superior. Además, en los últimos años en el campo de la Educación Matemática se han producido cambios vertiginosos que han obligado a revisar la situación de las Matemáticas y su enseñanza en los distintos niveles educativos.

Ante esta situación parece necesario promover programas que respondan a las nuevas tendencias innovadoras que han ido surgiendo en el campo de la Educación Matemática, como los son, entre otros, el impacto de las nuevas tecnologías, la modelización, las nuevas técnicas de evaluación, la motivación, los cambios metodológicos hacia la adquisición de los procesos típicos del pensamiento matemático, la heurística (resolución de problemas) como herramienta para la enseñanza de la matemática, etc. Y algunas tendencias en los contenidos matemáticos: un desplazamiento hacia la matemática discreta, el impacto de los contenidos de los métodos modernos de cálculo, la recuperación del pensamiento geométrico y de la intuición espacial, el auge del pensamiento aleatorio, de la probabilidad y estadística.

También se ha constatado el déficit que en nuestro país existe de especialistas en Educación Matemática capacitados para impartir programas de estas características. Para ello se ha considerado importante reforzar el proyecto con la colaboración de expertos a nivel internacional que puedan favorecer el desarrollo de estos enfoques y contenidos.

Por tanto, el programa pretende ampliar y actualizar los marcos de referencia de los docentes venezolanos, mediante el análisis de su actividad en el aula y el conocimiento de las corrientes en didáctica de la matemática y su aplicación.

2 Objetivos

- Desarrollar una propuesta educativa desde una perspectiva de responsabilidad social que oriente enfoques didácticos del área de Matemática y toda la actividad profesional del profesorado de esta disciplina, en la enseñanza media.
- Estimular el análisis y la aplicación de corrientes didácticas actuales en el área de la Matemática y su incidencia en la práctica educativa.
- Actualizar al profesorado en conocimientos matemáticos, entre otros, Geometría, Análisis, Álgebra, Probabilidad, Estadística.
- Promover el análisis del trabajo de aula del profesorado con realización de experiencias educativas y de innovación didáctica en el nivel medio.

3 Perfil del Egresado

Al finalizar esta Especialización el profesor egresado será capaz de:

- Llevar a cabo una propuesta educativa en el área de Matemáticas en su Institución Educativa de origen desde los enfoques didácticos tratados.
- Demostrar conocimientos y analizar las corrientes didácticas actuales en el área de matemáticas y su incidencia en la práctica educativa.
- Demostrar conocimientos matemáticos actualizados en áreas de Geometría, Análisis, Álgebra, Probabilidad y Estadística, entre otras.
- Comprometerse a una permanente actualización de su actividad profesional en colaboración con otros colegas y otras instancias educativas y profesionales.
- Promover con sus estudiantes experiencias educativas y de innovación didáctica.

4 Plan de Estudio

El programa se desarrolla mediante asignaturas articuladas desde tres componentes básicos:
Componente I: Elementos clave para una propuesta educativa en Enseñanza Media.
Componente II: Estrategias de acción del docente.
Componente III: Investigación y formación del docente.

Implicarán 32 créditos en asignaturas obligatorias y 4 créditos correspondientes al Trabajo Especial de Grado. Modalidad presencial, consultas y asesorías a distancia, videoconferencias.

Componente I

Asignaturas	**Profesores**	**U. C.**
Cambio Social y Práctica Educativa. Educación Matemática y Sistemas Educativos	Panel–Mesa Redonda: Darío Durán, LUZ Rafael Sánchez, UCV Enrique Planchart, USB	Sin créditos
Pensamientos en torno al quehacer matemático	Miguel de Guzmán, Univ. Complutense, Madrid	1
Epistemología de la Matemática	Sabrina Garbin, USB Camino Cañón, U. Comillas, Madrid	2

Componente II

Asignaturas	**Profesores**	**U. C.**
El Curriculum en Matemáticas Modelos de aprendizaje, diseño general y diversificación	Inés Gómez Chacón, EDIW-Bélgica	2
Comprender, pensar y trabajar en matemáticas	Inés Gómez Chacón, EDIW-Bélgica	2
Resolución de problemas	María Luz Callejo, Inst. Somosagua, Madrid	2
La evaluación en Matemáticas	Freddy F. Rojas, USB Joaquín Giménez, U. Barcelona	2
Matemáticas e Internet	Fernando Vizcaya Jarrillo, USB Lourdes Figueiras, Univ.Autónoma de Barcelona	2

Asignaturas de actualización científica	**Profesores**	**U. C.**
Actualización Científica, Geometría I y Didáctica de la Geometría I	Enrique Planchart, USB Lurdes Figueral, Esc. E. A. Porto, Portugal	3
Actualización científica, Geometría II y Didáctica de la Geometría I	Enrique Planchart, USB Lurdes Figueral, Esc. E. A. Porto, Portugal	3
Actualización científica, Análisis y Algebra I, Didáctica del Análisis y Algebra I	Eduardo Lima, USB Sabrina Garbin, USB	3
Actualización científica, Análisis y Algebra II, Didáctica del Análisis y Algebra II	Eduardo Lima, USB Sabrina Garbin, USB	3
Actualización científica, Probabilidad e Inferencia Estadística, Didáctica de la Probabilidad y la Inferencia Estadística	Alejandra Cabaña, USB Juan Antonio García Cruz, Univ. de La Laguna, Islas Canarias	3

Componente III

Asignaturas	**Profesores**	**U. C.**
La formación de docentes y la investigación educativa La investigación e innovación en Didáctica de las Matemáticas (Asignatura con estrecha vinculación con el Trabajo Especial de Grado)	Inés Gómez Chacón, EDIW-Bélgica Luisa Higueras Univ. de Jaén	4

Trabajo Especial de Grado: 4 Créditos
Total de Unidades-Crédito = 36

El Trabajo Especial de Grado consistirá en:

- Reflejar el resultado de una actividad de adiestramiento o de investigación. Presentar un informe de tal actividad.
- Demostrar el manejo instrumental de los conocimientos obtenidos en su área respectiva.

Evaluación final y entrega de grados: Diciembre del 2005

Jornadas Finales (2 días en Diciembre, serán unas jornadas públicas abiertas a todos los docentes del país del área de matemáticas. Las comunicaciones que se presentarán serán los Trabajos Especiales de Grado de los participantes en el programa).

5 Asesorias y Tutorias por Internet

Las asignaturas dictadas por especialistas españoles dentro del convenio con EDIW contarán con asesorías y tutorías que se complementarán vía Internet con los profesores. Algunas actividades se realizarán a distancia usando medios como Internet, video conferencias, y otros apoyos técnicos disponibles.

El costo fijado por la Universidad para los cursos de Postgrado es de dos unidades tributarias por crédito académico. Se espera contar con ayudas, créditos educativos o becas para los profesores provenientes del sector oficial.

Departamento de Matemáticas
Universidad Simón Bolívar,
Venezuela
eplan@usb.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

Programa Igualdad de Oportunidades - USB

Enrique Planchart

El Programa Igualdad de Oportunidades es un esfuerzo institucional de carácter experimental de la Universidad Simón Bolívar, para mejorar las oportunidades de ingreso a la USB de alumnos del último año de la Educación Media Diversificada del sector oficial, que tengan dentro de sus aspiraciones vocacionales estudiar carreras que ofrece en las áreas de Ingeniería, Arquitectura, Ciencias, Tecnología y Administración.

Misión

El propósito fundamental de este proyecto es facilitar, experiencias claves en el reaprendizaje del conocimiento básico en las áreas de matemática, física, química y lengua, así como también la promoción del desarrollo de habilidades y destrezas intelectuales y afectivas que les permitirán enfrentar con éxito las exigencias académicas propias del proceso de admisión a las carreras que ofrece la Universidad Simón Bolívar.

A corto plazo el Programa trata de mejorar la oportunidad de quienes, por su situación socioeconómica están en desigualdad de condiciones, al no poder participar en cursos de preparación preuniversitaria complementarios para presentar exámenes de admisión.

A mediano plazo se pretende contribuir con la formación de los profesores, principalmente de las instituciones de Educación Media del sector oficial, a través de Programas de Mejoramiento Profesional en las áreas de Matemática, Lengua, Física y Química. Asimismo, reactivar las Licenciaturas Docentes en Matemática y Física en la USB.

Justificación

Probablemente uno de los principales problemas que confronta la sociedad venezolana es el deterioro progresivo de la calidad de la educación. Esto se evidencia a través del Promedio de Notas que muestra la población estudiantil que se postula a través del Proceso Nacional de Admisión a la Educación Superior que es menor cada año, según los informes de la OPSU. Las diferentes vías de ingreso que utilizan las Instituciones de Educación Superior, entre ellas la Universidad Simón Bolívar, dejan fuera del sistema educativo a la mayoría de los aspirantes provenientes de la Educación Media pública, quienes no han logrado las competencias y destrezas indispensables para realizar con éxito estudios universitarios.

De acuerdo al informe Exámen de Admisión 2.000 (USB), del grupo total que presentaron la Prueba de Admisión de ese año (6.885 aspirantes), sólo el 17,99% perteneció al sector público y de los estudiantes admitidos, sólo el 6,90% pertenece al sector público.

Sin embargo, más allá de los indicadores que puedan aportar las estadísticas lo que constituye motivo de alarma son las debilidades que muestran los estudiantes en las tareas de carácter académico. Estas debilidades se observan en el razonamiento numérico y verbal, en la resolución de problemas y en la práctica de hábitos eficientes para la adquisición autónoma, activa y crítica del conocimiento formal. Esta es la causa de los pobres resultados que muestran los estudiantes en la medición de las habilidades básicas (matemática y verbal) que es lo que miden todas las pruebas de admisión.

La Universidad Simón Bolívar se planteó la necesidad de desarrollar un programa de intervención educativa, de carácter experimental, que de manera remedial proporcione a los alumnos del último año de la Educación Media pública, un curso propedeútico preparatorio para el exámen de admisión con el fin de contribuir con la nivelación y consolidación de conocimientos en las áreas que componen la prueba de admisión. Por otra parte, atendiendo a causas más de fondo, contribuir con la actualización y perfeccionamiento de los docentes en ejercicio en matemáticas y lengua a través del Curso de Especialización en Didáctica de las Matemáticas en Educación Media, que comienza en Enero 2004, y el Curso de Especialización en la Enseñanza del Castellano Como Lengua Materna, que comenzará en septiembre 2004

Para lograr una educación de calidad se debe contar con docentes competentes que tengan una adecuada preparación y puedan integrar los conocimientos teóricos y los basados en la experiencia profesional. Con este objetivo la Coordinación de Matemáticas reabrió desde setiembre de 2002 la Licenciatura Docente en Matemática , con un perfil de egresado que lo capacita para generar cambios en las estructuras educativas.

Igualmente este programa se propone hacer un seguimiento a los planteamientos expuestos y la metodología usada con el fin de determinar, a través de la investigación, si estos mecanismos constituyen alternativas viables, que puedan ser utilizadas como marco de referencia para implementación de políticas educativas acorde con las necesidades elementales del país.

Selección de Estudiantes

En la primera fase, iniciada en Mayo del 2.000, el Programa Igualdad de Oportunidades (PIO) se dirigió a estudiantes del segundo año del Ciclo Diversificado y/o Profesional de la Educación Media Pública del Área del Distrito Capital.

En esa ocasión gozaron de prioridad los alumnos pertenecientes a las instituciones cercanas a la universidad, el resto de la población estudiantil inscrita fue tomada de instituciones escogidas al azar. Para ese momento no privó ningún criterio de selección de los alumnos, sin embargo, la experiencia recogida hasta la fecha así como la evaluación realizada al programa arrojó la necesidad de establecer criterios de selección tendientes a un óptimo aprovechamiento de las experiencias que propone el Programa Igualdad de Oportunidades (PIO).

La selección de la última cohorte de estudiantes, los que iniciaron el programa en septiembre 2003, se realizó en base a los siguientes criterios:

- Promedio de notas mayor o igual a 13 puntos, el cual se calculó considerando las notas de 7^o a 9^o grado de Educación Básica, los dos primeros lapsos del 1er. año de la Educación Media Diversificada. En el caso de las Escuelas Técnicas que se están incorporando y su especialización tiene una duración de tres años se consideró las notas del 1er. año más los dos primeros lapsos del 2do. Año.
- Aplicación de Pruebas: Matemática, Habilidad Verbal, Diagrama de Relaciones. Juego de Letras y Test de Inteligencia - Raven).
- Una vez aplicados y corregidos los instrumentos se aplicó el siguiente criterio de selección: Los alumnos que obtuvieron 4 puntos o más en matemáticas, de los doce puntos de la prueba fueron admitidos y los alumnos que obtuvieron 3 puntos en matemática y más de 18,6 en el promedio ponderado de las pruebas de Juego de Letra, Diagrama de Relaciones y Test de Inteligencia Raven, también fueron admitidos.

Conviene señalar que la prueba de Matemáticas consistió de 12 preguntas extraídas de los programas de educación básica de 6^o, 7^o y 8^o grados, excepto dos preguntas de trigonometría. La nota media de los 1778 alumnos examinados fue de 2,26 puntos . Los alumnos deben haber cursado las materias básicas: matemática, lengua, física, y química de la tercera etapa de la Educación Básica (séptimo a noveno grado) y del primer año del Ciclo Diversificado. Esto quiere decir que los alumnos que se les haya exonerado alguna de estas materias, lo que constituye una práctica cada vez mas frecuente en el sector oficial de la educación, no podrán participar en el programa.

1 Administración del Programa

El Programa se ejecuta dentro de las instalaciones de la Universidad. Se dan las materias de: matemática, física, química y lengua y, del mismo modo, semanalmente se desarrollan actividades en el ámbito psico – afectivo que contribuyen a consolidar los procesos de adquisición de conocimiento y las actitudes generales frente a la vida universitaria. Para estos fines se han previsto 8 horas semanales distribuidas de la siguiente manera: 4 horas en días de semana, en horario comprendido de 3,00 a 7,00 p.m.. y cuatro horas los días sábado en horario comprendido de 8,00 a.m. a 12,00 m. por un período de dos trimestres (septiembre – diciembre y enero – abril). Las actividades de aula están dirigidas a estimular y consolidar procesos autónomos de búsqueda y evaluación del conocimiento, que el estudiante pondrá en marcha con el apoyo y asesoría permanente del docente. Se busca con ello que el estudiante desarrolle una actitud participativa y comprometida con su desarrollo académico, apoyado en un material instruccional que incluye: un texto de cada materia, escrito específicamente para la finalidad del curso, ejercicios de demostración, consolidación y autoevaluación. Este material es entregado a cada alumno cuando inicia las actividades académicas del programa.

En relación con el número de horas docentes la asignación por materia es la siguiente:
Matemática: 68 horas, 34 teóricas (docentes) y 34 prácticas (preparadores del Grupo Escalera).
Habilidad Verbal: 34 horas (2 horas semanales por 17 semanas).
Desarrollo Psicoafectivo: 36 horas (2 horas semanales por 18 semanas).
Física: 32 horas (4 horas semanales por 8 semanas).
Química: 32 horas (4 horas semanales por 8 semanas).

Apoyo a los Estudiantes Admitidos

Para asegurar la permanencia de los estudiantes del Programa Igualdad de Oportunidades que queden seleccionados por la Prueba de Admisión de la Universidad Simón Bolívar, se les debe brindar apoyo en las siguientes áreas:
ACADEMICAS:

a) Curso intensivo de seis semanas de duración en las áreas de Matemáticas, Lengua, Inglés y Computación, durante los meses de junio y julio con el fin de proseguir con la consolidación y adquisición de conocimientos básicos que puedan garantizar una prosecución de estudios exitosa.

b) Una vez que estén inscritos en la Universidad, se les garantiza su incorporación al Programa de Tutores Especiales para consulta académica (a todo aquel que lo solicite).

PSICOAFECTIVO:
La Dirección de Desarrollo Estudiantil de la Universidad brinda apoyo Psicoafectivo a través de profesionales en las áreas de Orientación y Psicología, con el fin de contribuir con el desarrollo personal de los participantes que lo soliciten.
SOCIOECONOMICO:
La Dirección de Desarrollo Estudiantil realiza el estudio socioeconómico de los

estudiantes que pertenecieron al Programa Igualdad de Oportunidades y realizaron inscripción en la Universidad, con el objetivo de ubicarlos en el plan de becas. Este plan se rige por las normas establecidas por la institución para el otorgamiento y disfrute de este beneficio.

También se ha logrado, por donación del Banco Mercantil, establecer un programa limitado de becas solo para estudiantes que ingresan a través del programa.

Resultados

Las siguientes tablas muestran los resultados de las dos primeras cohortes:

Sartenejas

Año 2001	**Año 2002**
Examinados : 647	Examinados : 340
Admitidos : 15	Admitidos : 35

Litoral

Año 2001	**Año 2002**
Examinados : 346	Examinados : 163
Admitidos : 106	Admitidos : 95

Año 2003

Los resultados de la última cohorte, comparados con los demás liceos oficiales y, en igualdad de condiciones, con aquellos estudiantes de liceos oficiales que presentaron el examen y tenían promedio igual o mayor a 13:

Sartenejas

N^o de alumnos que Presentó	**N^o de Admitidos**	%
507	49	9,66

Litoral

N^o de alumnos que Presentó	**N^o de Admitidos**	%
291	104	35.74

Comparación de admitidos PIO Sartenejas con Instituciones de Educación Media del Sector Oficial:

N^o de alumnos que Presentó	**N^o de Admitidos**	%
3750	139	3.7

El Número total de alumnos del sector oficial que presentaron en Sartenejas la prueba de admisión fue de 3750 de estos 139 quedaron admitidos lo que representa el 3,7 %. Los que hicieron el PIO y presentaron la prueba fueron 507, de estos ingresó el 9,66%. Si se hace la comparación con los estudiantes del sector oficial que no participaron en el PIO en el examen de Sartenejas, tenemos esta tabla:

N^o de alumnos que Presentó	**N^o de Admitidos**	%
3313	96	2.9

Finalmente, el número de estudiantes de instituciones de Educación Media oficiales no pertenecientes al PIO con promedios de nota mayor o igual a trece puntos fue de 2283 de estos el número de admitidos fue de 101 lo que representa el 4,41%. El número de estudiantes PIO con promedio de notas mayor o igual a trece puntos que presentaron la prueba de admisión fue de 372 de éstos el número de admitidos fue de 31 lo que representa el 8,33%.

Conclusion

Aunque los resultados son alentadores y demuestran una mejoría grande en las cifras porcentuales, todavía se está lejos de una solución, que necesariamente pasa por una mejora substancial de la enseñanza de las matemáticas en los liceos oficiales. Ese es el objetivo final.

Departamento de Matemáticas
Universidad Simón Bolívar,
Venezuela
eplan@usb.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

XVII JORNADAS VENEZOLANAS DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES. NUCLEO UNIVERSITARIO "RAFAEL RANGEL"
Trujillo, 31 marzo al 02 abril 2004

Comité Organizador:
Teodoro Lara, ULA (teodorolara@cantv.net)
Arístides Arellán, ULA (aristide@ula.ve)
Hanzel Lárez, ULA (larez@ula.ve)
Fernando Mejías, ULA (lfmejias@cantv.net)
Roy Quintero, ULA (rquinter@cantv.net)
Fernando Sánchez, LUZ (fsanchez@luz.ve)

Comité de Programa:
Argimiro Arratia, USB (arratia@ma.usb.ve)
Diómedes Barcenas, ULA (barcenas@ciens.ula.ve)
Wilmer Colmenáres, UCLA (wilmerc@uicm.ucla.edu.ve)
Teodoro Lara, ULA (teodorolara@cantv.net)
Ramón Bruzual, UCV (rbruzual@euler.ciens.ucv.ve)
Ennis Rosas, UDO (erosas@sucre.udo.edu.ve)
Fernando Sánchez, LUZ (fsanchez@luz.ve)

Selección de trabajos

Como ya es tradición, la presentación de trabajos se hará por sesiones. Las sesiones tentativas son
Análisis – Álgebra y Teoría de Números – Ecuaciones Diferenciales – Educación Matemática – Geometría Diferencial y Física Matemática – Lógica, Combinatoria e Informática Teórica – Probabilidad y Estadística.

Como hemos dicho éstas no son sesiones definitivas; se pueden proponer otras o modificar las mencionadas acá.

Fechas tope

- Proposiciones de sesiones: 30 de noviembre del 2003.
- Anuncio de las sesiones aprobadas por el Comité de Programa (y envío del segundo aviso): 15 de diciembre del 2003.
- Recepcion de resúmenes: 15 de enero del 2004.
- Respuestas para la aceptación de trabajos: 31 de enero del 2004.

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda

En esta oportunidad reseñamos la actividad de Olimpiadas Matemáticas en la segunda parte del año 2003. Participamos en varios eventos internacionales, la 44^a IMO en Tokio, en Julio pasado, la V OMCC en Costa Rica en Agosto y la XVIII OIM en Mar del Plata, así como la VI OIMU, la cual se organiza por correspondencia desde Brasil.

En total nuestros muchachos ganaron cinco premios entre medallas y menciones honoríficas y aún estamos a la espera de los resultados de la OIMU. Los premios fueron los siguientes:

Leonardo Urbina. Medalla de Plata. V OMCC

Tamara Mendt. Medalla de Bronce. V OMCC

Carlos Molina. Medalla de Bronce. V OMCC.

Rodrigo Ipince. Medalla de Bronce. XVIII OIM

José Javier Sanahuja. Mención Honorífica. XVIII OIM.

Queremos llamar la atención sobre la OMCC. La Olimpiada se realizó en Costa Rica pero compartiendo responsabilidades con Venezuela, pues nosotros estuvimos a cargo de la organización académica del evento. Además un grupo de siete profesores venezolanos participó activamente durante la realización de la Olimpiada. El éxito alcanzado fue reconocido por los países asistentes y se acordó utilizar este esquema de organización cuando el país sede lo requiera y ya estamos trabajando con Nicaragua y la Organización de Estados Iberoamericanos, para repetir este modelo de organización en la VI OMCC, en el año 2004.

Otro aspecto importante de destacar es el relativo a la organización de una Olimpiada Matemática Nacional en el año 2004. Los días 24 y 25 de Octubre de 2003 tuvimos una reunión muy productiva en Caracas, a la cual asistieron colegas de las siguientes universidades: ULA, LUZ, UNEXPO, UCLA, UPEL, UCAB, UNIMET, UDO, USB, UC y UCV. En la misma fijamos las bases de nuestro programa de entrenamiento nacional y la Olimpiada Nacional de Matemáticas, la cual se organizará en dos niveles, de 3^o a 7^o grados será la Olimpiada Recreativa de Matemáticas y de 8^o a 2^o de Diversificado, la Olimpiada Juvenil de Matemáticas. Ambos eventos tendrán al Canguro Matemático como certamen inicial y esperamos cubrir una población de 25.000 jóvenes en unas 12 ciudades del país.

Como resultado de esta reunión disponemos ahora de una nueva página web, con un acceso más rápido, la nueva dirección es:

http://ares.unimet.edu.ve/matematica/acm

Los invitamos a visitarnos y compartir con nosotros sus opiniones. Un aspecto importante de la página es la posibilidad de consultar un gran banco de problemas de olimpiadas matemáticas.

Terminamos nuestra sección con los problemas de la 44^a IMO.

44^a IMO

Version: Spanish.

PRIMER DIA
Tokio, 13 de julio de 2003.

Problema 1. Sea A un subconjunto del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ con 101 elementos exactamente. Demostrar que existen números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ en S tales que los conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

son disjuntos dos a dos.

Problema 2. Determinar todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

Problema 3. Consideremos un hexágono convexo tal que para cualesquiera dos lados opuestos se verifica la siguiente propiedad: la distancia entre sus puntos medios es igual a $\sqrt{3}/2$ multiplicado por la suma de sus longitudes. Demostrar que todos los ángulos del hexágono son iguales.

(Un hexágono convexo $ABCDEF$ tiene tres parejas de lados opuestos: AB y DE, BC y EF, CD y FA.)

Tiempo: 4 horas y media.
Cada problema vale 7 puntos.

Version: Spanish.

SEGUNDO DIA
Tokio, 14 de julio de 2003.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cuyos vértices están sobre una circunferencia. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares trazadas desde D a las rectas BC, CA y AB respectivamente. Demostrar que $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se cortan sobre la recta AC.

Problema 5. Sea n un entero positivo, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que
$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 .$$

(b) Demostrar que se cumple la igualdad si y sólo si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman una progresión aritmética.

Problema 6. Sea p un número primo. Demostrar que existe un número primo q tal que, para todo entero n, el número $n^p - p$ no es divisible por q.

Tiempo: 4 horas y media.
Cada problema vale 7 puntos.

Escuela de Matemáticas
Universidad Central de Venezuela,
Venezuela
rsanchez@euler.ciens.ucv.ve