Dinámica de operadores de composición en espacios de Hilbert funcionales analíticos *

Gerardo R. Chacón, José Giménez & Edixon Rojas

Resumen

En este artículo, cuyo carácter es divulgativo, estudiamos algunas propiedades dinámicas de operadores de composición, con símbolo fraccional lineal, que actúan en espacios de Hilbert Funcionales Analíticos. Asimismo, estudiamos la dinámica de semigrupos de operadores de composición en dichos espacios.

1. Introducción

Dado un espacio vectorial topológico X, una función $T : X \longrightarrow X$ y un vector $x \in X$, nos avocaremos al estudio de las propiedades espaciales del conjunto *Órbita de x bajo T*, definido como $\mathrm{Orb}(x,T) := \{x, T(x), T^2(x), T^3(x), \dots\}$, donde T^n denota la composición de T con sí misma n veces. Es decir, estudiaremos el comportamiento *dinámico* de la función T.

Existen esencialmente dos nociones asociadas al hecho de que el conjunto $\mathrm{Orb}(x,T)$ sea "grande" en X, estas son: *ciclicidad* e *hiperciclicidad*. Una función T se dice cíclica si existe un vector $x \in X$ tal que el espacio generado linealmente por los elementos de $\mathrm{Orb}(x,T)$ es denso en X; en este caso, el vector x es llamado un *vector cíclico para T*. Asimismo, diremos que un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ es hipercíclico si existe un vector $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(x,T)$ es denso en X. Aquí a un tal vector x se le denomina *vector hipercíclico para T*. Es claro que todo operador hipercíclico también es cíclico.

Dado un espacio vectorial $\mathcal{H}$ cuyos vectores son funciones definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, a valores complejos, y una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega$, definimos el operador lineal

$$C_\varphi(f) := f \circ \varphi.$$

Este operador es conocido como el *Operador de Composición con símbolo φ*.

*Investigación parcialmente financiada por el CDCHT-ULA proyecto H-806-04-05-C

Circunscribiremos nuestro interés al estudio de operadores de composición actuando en Espacios de Hilbert de funciones definidas en el disco unitario complejo y con símbolo una *Transformación Fraccional Lineal*. Uno de los aspectos que hace interesante el estudio de estos operadores lo constituye el hecho de que esta teoría proporciona un puente entre la teoría de operadores y la teoría de funciones. Por otra parte, el estudio de la dinámica de operadores es un problema estrechamente relacionado con el célebre problema de los subespacios invariantes; en efecto, si $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach y $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ un operador lineal, entonces los vectores no cíclicos para T generan subespacios cerrados propios que son T-invariantes; por consiguiente, si todo vector no nulo es cíclico para T, entonces no existen subespacios cerrados propios que sean T-invariantes.

Adicionalmente, estudiaremos la dinámica de semigrupos de operadores de composición; en particular, la noción introducida por Frankfurt [6] y estudiada posteriormente por Giménez en [8]. Mostraremos en cuales espacios la noción de cuasiciclicidad (Frankfurt) y la noción de ciclicidad coinciden. Finalmente, planteamos algunas interrogantes relacionadas con estos temas que, a nuestro entender, constituyen problemas abiertos. Este artículo, cuyo carácter es divulgativo, contiene también algunos resultados originales de los autores.

En dimensión finita resulta sencillo encontrar un operador lineal cíclico; por ejemplo, dado un espacio vectorial de dimensión n y una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ del mismo, basta definir a T como sigue: $Te_1 := e_2$, $Te_2 := e_3$, $\cdots$ $Te_{n-1} := e_n$. Obsérvese que independientemente de cómo se defina Te_n, el hecho de que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathrm{Orb}(e_1, T)$ implica que T es un operador cíclico. Esto nos permite afirmar que en espacios de dimensión finita, existen abundantes operadores cíclicos. Sin embargo, en estos espacios ningún operador lineal puede ser hipercíclico (ver [18]). De hecho, si el operador adjunto de un operador lineal posee al menos un autovalor, entonces dicho operador no puede ser hipercíclico [18]. Esto nos lleva necesariamente a concluir que la hiperciclicidad de un operador lineal es una propiedad que sólo podría tener lugar en espacios vectoriales de dimensión infinita.

A lo largo de este trabajo, denotaremos por $H(\Omega)$ al espacio de todas las funciones analíticas definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω. El primer ejemplo de un operador lineal hipercíclico se construyó en el espacio $\mathcal{L}(H(\mathbb{C}))$ ([2]). De hecho, existe toda una clase de operadores hipercíclicos actuando sobre este espacio: *Si $a \neq 0$, entonces el operador de traslación $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ definido por $T_a(f)(z) := f(z+a)$ es hipercíclico.* Obsérvese que si denotamos por $\varphi_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a la función definida como $\varphi_a(z) := z+a$, entonces $T_a(f) = f \circ \varphi_a$. Es decir, el operador T_a es un *operador de composición* sobre $H(\mathbb{C})$.

Un ejemplo de un operador lineal hipercíclico actuando sobre un espacio de Hilbert es el siguiente ([15]): Sea l_2 el espacio de las sucesiones complejas cuadrado-sumables con la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \langle \{a_n\}, \{a_n\} \rangle$. El operador de *retroceso unilateral*:

$$B(\{a_1, a_2, a_3, \dots\}) := \{a_2, a_3, \dots\},$$

claramente satisface $\|B(\{a_1, a_2, a_3, \dots\})\|_2 \leq \|\{a_1, a_2, a_3, \dots\}\|_2$, por lo que B es una función no expansiva. Mas aún, si multiplicamos a B por una constante λ de módulo menor que uno obtendremos que, de acuerdo al teorema del punto fijo de Banach ([3]), el conjunto $\mathrm{Orb}(x, \lambda B)$ es una sucesión convergente para cualquier $x \in l_2$ y en consecuencia, el operador λB no es hipercíclico. Sin embargo, como mostraremos mas adelante, si $|\lambda| > 1$ el operador λB es hipercíclico. Este fenómeno no es exclusivo de los múltiplos del operador de retroceso unilateral y de hecho existe una gran cantidad de ejemplos similares.

Notemos lo siguiente: el espacio l_2 puede ser visto como el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$. Si ahora definimos la función $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como $\varphi(n) := n + 1$, vemos que el operador B es el operador de composición $C_\varphi : l_2 \longrightarrow l_2$.

Es fácil ver que $C_\varphi^*(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{0, a_1, a_2, \dots\}$ (el operador de *traslación unilateral a la derecha*). Hacemos notar la siguiente relación: si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de Schauder de l_2 ($e_n(m) := \delta_{nm}$), entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ los funcionales de evaluación $\gamma_n : l_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definidos como $\gamma_n(f) := f(n)$ son lineales y continuos, de hecho

$$\gamma_n(f) = \langle f, e_n \rangle$$

con lo que podemos concluir que las funciones $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ "reproducen" (en el sentido que se precisará en la próxima sección) al espacio l_2.

Por otro lado, observemos también que:

$$C_\varphi^* e_n = e_{n+1} = e_{\varphi(n)}. \tag{1.1}$$

Ecuaciones similares a esta constituyen una herramienta fundamental en el estudio de la dinámica de operadores de composición en espacios de Hilbert funcionales.

Algunos resultados fundamentales concernientes a la teoría dinámica de operadores de composición reseñados en este artículo, los cuales serán acreditados debidamente, pueden ser consultados por el lector en [17, 19]. El aporte de los autores consiste en el tratamiento que se da a la teoría, especialmente la vinculación que se encuentra con la teoría de semigrupos de operadores; en particular, los teoremas 2.4, 5.2, 6.3 y 6.6.

2. Espacios de Hilbert Funcionales Analíticos

En esta sección nos ocuparemos del estudio de la dinámica de operadores de composición que actúan en una clase especial de espacios de Hilbert. Restringiremos nuestra atención mayormente al espacio de Hardy H^2. Otros ejemplos importantes de Espacios de Hilbert Funcionales Analíticos son el espacio de Bergman y el espacio de Dirichlet. El estudio de la ciclicidad en estos últimos, para símbolo fraccional lineal, puede ser hallado en [14].

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert cuyos vectores son funciones analíticas sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. $\mathcal{H}$ se dice un espacio de Hilbert Funcional Analítico (HFA) si para cada $a \in \Omega$, el *funcional de evaluación*

$$f \mapsto f(a), \quad f \in \mathcal{H}$$

es continuo.

Si $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset H(\Omega)$ es un espacio HFA, entonces el Teorema de Representación de Riesz ([4]) implica que para todo $w \in \Omega$ existe un único elemento $K_w \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(w) = \langle f, K_w \rangle.$$

A cada elemento de la familia $\{K_w\}_{w \in \Omega}$ se le conoce con el nombre de *núcleo reproductivo* y aunque dicha familia no es una base ortogonal, es inmediato constatar que la misma genera linealmente al espacio $\mathcal{H}$.

El espacio de *Hardy* $H^2(\mathbb{U})$ definido como:

$$H^2(\mathbb{U}) := \left\{ f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\mathbb{U}) : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de manera natural de l_2.

El conjunto $\{1, z, z^2, \dots\}$ es una base ortonormal de $H^2(\mathbb{U})$. Si $z \in \mathbb{U}$ y $f \in H^2(\mathbb{U})$ entonces, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

estimación de la cual se deduce que los funcionales de evaluación $f \mapsto f(w)$ son continuos para todo $w \in \mathbb{U}$ y por lo tanto que $H^2(\mathbb{U})$ es un espacio HFA. En consecuencia podemos asegurar la presencia de núcleos reproductivos en dicho espacio que pueden ser exhibidos explícitamente (ver [1, 21]); a saber,

$$K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overline{w}^n = \frac{1}{1-\overline{w}z}.$$

Estos son los llamados *núcleos de Cauchy* o *núcleos de Szego*.

Un subespacio notable de $H^2(\mathbb{U})$ es el espacio $H_0^2(\mathbb{U}) := zH^2(\mathbb{U})$, constituido por las funciones $f \in H^2(\mathbb{U})$ tales que $f(0) = 0$. La familia $\{z^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ es una base ortonormal de este espacio, el cual por ser un subespacio de $H^2(\mathbb{U})$, es un espacio HFA y por lo tanto posee núcleos reproductivos que en este caso vienen dados como:

$$K_w^0(z) = \frac{z}{1-\overline{w}z}.$$

Es interesante resaltar el siguiente hecho: como observamos anteriormente, en los espacios de Hilbert funcionales, la familia de núcleos reproductivos genera el espacio, de hecho, en el caso del espacio l_2, los núcleos reproductivos son precisamente los vectores canónicos $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y *todos* son necesarios para generar al espacio; es decir, si omitimos alguno de ellos, el espacio generado por los vectores restantes es un subespacio propio de l_2.

Este fenómeno no es cierto en espacios HFA; en efecto, si $\mathcal{H}$ es un espacio de este tipo con las funciones definidas en un dominio Ω y $\{z_n\}$ es cualquier sucesión convergente en Ω, entonces $\mathrm{CLS}\{K_{z_n}\} = \overline{\mathrm{LS}\{K_{z_n}\}}^{\|\cdot\|}$ (la clausura de la cápsula lineal de $\{K_{z_n}\}$) coincide con $\mathcal{H}$, para demostrar esto basta con observar que como consecuencia del teorema de unicidad para funciones analíticas ([12]),

$$\langle f, K_{z_n}\rangle = 0 \quad \forall n \qquad \Leftrightarrow \qquad f(z_n) = 0 \quad \forall n \qquad \Leftrightarrow \qquad f \equiv 0.$$

Definición 2.2. Si t es un número real, definimos $\log^+(t) = \log(t)$ si $t \geq 1$ y $\log^+(t) = 0$ si $t < 1$. La clase de Nevanlinna $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{U})$ es el conjunto de todas las funciones $f \in H(\mathbb{U})$ tales que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Denotaremos por $H^\infty = H^\infty(\mathbb{U})$ al espacio de todas las funciones $f \in H(\mathbb{U})$ tales que

$$\sup_{z\in\mathbb{U}} |f(z)| < \infty.$$

Es claro que tanto $H^2(\mathbb{U})$ como H^∞ están contenidos en $\mathcal{N}$.

Por ajustarse mejor a nuestros propósitos, presentamos la siguiente versión del teorema de unicidad para funciones pertenecientes a la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$ (ver Teor. 15.23 en [16]).

Proposición 2.3. *Sea $f \in \mathcal{N}$. Si $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{U}$ es una sucesión de ceros tal que $\sum_{n=o}^{\infty} 1 - |\alpha_n| = \infty$, entonces $f \equiv 0$.*

La relación $\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\alpha_n| < \infty$ aludida en la proposición anterior es conocida como *condición de Blaschke.*

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio HFA, tal que $H^{\infty} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}$. Una familia numerable de núcleos reproductivos $\{K_{\alpha_n}\}_{\alpha_n \in \mathbb{U}}$ genera linealmente a $\mathcal{H}$ si, y sólo si, la sucesión $\{\alpha_n\}$ no satisface la condición de Blaschke.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} 1 - |\alpha_n| < \infty$, entonces existe un producto de Blaschke B cuyos ceros son precisamente la sucesión $\{\alpha_n\}$. Luego, $\langle B, K_{\alpha_n} \rangle = 0$, por lo tanto $B \in \{K_{\alpha_n}\}^{\perp}$ y en consecuencia CLS $\{K_{\alpha_n}\} \neq \mathcal{H}$.

La suficiencia es consecuencia inmediata de la proposición anterior. □

Finalizamos esta sección observando un hecho bien conocido: en espacios HFA, el comportamiento dinámico observado en la relación (1.1) posee una versión continua bidimensional: si $C_{\varphi} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, entonces para todo $w \in \Omega$,

$$C_{\varphi}^{*} K_w = K_{\varphi(w)}. \tag{2.1}$$

En efecto, basta observar que para todo $f \in \mathcal{H}$,

$$\langle C_{\varphi}^{*} K_w, f \rangle = \langle K_w, f \circ \varphi \rangle = \overline{(f \circ \varphi)(w)} = \langle K_{\varphi(w)}, f \rangle.$$

3. Transformaciones Fraccionales Lineales

Definición 3.1. Una Transformación Fraccional Lineal (TFL), es un endomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ de la forma $\varphi(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, con $ad - bc \neq 0$.

Como consecuencia del Principio de Subordinación de Littlewood (ver [18, 21]), se tiene que si la aplicación $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ es analítica, entonces el operador de composición C_{φ} definido en $H^2(\mathbb{U})$ es acotado. Luego nos interesaremos únicamente en las TFL que envían el disco unitario en sí mismo; a esta familia la denotaremos por TFL($\mathbb{U}$).

Nótese que si $\varphi \in$ TFL($\mathbb{U}$) entonces, a menos que φ sea la identidad, φ posee a lo sumo dos puntos fijos. El comportamiento dinámico de operadores de composición, con símbolo fraccional lineal actuando en espacios HFA, está estrechamente relacionado con una clasificación universal de este tipo de símbolos basada en la localización de sus puntos fijos en $\overline{\mathbb{U}}$**:**

Hiperbólica: φ es conjugada conforme a una dilatación positiva; posee dos puntos fijos, ambos en $\partial\mathbb{U}$.

Parabólica: φ es conjugada conforme a una traslación; posee un punto fijo en $\partial\mathbb{U}$ de multiplicidad dos.

Elíptica: φ es conjugada conforme a una rotación; posee dos puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$, uno en $\mathbb{U}$ y otro en $\overline{\mathbb{U}}^c$.

Por ejemplo, si φ es una automorfismo elíptico que fija el origen, entonces φ es una rotación de ángulo α para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$: $\varphi(z) = e^{i\alpha z}$, $z \in \mathbb{U}$. En este caso C_φ es un operador unitario y en consecuencia posee una propiedad similar a la del operador de desplazamiento (1.1); esto es,

$$C_\varphi(K_w) = K_{\varphi^{-1}(w)} \quad \text{para todo } w \in \mathbb{U}.$$

Una de las razones que justifica el estudio de la dinámica, así como otras propiedades, de operadores de composición con símbolo fraccional lineal, la constituye el hecho de la existencia de modelos canónicos que permiten, via transformaciones fraccionales lineales, clasificar una amplia gama de funciones analíticas $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ (ver [19]). En espacios de Hardy, tales modelos facilitan considerablemente el estudio de la dinámica de operadores de composición. El lector interesado, puede hallar una excelente exposición sobre este punto en la ya clásica monografía [19].

4. Operadores de Composición Hipercíclicos en $H^2(\mathbb{U})$

A continuación presentamos algunos resultados relacionados con el comportamiento cíclico de operadores de composición; las pruebas de los mismos pueden ser halladas en [18]. En primer lugar, enunciamos el siguiente teorema que limita la clase de símbolos que inducen comportamiento hipercíclico en los operadores de composición.

Teorema 4.1. *Si C_φ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{U})$, entonces φ es univalente y no posee puntos fijos en $\mathbb{U}$.*

De acuerdo a este resultado, si un operador de composición con símbolo φ en TFL($\mathbb{U}$) es hipercíclico en $H^2(\mathbb{U})$, entonces φ es necesariamente parabólica o hiperbólica y sin puntos fijos en $\mathbb{U}$. De hecho, casi todo símbolo de éste tipo induce operadores de composición hipercíclicos en $H^2(\mathbb{U})$ como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Si $\varphi \in$ TFL($\mathbb{U}$) no tiene puntos fijos en $\mathbb{U}$. Entonces:*

1. *C_φ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{U})$ excepto en el caso en el cual φ es un no-automorfismo parabólico*

2. *Si φ es parabólico y no es automorfismo, entonces solamente las funciones constantes pueden ser puntos límites de las órbitas de C_φ.*

Esta proposición justifica la afirmación hecha en la sección 1 referente al cambio súbito de comportamiento dinámico que experimentan los múltiplos del operador de retroceso unilateral.

La herramienta fundamental para obtener el teorema 4.2 la constituye el llamado Teorema de Kitai ([11]), obtenido por Carol Kitai (1982) en su tesis doctoral.

Teorema 4.3 (Kitai). *Sea X un espacio de Banach separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y continuo tal que:*

a) *Existe un subconjunto denso Y de X en el cual la sucesión de iterados $\{T^n\}$ converge puntualmente a cero.*

b) *Existe un subconjunto denso Z de X y una aplicación $S : Z \longrightarrow Z$ tal que:*

   (i) *TS es la identidad en Z.*

   (ii) *La sucesión de iterados $\{S^n\}$ converge puntualmente en Z a cero.*

Entonces T es hipercíclico.

A pesar de que el descubrimiento de este resultado es relativamente reciente, la prueba del mismo se sigue de observar el hecho de que un operador T es hipercíclico en un espacio de Banach separable X si, y sólo si, para cada par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe un número natural n tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Como una aplicación del teorema de Kitai, finalizamos la sección con el siguiente teorema.

Teorema 4.4 (Rolewicz, [15]). *Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$, el operador λB es hipercíclico en l_2, donde B es el operador de retroceso unilateral.*

Demostración. Aplicamos el teorema de Kitai al operador λB.

En primer lugar, el espacio l_2 es un espacio de Banach separable y el operador B es lineal y continuo. Así bastará encontrar a los espacios Y y Z y al operador S.

Obsérvese que el operador $U = B^*$ es una inversa a la derecha del operador B, luego si definimos $S := \lambda^{-1}U$ obtenemos una inversa a la derecha de λB definida en todo el espacio l_2. Puesto que

$$\|S^n x\|_2 = |\lambda^{-n}|\|x\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

para todo $x \in l_2$, basta tomar $Z = l_2$ para estar bajo la segunda hipótesis del teorema de Kitai.

Para verificar el cumplimiento de la primera hipótesis tomemos Y como el espacio de todas las sucesiones eventualmente nulas. Claramente Y es denso en l_2 y $\lambda^n B^n y = 0$ para n suficientemente grande. En consecuencia, λB es hipercíclico. $\square$

5. Operadores de Composición Cíclicos en $H^2(\mathbb{U})$

Pasamos ahora a estudiar el comportamiento cíclico de los operadores de composición en $H^2(\mathbb{U})$ con símbolo φ en TFL($\mathbb{U}$). Puesto que ciclicidad es una propiedad "más débil" que hiperciclicidad, es de esperarse que existan operadores de composición cíclicos en $H^2(\mathbb{U})$ que no sean hipercíclicos. El teorema 4.2 nos dice que si φ no posee puntos fijos en $\mathbb{U}$ y no es un no-automorfismo parabólico, entonces el operador de composición inducido es hipercíclico (y por lo tanto cíclico) en $H^2(\mathbb{U})$; nos queda entonces preguntarnos ¿qué sucede en los dos casos restantes?; es decir si φ posee puntos fijos en $\mathbb{U}$ o si es un no-automorfismo parabólico, ¿el operador de composición inducido será cíclico?. Esta pregunta es estudiada por P. S. Bourdon y J. H. Shapiro en su libro *Cyclic Phenomena for Composition Operators* ([19]); acá presentamos algunos de sus resultados. Queremos hacer notar que la herramienta fundamental usada es la presencia de núcleos reproductivos en el espacio $H^2(\mathbb{U})$, así como las observaciones hechas al final de la sección 2.

Si φ es elíptica, entonces hay dos posibilidades: que sea conjugada de una rotación por un múltiplo irracional de π o que lo sea de una rotación por un múltiplo racional de π; en el segundo caso resulta obvio que la órbita de cualquier elemento $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{U})$ bajo C_ψ donde ψ es de la forma $\psi(z) = \exp(ir\pi)z$ con r racional, consiste en un conjunto finito y por lo tanto $\{C_\varphi^n f : n = 0, 1, 2, \dots\}$ tendrá la misma propiedad. En [19] se demuestra que en el primer caso el operador C_φ es cíclico en $H^2(\mathbb{U})$.

En el caso φ parabólica, de acuerdo al teorema 4.2, se tiene que el operador C_φ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{U})$ a menos que φ sea un no-automorfismo; sin embargo, en [19] también se muestra que C_φ es cíclico en $H^2(\mathbb{U})$.

Los casos restantes son descritos en el siguiente resultado. Recordemos que cada $\varphi \in$ TFL($\mathbb{U}$) no parabólica, distinta de la identidad, posee exactamente dos puntos fijos, y como consecuencia del Lema de Schwarz se tiene que ambos no pueden pertenecer a $\mathbb{U}$, esto nos deja solamente dos casos.

Teorema 5.1. *Sea $\varphi \in$ TFL($\mathbb{U}$) no elíptica ni parabólica y distinta de la identidad con un puntos fijos $z_1 \in \mathbb{U}$ y $z_2 \in \mathbb{U}^c$, entonces:*

(i) *Si $z_2 \in \partial\mathbb{U}$, entonces C_φ no es cíclico.*

(ii) *Si $z_2 \in \overline{\mathbb{U}}^c$, entonces C_φ es cíclico.*

En la siguiente tabla resumimos los resultados sobre ciclicidad e hiperciclicidad en $H^2(\mathbb{U})$ de los operadores de la forma C_φ con $\varphi \in \mathrm{TFL}(\mathbb{U})$.

φ	**Característica**	**Dinámica de $\mathbf{C}_\varphi$**
Elíptica	$\approxeq e^{i\pi\alpha} z,\ \alpha \in \mathbb{I}$	cíclico y no hipercíclico
	$\approxeq e^{i\pi\alpha} z,\ \alpha \in \mathbb{Q}$	no cíclico
No Elíptica Ptos. fijos en $\mathbb{U}^c$	No un no-automorf. parab.	hipercíclico
	no-automorf. parab.	cíclico y no hipercíclico
No Elíptica Un pto. fijo en $\mathbb{U}$	Pto. fijo en $\mathbb{U}^c$	cíclico y no hipercíclico
	Pto. fijo en $\partial\mathbb{U}$	no cíclico

Cuadro 1: Comportamiento dinámico de C_φ en $H^2(\mathbb{U})$ con $\varphi \in \mathrm{TFL}(\mathbb{U})$

Es importante el hecho de que en los espacios HFA se tiene la "propiedad generalizada de traslación" $C_\varphi^*(K_w) = K_{\varphi(w)}$ para el adjunto de cualquier operador de composición definido en dicho espacio y para cualquier núcleo reproductivo del mismo; esto nos permite hacernos preguntas mas generales sobre la ciclicidad de los operadores adjuntos de operadores de composición. El siguiente es un resultado parcial que permite "decidir" cuándo un núcleo reproductivo de $H^2(\mathbb{U})$ es un vector cíclico para el adjunto de un operador de composición.

Teorema 5.2. *Sea $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ analítica y denotemos por φ_n a la n-iterada composición $\varphi \circ \cdots \circ \varphi$.*

1. *Si existe $x \in \mathbb{U}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\varphi_n(x)|) = \infty$, entonces C_φ^* es cíclico en $H^2(\mathbb{U})$ y K_x es un vector cíclico para dicho operador.*

2. *Si en cambio $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\varphi_n(x)|) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{U}$, entonces los núcleos reproductivos de $H^2(\mathbb{U})$ no pueden ser vectores cíclicos para C_φ^*.*

Demostración. Para demostrar la primera parte obsérvese que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\varphi_n(x)|)$ $= \infty$, entonces la sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ no es una sucesión de Blaschke y por lo tanto si $f \in H^2(\mathbb{U})$ es tal que $\langle f, (C_\varphi^*)^n K_x\rangle = 0$ para todo entero positivo n, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (C_\varphi)^n f, K_x \rangle \\ &= \langle f \circ \varphi_n, K_x \rangle \\ &= f(\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

para todo entero positivo n. Esto implica que $f \equiv 0$. Así K_x es un vector cíclico para C_φ^*.

Para demostrar la segunda parte del teorema basta tomar $f \in H^2(\mathbb{U})$ como el producto de Blaschke correspondiente a la sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ y observar que para todo entero positivo n,

$$\langle f, (C_\varphi^*)^n K_x \rangle = f(\varphi_n(x)) = 0$$

pero $f \neq 0$. Esto nos permite concluir que K_x no es un vector cíclico para C_φ de donde se sigue el resultado.

□

Nota 5.3. *En la primera parte del teorema anterior puede sustituirse* $H^2(\mathbb{U})$ *por cualquier espacio HFA; sin embargo, para asegurar en la segunda parte la existencia de un vector ortogonal a la órbita de* K_x*, es necesario que el espacio contenga a todo producto de Blaschke correspondiente a las sucesiones* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *.*

Otro punto importante es el siguiente: dada una combinación lineal finita de núcleos reproductivos, digamos $f := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K_{w_i}$*, bajo las hipótesis de la segunda parte del resultado anterior, obtenemos que* $\{\varphi_n(w_i)\}_{n\in\mathbb{N},1\leq i\leq m}$ *es una sucesión de Blaschke y su correspondiente producto de Blaschke es un elemento ortogonal a la órbita de* f*. Así, las combinaciones lineales de los núcleos reproductivos en* $H^2(\mathbb{U})$ *no pueden ser tampoco vectores cíclicos para* C_φ^**.*

Cabe entonces la siguiente pregunta: bajo las hipótesis de la segunda parte del teorema 5.2, ¿ningún elemento de $H^2(\mathbb{U})$ puede ser cíclico para C_φ^*?

6. Dinámica de Semigrupos de Operadores de Composición

En esta sección revisaremos algunos aspectos relacionados a la dinámica de operadores de composición utilizando la teoría de semigrupos. Comenzaremos recordando la noción de semigrupo de operadores.

Definición 6.1. Sea X un espacio vectorial; una función $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ (el álgebra de los operadores lineales y acotados en X), es llamada un semigrupo de operadores si satisface las siguientes condiciones:

(i) $T(t)T(s) = T(t+s)$, para todo $s, t \in [0, \infty)$.

(ii) $T(0) = I$ (el operador identidad en X).

Denotaremos al operador $T(t)$ como T_t y al semigrupo mediante $(\{T_t\}_{t\geq 0}, X)$. Si queda claro a partir del contexto que $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, entonces nos referiremos al semigrupo simplemente como $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Recuérdese que los iterados un operador de composición C_φ^n son los operadores de composición C_{φ_n} inducidos por los iterados de φ. Si φ posee "iterados fraccionales"; es decir, si podemos definir iterados de la forma φ_t con $t \in [0, \infty)$, esto a su vez induce iterados fraccionales del operador C_φ; esto es,

$$C_\varphi^t(f) := C_{\varphi_t}(f)$$

para cada $t \geq 0$. A continuación estudiaremos un importante semigrupo de operadores de composición inducido por iterados fraccionales.

En [7] J. Giménez encuentra interesantes propiedades de los operadores de composición con símbolo de la forma

$$\phi_a(z) := \frac{z}{az + (a+1)}, \qquad a > 0.$$

es fácil ver que para cada n, $(\phi_a)_n \equiv \phi_{(1+a)^n - 1}$, por lo que parece natural definir $(\phi_a)_t := \phi_{(1+a)^t - 1}$ para $t > 0$ y $(\phi_a)_0$ como la aplicación identidad en $\mathbb{U}$. Veamos que $\{(\phi_a)_t\}_{t\geq 0}$ induce un semigrupo de operadores de composición. En efecto, la propiedad (ii) se tiene directamente de la definición. Veamos que se satisface (i): para esto basta observar que

$$\begin{aligned} ((\phi_a)_t \circ (\phi_a)_s)(z) &= \phi_{(1+a)^t-1}(\phi_{(1+a)^s-1}(z)) \\ &= \phi_{(1+a)^t-1}\left(\frac{z}{[(1+a)^s - 1]z + (1+a)^s}\right) \\ &= \frac{z}{[(1+a)^{t+s} - 1]z + (1+a)^{t+s}} \\ &= (\phi_a)_{t+s}. \end{aligned}$$

Luego estamos en presencia de una familia de iterados fraccionales de ϕ_a que induce un semigrupo de operadores de composición dados por la forma:

$$C_{\phi_a}^t := C_{(\phi_a)_t} = C_{\phi_{(1+a)^t-1}}.$$

Nótese que para cualquier $a > 0$, la aplicación fraccional lineal ϕ_a posee al 0 y al -1 como puntos fijos, luego si tomamos $\tau(z) := \dfrac{z}{z+1}$ entonces $\tau^{-1}(z) = \dfrac{z}{1-z}$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(\tau \circ \phi_a \circ \tau^{-1}(z) &= \tau\left(\phi_a\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)\\
&= \tau\left(\frac{z}{a+1-z}\right)\\
&= \frac{z}{a+1}
\end{aligned}
$$

y como $a > 0$ se tiene que ϕ_a es hiperbólica; así, podemos concluir del teorema 5.1 que el operador C_{ϕ_a} no puede ser cíclico en $H^2(\mathbb{U})$. Sin embargo, ahora contamos con "mas iterados" en los cuales apoyarnos y esto podría traducirse en un "mejor" comportamiento cíclico en algún sentido, esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.2. Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores actuado sobre un espacio de Banach X, diremos que $\mathcal{T}$ es un *semigrupo cíclico* si existe un elemento $x \in X$ tal que $\mathrm{CLS}\{T_t(x) : t > 0\} = X$. Análogamente, diremos que $\mathcal{T}$ es un *semigrupo hipercíclico* si existe $x \in X$ tal que $\overline{\{T_t(x) : t > 0\}} = X$.

Obsérvese que si el operador T_{t_0} es cíclico para algún $t_0 \geq 0$, entonces el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ también lo es. Surge entonces de manera natural la pregunta: *si un semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es cíclico, entonces ¿cada operador T_t también lo es?*. Esto es falso en general y la respuesta, como veremos, la obtenemos a partir del semigrupo de operadores de composición definido anteriormente.

Tanto ϕ_a como cada $(\phi_a)_t$ poseen como puntos fijos al 0 y al -1, por lo tanto el teorema 5.1 nos permite concluir que ningún operador $C^t_{\phi_a}$ puede ser cíclico en $H^2(\mathbb{U})$; de hecho, en la demostración de 5.1 se concluye que la cápsula lineal de cualquier órbita de $C^t_{\phi_a}$ tiene codimensión infinita en $H^2(\mathbb{U})$. Luego los operadores $C^t_{\phi_a}$ tampoco pueden ser cíclicos en H^2_0 (ver sección 2); sin embargo, el semigrupo $\{C^t_{\phi_a}\}_{t\geq 0}$ es cíclico en H^2_0 como mostramos a continuación. Observemos, en primer lugar, que

$$
\phi_a(z) = \frac{z}{az+1+a} = -\frac{1}{a}\frac{\left(-\frac{a}{1+a}\right)z}{1+\left(\frac{a}{1+a}\right)z} = -\frac{1}{a}K^0_{(-\frac{a}{1+a})},
$$

de modo que cada $\phi_a \in H^2_0$.

Fijemos $s \geq 0$. Mostraremos que $(\phi_a)_s$ es un vector cíclico para el semigrupo $\{C^t_{\phi_a}\}_{t\geq 0}$. Supongamos que $g \in H^2_0$ es ortogonal a $\mathrm{LS}\{C^t_{\phi_a}(\phi_a)_s : t \geq 0\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle g, C^t_{\phi_a}(\phi_a)_s\rangle \\
&= \langle g, (\phi_a)_s \circ (\phi_a)_t\rangle \\
&= \langle g, (\phi_a)_{s+t}\rangle \\
&= \langle g, \phi_{(1+a)^{t+s}-1}\rangle \\
&= \langle g, \frac{-1}{(1+a)^{t+s}-1} K^0_{\left(-\frac{(1+a)^{t+s}-1}{(1+a)^{t+s}}\right)}\rangle \\
&= \frac{-1}{(1+a)^{t+s}-1} g\left(\frac{1}{(1+a)^{t+s}}-1\right).
\end{aligned}
$$

Luego g se anula a lo largo de la curva $\left\{\frac{1}{(1+a)^{t+s}}-1 : t \geq 0\right\}$ y por el teorema de unicidad para funciones analíticas se tiene que $g \equiv 0$. Así, cada $(\phi_a)_s$, con $s \geq 0$ es un vector cíclico para el semigrupo $\{C^t_{\phi_a}\}_{t\geq 0}$.

En [6], Frankfurt introduce la noción de *cuasi-ciclicidad* de semigrupos de operadores, mas tarde utilizada por Giménez en [8]; veremos a continuación que que las nociones de semigrupos cuasi-cíclicos y cíclicos realmente coinciden en espacios de Banach. Este hecho, hasta donde sabemos no había sido notado anteriormente.

Sea X es un espacio de Banach. Un semigrupo $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ se dice *cuasi-cíclico* si existe una familia de vectores $\{x_t\}_{t>0} \subset X$ tal que $T_t x_s = x_{t+s}$, para todo $s, t > 0$ y $\mathrm{CLS}\{x_s : s > 0\} = X$.

Teorema 6.3. *Un semigrupo de operadores actuando en un espacio de Banach es cuasi-cíclico si y solamente si es cíclico.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ un semigrupo. Si $\mathcal{T}$ es cíclico entonces existe un vector $x_0 \in X$ tal que $\mathrm{CLS}\{T_t x_0 : t \geq 0\} = X$, basta entonces definir para cada $s > 0$, $x_s := T_s x_0$ y se tiene que $\mathcal{T}$ es cuasi-cíclico.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{T}$ es cuasi-cíclico, entonces existe una familia $\{x_s\}_{s>0}$ con las propiedades descritas anteriormente; para cada entero positivo x, definamos

$$A_n := \mathrm{CLS}\left\{x_s : s > \frac{1}{n}\right\},$$

entonces para cada n, A_n es un subespacio cerrado de X y $A_n \subset A_{n+1}$, luego el teorema de categoría de Baire nos permite asegurar la existencia de un entero positivo n_0 tal que A_{n_0} tiene interior no vacío y puesto que A_{n_0} es un subespacio vectorial de X, concluimos que $A_{n_0} = X$. Así, si tomamos $x_0 := x_{\frac{1}{n_0}}$, entonces $T_s x_0 = T_s x_{\frac{1}{n_0}} = x_{\frac{1}{n_0}+s}$ y por lo tanto

$$\mathrm{CLS}\{T_s x_0 : s > 0\} = \mathrm{CLS}\left\{x_s : s > \frac{1}{n_0}\right\} = A_{n_0} = X.$$

$\square$

Basados en [7, Teorema 3.5], ahora en el marco de espacios HFA, presentamos la siguiente proposición.

Teorema 6.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio HFA y $\Phi := \{\phi_t : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U} : t \geq 0\}$ una familia de iterados fraccionales univalentes tales que ϕ_t no posean puntos fijos en $\mathbb{U}$ si $t \neq 0$. Entonces el adjunto, $\{C^*_{\phi_t}\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, del semigrupo de operadores de composición inducido por Φ es cíclico.*

Demostración. Tomemos cualquier $w \in \mathbb{U}$ y sea $K_w \in \mathcal{H}$ el correspondiente núcleo reproductivo. Las hipótesis sobre Φ garantizan que la aplicación $t \mapsto \phi_t(w)$ define una curva contenida en $\mathbb{U}$; de hecho, esta curva es simple ya que si $t \geq s$ y $\phi_t(w) = \phi_s(w)$, entonces $(\phi_s \circ \phi_{t-s})(w) = \phi_t(w) = \phi_s(w)$, lo que implica (ya que ϕ_s es univalente) que $\phi_{t-s}(w) = w$; pero si $t > s$ entonces ϕ_{t+s} no fija puntos en $\mathbb{U}$, así $t = s$.

Ahora bien, si $g \in \mathcal{H}$ entonces del teorema de unicidad para funciones analíticas se tiene que:

$$\begin{aligned}\langle g, C^*_{\phi_t} K_w\rangle = 0 \quad \forall\, t \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle g, K_{\phi_t(w)}\rangle = 0 \quad \forall\, t \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad g(\phi_t(w)) = 0 \quad \forall\, t \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad g \equiv 0.\end{aligned}$$

□

Nota 6.5. *Si $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ es una sucesión convergente y no eventualmente constante, entonces utilizando de nuevo el teorema de unicidad para funciones analíticas y un razonamiento similar al anterior, concluimos que* $\mathrm{LS}\{C_{\phi_{t_k}} K_w : k > 0\} = \mathcal{H}$ *para cualquier $w \in \mathbb{U}$.*

Este resultado es una especie de generalización del teorema 5.2 en el siguiente sentido. Bajo las condiciones del teorema anterior: $\langle g, C_{\phi_{t_k}} K_w\rangle = 0$ para todo k si, y sólo si, $g \equiv 0$; es decir, $g(\phi_{t_k}(w)) = 0$ para todo k si, y sólo si, $g \equiv 0$. Esto es, todos *los núcleos reproductivos de $H^2(\mathbb{U})$ son "vectores cíclicos" para la familia $\{C_{\phi_{t_k}}\}_{k=1}^{\infty}$.*

En lo que sigue plantearemos algunas preguntas relacionadas con el comportamiento hipercíclico de semigrupos de operadores de composición. Es fácil ver que si X es un espacio de Banach separable, entonces $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo hipercíclico de operadores si para todo par de abiertos U y V en X existe $t > 0$ tal que $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto nos permite establecer un criterio muy similar al que proporciona el teorema 4.3, esta vez para parámetro continuo, en relación a la hiperciclicidad de un semigrupo de operadores de composición. La demostración del mismo, se sigue directamente de la demostración del teorema de Kitai (ver [18]).

Teorema 6.6. *Dado un espacio de Banach separable X y un semigrupo de operadores $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ tales que:*

(i) *Existe un subespacio Y denso en X tal que* $\|T_t y\| \underset{t}{\longrightarrow} 0$ *para todo* $y \in Y$.

(ii) *Existe un subespacio Z denso en X y una familia (no necesariamente un semigrupo)* $\{S_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(Z)$ *tal que para cada* $t \geq 0$ $T_t S_t$ *es la identidad en Z y* $\|S_t z\| \underset{t}{\longrightarrow} 0$ *para todo* $z \in Z$.

Entonces el semigrupo $\mathcal{T}$ es hipercíclico.

Es claro que si un operador $\{T_{t_0}\}$ es hipercíclico, entonces el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ también lo es; el recíproco es un problema abierto propuesto en [20]. En dicho artículo se prueba que todo espacio de Banach complejo, separable e infinito dimensional admite un semigrupo hipercíclico.

Otro problema abierto es el siguiente (ver [18, 13]): *¿ Satisface todo operador hipercíclico el criterio de hiperciclicidad* (Teorema 4.3)*?*. En virtud del Teorema 6.6 planteamos la siguiente pregunta para el caso de semigrupos: *¿Satisface todo semigrupo hipercíclico el criterio de hiperciclicidad?*.

Hacemos notar que si un semigrupo de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$ satisface el criterio de hiperciclicidad dado en el Teorema 6.6, entonces cada operador T_t satisface el criterio de hiperciclicidad (4.3). Por lo tanto una respuesta afirmativa a esta segunda pregunta responde a su vez a la primera. Cabe también preguntarse: *Si cada operador T_t satisface el criterio de hiperciclicidad (4.3) ¿Satisface el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el criterio de hiperciclicidad (6.6)?*.

7. Algunos Comentarios Finales

Definición 7.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una función. Se dice que T *depende sensiblemente de las condiciones iniciales* si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in X$ existe un punto $y \in B(x, \varepsilon)$ tal que $d(T^n x, T^n y) > \delta$ para algún entero no negativo n.

Definición 7.2 (Devaney). Con las hipótesis de la definición anterior, T se dice una aplicación *caótica* si satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo par de abiertos U y V en X existe un entero no negativo n tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$

2. T depende sensiblemente de las condiciones iniciales.

3. Existe un subconjunto denso de puntos con órbita (respecto a T) finita.

En [18] encontramos una demostración del siguiente hecho: *Si X es un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ es una aplicación continua, hipercíclica y tal que existe un subconjunto denso de X de puntos cuya órbita bajo T es finita (puntos periódicos), entonces T es caótica.* Vemos así que la teoría del caos está íntimamente relacionada con la noción de hiperciclicidad. Para mayor información sobre las relaciones del caos con los temas tratados en este artículo, recomendamos [5, 10, 18].

En cuanto a ciclicidad, en el libro de Bourdon y Shapiro ([19]) se resuelve totalmente el problema de identificar a los símbolos analíticos que inducen operadores de composición en el espacio $H^2(\mathbb{U})$ y en [14] se hace lo correspondiente para operadores de composición con símbolo fraccional lineal actuando en espacios tipo Dirichlet.

Finalmente, para un excelente resumen acerca del trabajo hecho en los últimos años sobre hiperciclicidad de operadores lineales, recomendamos [9].

Agradecimiento

Los autores agradecen a los árbitros de la primera versión sus útiles y minuciosas observaciones.

Referencias

[1] N. Aronszajn, *Theory of Reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[2] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théoreme elementaire sur les functions entieres*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473–475.

[3] B. Bollobás, *Linear Analysis: An Introductory Course*, Cambridge University Press, 1990.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1990.

[5] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotical Dynamical Systems*, second ed., Addison-Wesley, 1989.

[6] R. Frankfurt, *Quasicyclic Subnormal Semigroups*, Can. J. Math. **XXIX** (1977), 1230–1246.

[7] J. Giménez, *Joint Hyponormality of Composition Operators with Linear Fractional Symbols*, Integr. equ. oper. theory **43** (2002), 385–396.

[8] ———, *Subnormal Semigroups of Composition Operators*, Por aparecer en Proc. Amer. Math. Soc., 2005.

[9] K. G. Grosse-Erdmann, *Universal Families and Hipercyclic Operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1999), 345–381.

[10] A. Peris J. Bonét, F. Martínez-Giménez, *Linear Chaos on Fréchet Spaces*, 2001.

[11] C. Kitai, *Invariant Closed Sets for Linear Operators*, Ph.D. thesis, Univ. of Toronto, 1982.

[12] R. E. Greene & S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, John Wiley & Sons, INC., 1997.

[13] J. Bés & A. Peris, *Hereditarily Hipercyclic Operators*, J. Functional Analysis **167** (1999), 94–112.

[14] E. Gallardo-Gutiérrez. & A. Montes Rodríguez, *The Role of the Spectrum in the Cyclic Behavior of the Composition Operators*, Memoirs of the AMS,, 2004.

[15] S. Rolewicz, *On Orbits of Elements*, Studia Math. **33** (1969), 17–22.

[16] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, Editorial Alhambra, S.A., 1973.

[17] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer Verlag, New York, 1993.

[18] ———, *Notes on the Dynamics of Linear Operators*, Notas no publicadas. Disponibles en http://www.math.msu.edu/˜shapiro, 2001.

[19] P. S. Bourdon & J. H. Shapiro, *Cyclic Phenomena for Composition Operators*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1997.

[20] A. Martinón T. Bermúdez, A. Bonilla, *On the Existence of Chaotic and Hipercyclic Semigroups on Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2435–2441.

[21] K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1990.

Gerardo R. Chacón
Dpto. De Medición y Evaluación ULA.
grchacon@ula.ve

José Giménez
Departamento de Matemáticas ULA.
jgimenez@ula.ve

Edixon Rojas
Departamento de Matemáticas ULA.
edixonr@ula.ve