DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?

Douglas Jiménez

Logos frente a álogos

Se atribuye a los pitagóricos la expresión "*Todo es número*". La escuela pitagórica fue la primera escuela matemática griega. Antes de ellos se había acumulado una buena cantidad de conocimiento matemático debido a culturas como la egipcia y la babilónica; conocimiento con el que entran en contacto los griegos por medio de los viajes de Tales de Mileto y, luego, del propio Pitágoras. Este contacto significa para la matemática de la época un enorme salto conceptual pues, de una matemática dedicada en lo esencial a la solución de problemas de tipo práctico, se pasa a una matemática interesada en los conceptos y las relaciones que ellos ocultan, es decir una matemática teórica. A partir de Tales y Pitágoras, la matemática griega evoluciona por caminos de alta complejidad que, paradójicamente, se estructuran alrededor de una disciplina común: la geometría.

Es así como en el siglo III a.C., más de doscientos años después de Tales y Pitágoras, aparece un texto de importancia capital para la historia de la matemática: los *Elementos* de Euclides, esfuerzo totalitario de recolección del saber matemático acumulado hasta la época; dotado de un enorme sentido pedagógico que llevó desde su creación a separarlo en trece volúmenes[1]. En esencia se trata de un texto de geometría, pero con frecuencia oímos hablar del segundo libro como un libro de álgebra, del libro séptimo como un tratado de aritmética o teoría de números y del libro décimo como un texto de análisis infinitesimal. ¿Cómo congeniamos estas ideas, aparentemente dispersas, en una sola disciplina conceptual?

Podemos dar un ejemplo si retomamos la idea pitagórica original "*Todo es número*", idea que para los propios pitagóricos tenía un sentido tan profundo que adquiría características sagradas. En este sentido, Pitágoras viene a ser el predecesor original de Leopold Kronecker, el matemático que afirmó que "*Dios creó los números naturales, lo demás lo hizo el Hombre*", porque cuando un pitagórico hablaba de *número* lo que tenía en mente específicamente era *número*

[1]Es posible que, en lo referente a traducciones, los *Elementos* de Euclides sólo sean superados por la Biblia. Nuestras transcripciones están tomadas de la traducción al español de María Luisa Puertas Castaños, Edit. Gredos, 1994.

natural y no otra cosa. Esto lo podemos ver claramente en Euclides Def. VII.1 y Def. VII.2[2]. La primera dice "*Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una.*" y la segunda afirma "*Un número es una pluralidad compuesta de unidades*". Definiciones lo suficientemente restrictivas para separar el concepto de unidad del concepto mismo de número: *una unidad no es un número, es el ente que constituye a los números.*

La visión pitagórica del número como la sustancia constitutiva del Universo, condujo a otra creencia que juega un papel importante en el desarrollo del tema que nos ocupa: la absoluta conmensurabilidad de los segmentos, es decir

Figura 1: ¿Tienen A y B medida común?

la existencia de medida común para dos segmentos distintos cualesquiera, como por ejemplo los segmentos A y B de la figura 1. ¿Qué quiere decir que ellos dos tienen una medida común?

En primer lugar obsérvese que el segmento B es de menor tamaño que el segmento A, por lo cual (ver figura 2) podemos incluir el primero dentro de éste tantas veces como quepa. Este caso particular muestra que B cabe dos veces dentro de A, pero deja un restante: un pequeño segmento C que, como es natural, es menor que B. Podemos, por lo tanto, incluir a C dentro de B, tantas veces como quepa (en este caso, una) lo que deja un remanente, un segmento D menor que C. Repetimos el procedimiento colocando D dentro de C las veces que sea posible (en este caso, cuatro) y vemos que ya no queda remanente ninguno. En consecuencia, el segmento D es medida común de los segmentos A y B pues está contenido un número entero de veces en cada uno de ellos: 14 veces en el primero y 5 en el segundo.

Construcciones como la anterior condujeron a dos conceptos de importancia fundamental para la matemática clásica griega: los conceptos de razón ($\lambda o \gamma o \varsigma$, logos) y proporción ($\alpha \nu \alpha \lambda o \gamma o \varsigma$, análogos). Así, concebimos a los segmentos A y B en una razón, pero esta razón es idéntica a la que hay entre los números 14 y 5, por lo que hay una proporción que se expresa en la forma "A es a B como 14 es a 5"[3]. En un principio, los pitagóricos estaban seguros de la posibilidad de este procedimiento independientemente de los segmentos en cuestión; es decir, sin importar cuántos pasos fuera necesario dar, dos segmentos cualesquiera siempre

[2]Se refiere a las definiciones 1 y 2 del libro séptimo. Otro ejemplo de notación puede ser Prop. I.47, que se refiere a la proposición 47 del libro primero, en este caso el teorema de Pitágoras.

[3]Una forma simbólica clásica de expresar la idea es $A : B :: 14 : 5$.

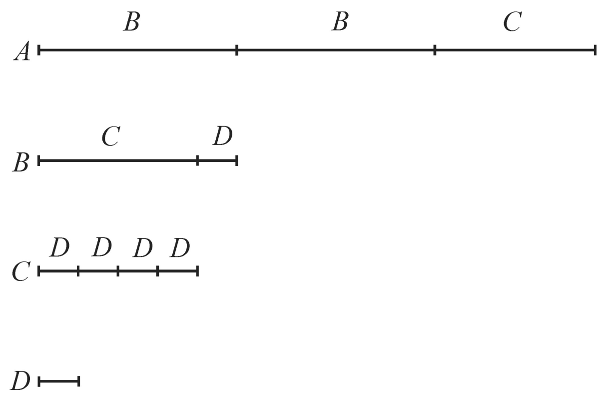

Figura 2: A y B están en la razón $14 : 5$

se rendirían a una medida común, lo que permitiría establecer con ellos una proporción expresable al final como razón de números enteros.

Pero también se asigna a Pitágoras el descubrimiento del teorema que lleva su nombre[4] el cual, entre otras muchas cosas, conduce a una importante proporción: *el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es al cuadrado original como* 2 *es a* 1. Ahora bien, esta proporción trae como consecuencia inmediata una interrogante: ¿Cuál es la proporción que se establece al comparar la diagonal del cuadrado y el lado del mismo?

La respuesta demolió la convicción pitagórica de la conmensurabilidad de los segmentos: *ambos segmentos resultaron ser inconmensurables, no era posible conseguir un segmento medida común para ellos.* A la distancia resulta difícil valorar la magnitud de un descubrimiento de esta naturaleza, pero cuando una visión epistemológica —e incluso ontológica— se sustenta sobre un supuesto determinado, la ruptura con ese supuesto significa en consecuencia un cambio de visión, vale decir, una revolución del pensamiento. Tendremos oportunidad de ver como este cambio se manifiesta en la redacción de los *Elementos* pero, por ahora, nos concentraremos en el descubrimiento mismo.

La escuela pitagórica, debido quizás a su hermetismo, no dejó obra escrita. Los descubrimientos que le asignamos provienen de una tradición que fue recogida por pensadores como Aristóteles. Por ejemplo, en *Analíticos primeros*, éste afirma: “Todo el que lleva a cabo una argumentación por reducción al absurdo infiere silogísticamente una falsedad, y prueba hipotéticamente la conclusión original al resultar su contradictoria algo imposible de suponer; por

[4]No siempre que un resultado matemático lleve el nombre de alguien significa que ese alguien lo descubriera. Hay incontables ejemplos de ello. Quizá uno de los más notables es el principio de Arquímedes, descubierto por Eudoxo, dos siglos antes de que naciera el primero.

ejemplo, *que la diagonal es inconmensurable con el lado del cuadrado, porque si se supone su conmensurabilidad se deriva que números pares e impares son iguales*[5]. Al inferirse silogísticamente la igualdad de pares e impares, se prueba hipotéticamente la inconmensurabilidad de la diagonal, ya que de contradecirse esto resulta una falsedad."[6]

La afirmación aristotélica es interesante pues contiene más de lo que esperábamos: la demostración de la inconmensurabilidad se realizó por reducción al absurdo, una técnica de demostración nada trivial o, incluso, intuitiva. Pero, ¿cómo se expresó tal demostración? Es difícil decirlo con precisión. De hecho, dentro del marco teórico que se conforma en los *Elementos* de Euclides sería un corolario de proposiciones de mayor generalidad. Sin embargo, existe una proposición, la X.117, que contiene una demostración concordante con los comentarios aristotélicos anteriores. Esta proposición es —según las autoridades en materia euclidiana, como Heiberg, por ejemplo— una *interpolación*, es decir, un texto añadido, con fines didácticos o de complementación, por los copistas que transcribían el legado euclidiano a sus futuras generaciones. Veámosla entonces[7].

Proposición X.117. Se nos propone demostrar que en las figuras cuadradas el diámetro es inconmensurable en longitud con el lado.

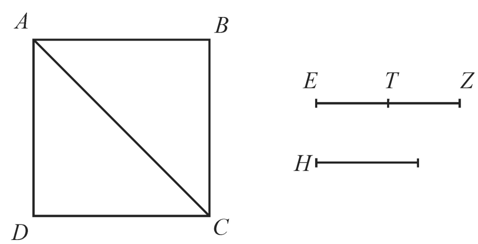

Figura 3: Inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrado, con diámetro AC. Digo que CA, AB son inconmensurables en longitud.

Porque supóngase, si es posible, que sean conmensurables. Digo entonces que el mismo número sería par e impar. Porque es claro que el cuadrado en AC es dos veces aquel en AB. Como CA, AB son conmensurables, tienen la razón

[5] Las cursivas son mías. D. J.

[6] Agradezco profundamente al Prof. Roberto Bravo, de la UCV, su traducción del inglés de este texto aristotélico.

[7] Por las razones expuestas, la proposición X.117 no aparece en todas las traducciones de Euclides. Lo que se leerá a continuación es mi traducción al español de una traducción al inglés de la versión griega, ya clásica, de Heiberg. Esta última me la hizo llegar amablemente el Prof. William C. Waterhouse de Penn State University, mediante la lista Historia Matematica.

de un número a un número. Digamos que CA es a AB como EZ es a H, y supongamos que EZ y H son los más pequeños de aquellos que tienen la misma razón.

Entonces EZ no es la unidad. Porque si lo fuera, y EZ es a H como AC es a AB, y AC es mayor que AB, entonces EZ es mayor que H, la unidad mayor que un número, lo cual es absurdo. Así, EZ no es la unidad y, por lo tanto, es un número.

Puesto que CA es a AB como EZ es a H, entonces también el cuadrado en CA es al cuadrado en AB como el cuadrado en EZ es al cuadrado en H. Pero el cuadrado en CA es dos veces el cuadrado en AB, así el cuadrado en EZ es dos veces el cuadrado en H. Por lo tanto, el cuadrado en EZ es par. En consecuencia, EZ es también par; porque si fuera impar, su cuadrado también sería impar, puesto que cuando se combina un número impar de sumandos impares, el total es impar. Así, EZ es par.

Divídase (EZ) en dos partes iguales en T. Puesto que EZ y H son los menores con la misma razón, son primos entre sí. Pero EZ es par, así H es impar. En realidad, si fuera par, 2 mediría a EZ y a H, puesto que todo número par tiene una mitad; esto es imposible para números primos entre sí y así H no es par. Por lo tanto es impar.

Dado que EZ es dos veces ET, el cuadrado en EZ será cuatro veces aquel en ET. Pero el cuadrado en EZ es dos veces aquel en H, así que el cuadrado en H es doble del cuadrado en ET. Luego el cuadrado en H es par. Por lo antes dicho, H es par. Pero también es impar, lo que es imposible. Así, CA y AB no son conmensurables en longitud, QED.

(Esta demostración sólo es posible si se dispone de los conceptos de número par e impar y números primos entre sí, definiciones que Euclides provee en el libro séptimo[8].)

El $\lambda o \gamma o \varsigma$ (logos), la *razón*, pasa así a dar paso al $\alpha \lambda o \gamma o \varsigma$ (álogos), la *no razón*. Pero la no conmensurabilidad es terrible para los pitagóricos porque los enfrenta a uno de sus más temidos fantasmas: el *horror infiniti*, vale decir el miedo al infinito, actitud que penetró toda la matemática griega clásica y, sin duda, contaminó toda la posteridad hasta Cantor. Porque si la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables, intentar con ellos el proceso de inserción y extracción de segmentos que se ilustra en la figura 2 es un proceso que, a diferencia del ilustrado, puede repetirse todas las veces que se desee sin llegar a un fin en ninguna de ellas. A este *horror infiniti* presta un invalorable soporte el método de demostración por reducción al absurdo, puesto que la contradicción conseguida dispensa al razonador de apoyarse en un procedimiento que exija una repetición tras otra sin término. Pero los griegos no eran hombres de dejar

[8]Def. VII.6: *Un número par es el que se divide en dos partes iguales*, Def. VII.7: *Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad* y Def. VII.13: *Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común.*

al pensamiento a su libre arbitrio, por lo cual vale la pena detenerse un tanto a analizar otra posible demostración basada esta vez en la figura 4.

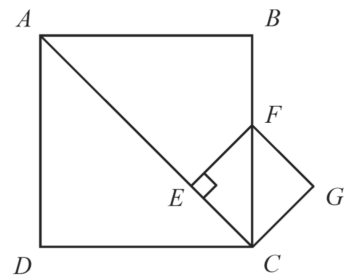

Figura 4: Inconmensurabilidad de la diagonal por antifairesis.

Sea $ABCD$ un cuadrado con diagonal AC y sea E el punto de esta diagonal tal que $AE = AD$, es decir, E es el punto donde cortamos el lado del cuadrado sobre la diagonal. Desde E dibujemos una perpendicular a la diagonal que corte el lado opuesto en F. Por consideraciones angulares es claro que EC y EF son lados de un cuadrado $FECG$ cuya diagonal es FC. Ahora bien, tomando en cuenta que FE y FB son segmentos tangentes desde un mismo punto F a la circunferencia que pasa por D, E y B, entonces $FB = FE = EC$, por lo cual $FC = BC - BF = AD - EC$. Es decir, la diagonal del cuadrado pequeño es el lado del cuadrado original menos el restante de quitar a la diagonal del cuadrado grande el lado del mismo.

Ahora bien, EC, el lado del cuadrado menor, es menor que la mitad de AB, el lado del cuadrado mayor. Por esta razón, FC, la diagonal del cuadrado menor, será menor que la mitad de AC, la diagonal del cuadrado mayor. Pero la igualdad $EC = AC - AD$ implica que si la diagonal y el lado del cuadrado original son conmensurables, también lo será EC que se medirá con la misma medida común a ambos, razonamiento que, en función de la igualdad $FC = AD - EC$ también puede aplicarse a FC; es decir, FC se mide con la medida común a AC y AD.

Una construcción similar sobre el cuadrado $FECG$ muestra que hay un cuadrado más pequeño, cuya diagonal es menor que la mitad de la diagonal FC y que se mide con la medida común a AC y AD. Pero el procedimiento puede repetirse haciendo aparecer nuevos cuadrados cuyas diagonales son menores que las mitades de las diagonales de los cuadrados anteriores. Tal repetición producirá eventualmente una diagonal menor que la medida común a AC y AD, lo cual es absurdo pues un segmento no puede ser menor que el segmento que lo mida, QED

De nuevo tenemos un razonamiento por reducción al absurdo, pero su naturaleza es esencialmente distinta del anterior, por cuanto este último procede por sustracciones sucesivas de unos segmentos sobre otros siempre que en cada paso se sustraiga más de la mitad, lo que debe llevar a estar por debajo de cierto límite a partir de un punto determinado. Estas sustracciones sucesivas fueron llamadas antifairesis (antanairesis, por Aristóteles) y se convirtieron en un método predilecto de constatación de inconmensurabilidad. Sin embargo, están basadas en un supuesto nada trivial: que su repetición nos colocará siempre por debajo de cualquier segmento predeterminado. En los *Elementos*, Euclides arregla las cosas de forma que este supuesto necesario aparezca como la proposición X.1: *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.*

División en extrema y media razón

En este sentido, un problema cuya solución se asigna históricamente al pitagorismo está relacionado con el pentágono regular: se trata de construir dicho pentágono a partir de un triángulo isósceles cuyos ángulos en la base son cada uno el doble del ángulo en el tercer vértice. La presencia del pentágono y el trazo

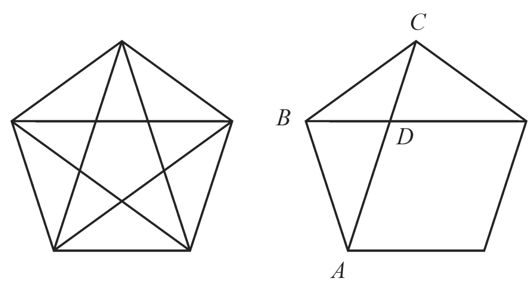

Figura 5: La estrella pitagórica y la sección áurea.

de sus diagonales hizo aparecer la estrella de cinco puntas (ver figura 5), que fue usada como un símbolo de pertenencia a la escuela. Ahora bien, las relaciones de tamaño establecidas entre las diagonales y los lados del pentágono pudieron conducir a la interrogante acerca de la razón existente entre el segmento mayor y el menor de los generados por el corte de las diagonales. La respuesta a esta interrogante conduce a lo que la posteridad conoció como *división áurea* o *división en extrema y media razón*: un segmento está dividido por uno de sus puntos en extrema y media razón cuando el segmento total es al segmento mayor como dicho segmento mayor es al menor. Las diagonales del pentágono regular se cortan en extrema y media razón[9], es decir que en la figura 5 se tiene que

$$AC : AD :: AD : DC.$$

Pero no terminan allí las interrogantes pues ahora cabe indagar acerca de la conmensurabilidad de los segmentos generados por el corte. Sea entonces el segmento AC cortado por D en extrema y media razón y llevemos el segmento

Figura 6: Inconmensurabilidad en la sección áurea.

DC (el menor) sobre el segmento AD (el mayor), lo que genera un punto E en este último, tal que $AE = DC$. La proporción anterior se puede interpretar, entonces, en la forma

$$(AD + DC) : AD :: (AE + ED) : AE,$$

lo que equivale a

$$DC : AD :: ED : AE,$$

de donde

$$AD : DC :: AE : ED,$$

y finalmente[10]

$$AD : AE :: AE : ED,$$

lo que significa que llevar el segmento menor sobre el mayor reproduce nuevamente la división en extrema y media razón.

Si los segmentos de la división tuvieran una medida común, cada uno de los segmentos menores que aparecen en cada superposición se mediría con esa medida común. Pero como en una división en extrema y media razón el segmento mayor es más grande que la mitad del segmento total, las superposiciones consecutivas llevarán eventualmente a un segmento menor más pequeño que la medida común, lo cual es imposible. *Los segmentos de la división en extrema y media razón son inconmensurables.*

Es punto para la polémica determinar si los pitagóricos podrían llevar adelante demostraciones como éstas. De hacerlo, estaban en posesión de estructuras antifairéticas de razonamiento, pero la evidencia histórica parece indicar que tales estructuras fueron usadas por vez primera por el platónico Eudoxo y

[9] Para la demostración, trace la diagonal que falta desde C y observe que aparecen triángulos isósceles semejantes entre si.

[10] Estas equivalencias entre proporciones están debidamente justificadas en los Elementos en la definiciones V.13 a V.15.

se piensa, quizás con base en la enorme influencia de Arquímedes, que su uso en los *Elementos* no es más que una modificación, en el estilo de Euclides, de la herencia eudoxiana. Eudoxo apareció en escena alrededor de siglo y medio después de Pitágoras. Sea como fuere, vale la pena destacar la tremenda paradoja histórica que significó el que los símbolos pitagóricos más destacados —el teorema de Pitágoras y la estrella de cinco puntas— fueran los instrumentos de demolición de su creencia más sagrada: la inexcepcional conmensurabilidad de los segmentos.

Razón y proporción: las definiciones

Pero la inconmensurabilidad produce al pensamiento griego problemas que van más allá de lo meramente religioso. En principio existía la esperanza de que el $\lambda o\gamma o\varsigma$ abarcara todo par de segmentos mas, como veremos dentro de poco, vale establecer relaciones de proporcionalidad entre segmentos inconmensurables, lo que coloca en revisión crítica el concepto mismo de razón, base de la proporción; en otras palabras, había que reconcebir el *logos*... reconceptualizar la idea. El nuevo concepto debía abarcar tanto a los conmensurables como a los inconmensurables. En lo que sigue podemos obtener una ganancia pedagógica de valor incalculable, pues en una época como la nuestra, con una matemática tan imbuida de lo formal —en la que a veces el estudiante siente que los conceptos nacen con su definición y, por tanto, dirige sus esfuerzos más a la formalización que a la propia comprensión— entender o, al menos, intentar descifrar las motivaciones de una definición nada intuitiva en su expresión final, es un ejercicio de acercamiento total a la creación matemática en su esencia más íntima.

Si la definición de razón se adecúa a lo que tenemos en mente, debe llevarnos a las proporciones correctas entre las razones que, a priori, sabemos las mismas. Por ejemplo, si tenemos dos cuadrados de lados distintos L y l, cuyas diagonales

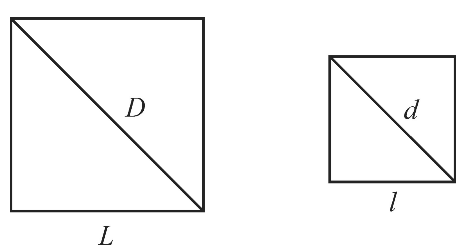

Figura 7: $D : L :: d : l$.

respectivas son D y d (ver figura 7), entonces ha de cumplirse que $D : L :: d : l$, independientemente de la inconmensurabilidad de los segmentos involucrados. Un primer intento está resumido en la definición V.3: *Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.* Ahora bien, ni siquiera a quien realiza un trabajo fundacional como el que analizamos, se le escapa el carácter vago de una definición como ésta. De hecho, entre los expertos se considera que tal "definición" no es euclidiana en absoluto, sino que se trata de una interpolación para algunos (como Simson) lamentable.

Ahora bien, ya Eudoxo antes de Euclides había previsto este problema y anticipado la solución de manera magistral. Tratemos de aclarar con un sencillo ejemplo. Supóngase que tenemos dos segmentos D y L y a partir de un punto O marquemos en una recta cualquiera una serie de puntos consecutivos A_1, A_2, A_3, etc. cada uno separado de su antecesor por la longitud de D. En otra recta paralela a la anterior y a partir de un punto o situado en la perpendicular a ambas que pasa por O, marquemos una serie de puntos a_1, a_2, a_3, etc. separados dos consecutivos cualesquiera por una distancia L, tal como se muestra en la figura 8. Supongamos en principio que D y L son conmensurables, como

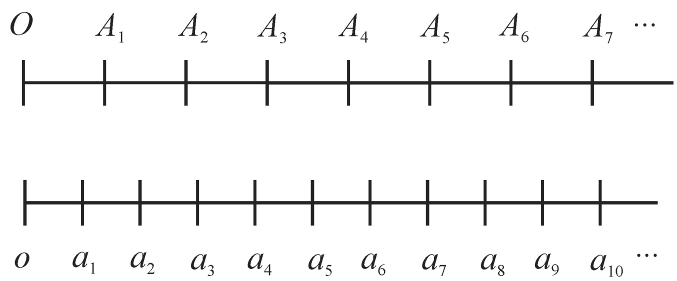

Figura 8: Construcción del concepto de razón.

por ejemplo $D : L :: 7 : 5$. En este caso, cada $5D$ se tiene una coincidencia con alguna $7L$, es decir, coincidirán A_5 con a_7, A_{10} con a_{14}, A_{15} con a_{21}, etc. Recíprocamente, si encontramos una coincidencia entre alguna de las A con alguna de las a, supongamos A_m con a_n, es claro entonces que cada mD se corresponde con una nL, por lo que se tiene la conclusión de que $D : L :: n : m$, de donde se sigue que los segmentos en cuestión serían conmensurables.

El razonamiento anterior expone por tanto una condición suficiente y necesaria, a partir de la cual es evidente que si D y L son segmentos inconmensurables, como por ejemplo la diagonal y el lado de un cuadrado, entonces es imposible que coincida alguna A con alguna a; de manera que entonces toda A se encontrará situada entre dos a consecutivas.

En cualquiera de los dos casos, siempre existirá una A que sobrepase a alguna a escogida y, viceversa, toda A que se seleccione será sobrepasada por alguna a. En términos de D y L se puede afirmar que algún múltiplo de L

será mayor que cualquier múltiplo particular de D o viceversa. Esta es la clave de la observación de Eudoxo[11], que sería recogida por Euclides en la Def. V.4: *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.* Esta definición completa la Def. V.3 y, además, resuelve el problema de su vaguedad. Hay otras interpretaciones al respecto, pero no es éste el trabajo indicado para analizarlas.

Aún no estamos listos. Sigue pendiente qué significa la proporción cuando las razones no pueden expresarse en términos de números; es decir, la explica-

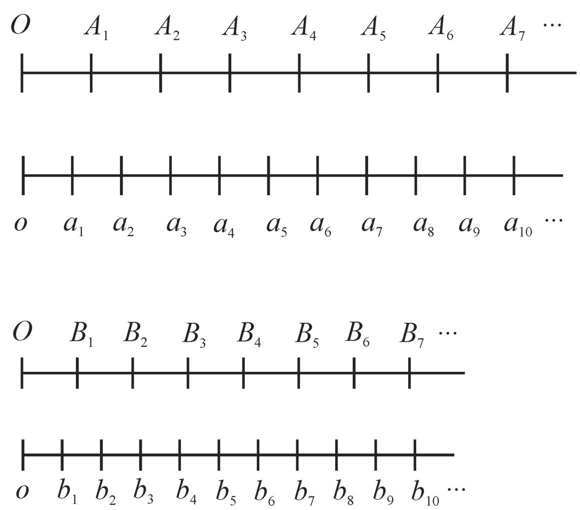

Figura 9: Concepto general de proporción.

ción de la proporcionalidad expresada en la figura 7. Pero esta es una labor que, en sí misma, significa nada menos que la propia reelaboración (y consiguiente reformulación) del concepto de proporción. Es aquí donde Euclides arranca los mejores frutos (al menos los mejores para su época) del árbol que sembró Eudoxo. Supongamos que a la construcción mostrada en la figura 8 la acompañamos con una construcción similar, en la que identificamos puntos B separados por segmentos congruentes d y puntos b separados por segmentos congruentes l, tal como se muestra en la figura 9. Añadamos la suposición de que los pares D, L y d, l son, diagonales y lados respectivos de dos cuadrados distintos como, digamos, los de la figura 7. Como ya hicimos ver, a priori hemos afirmado que $D : L :: d : l$, de manera que las dos líneas identificadas con los puntos B, b representan un modelo a escala de las dos identificadas con los puntos A, a. Esto

[11]Que luego se llamaría *principio de Arquímedes* por las importantes aplicaciones que este último le encontraría.

no puede significar otra cosa que el hecho de esperar que las posiciones relativas entre cualquier par A, a se correspondan en idéntica forma con el par similar B, b. Así, del hecho de que A_3 esté entre a_4 y a_5 esperamos que B_3 esté entre b_4 y b_5; nos parecería un completo contrasentido —dentro del concepto cuya definición esperamos alcanzar— que B_3 estuviera antes de b_4 o después de b_5. En resumen, las posiciones relativas de dos múltiplos distintos de D y L se corresponden a las posiciones relativas de los mismos múltiplos de d y l. Pero incluso esto sería verdadero en el caso de que D y L (y, por supuesto, d y l) fueran conmensurables, con la ventaja adicional en este caso de que las posiciones relativas pueden incluir la coincidencia.

Ahora bien, cabe la pregunta siguiente: ¿llevará la relación entre múltiplos expresada en el párrafo anterior a la idea intuitiva que tenemos de proporción? Observemos que esta pregunta tiene un carácter nada matemático, sino exclusivamente epistemológico: no se puede exigir a quien define, el demostrar que su definición es la adecuada para el término definido. Tal como hace ver Heath —siguiendo a Barrow— es como pedir a alguien que demuestre que la palabra *circunferencia* sólo es aplicable a las curvas que contienen a los puntos equidistantes de un punto fijo. Pero nótese que si tuviéramos cuatro segmentos D, L, d y l', de forma que l' tuviera alguna diferencia, por pequeña que fuera, con l y construyéramos con ellos la figura 9, esto bastaría para destruir nuestro modelo a escala. En efecto, supongamos que l' es menor que l en una diferencia igual a la décima parte de l; en términos clásicos, esta idea la expresamos en la forma $(l - l') : l :: 1 : 10$. Esta pequeña perturbación del modelo empuja cada b a su izquierda en una décima parte de su situación original, lo que traería como consecuencia que b_{10} se localice en la posición que anteriormente tenía b_9. A partir de aquí, ya nada será como antes en términos de posiciones relativas de los múltiplos de los pares D, L y d, l'.

Aclarado el aspecto epistemológico, podemos por fin entrar en la definición euclidiana del concepto de "misma razón"[12] recogida como Def. V.5: *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.* Así, la proporción $D : L :: d : l$, significa —apelando a la moderna simbología— que, para todo par de números m, n, si $mD >, =$ o $< nL$ entonces ha de tenerse que $md >, =$ o $< nl$, correlativamente. Como punto de culminación, Euclides completa su marco teórico con la definición V.6: *Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón*; con la cual se domina de manera definitiva el concepto de proporción.

[12] No decimos "igual razón". A la distancia histórica parece una sutileza inútil; sin embargo, va más allá de esto. En inglés, De Morgan (citado por Heath) habla de "sameness of ratios", no de "equality of ratios". Difícilmente el uso castellano sancione el adjetivo "mismidad".

Para finalizar la consideración pedagógica, vale la pena hacer notar que la proposición X.5 de Euclides dice: *Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.* Lo que significa que Euclides retorna a la visión histórica original (muy particular) del concepto de proporción, cinco libros después de haber resuelto el problema de manera general. Exposiciones metódicas como éstas sólo son posibles si vienen precedidas de un largo proceso, teóricamente doloroso, compuesto de pocos aciertos y muchos errores, en los que el expositor se presenta casi como un prodigioso armador de un difícil rompecabezas histórico, que le llegó con todas o casi todas las piezas incluidas. De hecho, cualquier libro de matemática actual no es más que una instancia de un proceso de esta naturaleza, algunos no más que simples reconstrucciones de rompecabezas ya armados. Todo profesor de matemática haría bien informando de esto a sus discípulos.

Orden y aproximaciones

Queda un aspecto del problema por analizar; aspecto que se inscribe en lo más rancio de la tradición pitagórica, a pesar de lo cual no aparece como materia de estudio en los *Elementos*, pero fue explotado hasta extremos magistrales por Arquímedes. Se trata de conseguir razones numéricas que expresen de la mejor forma posible las razones entre inconmensurables. Aspecto que involucra dos subproblemas distintos: el primero: ¿qué significa "la mejor forma posible"?; el segundo, ¿qué método (o métodos) lleva a conseguir tales razones numéricas?

A nuestros objetivos le interesan fundamentalmente el primero de los subproblemas mencionados, es decir, el criterio para dar una razón numérica que pueda considerarse buena, hasta cierto grado, para representar una razón entre inconmensurables. Volvamos a la figura 8 y supongamos nuevamente que D y L son diagonal y lado respectivos de un cuadrado. Supongamos además que hemos continuado el dibujo hasta los extremos que comentaremos líneas adelante y solicitamos indulgencia con algunas afirmaciones que haremos sin prueba en ese momento.

Por ejemplo, A_5 está colocada (vuelva a la figura 8) entre a_7 y a_8; es decir $5D$ es más que $7L$, pero menos que $8L$. Si, por el contrario, $5D$ coincidiera con $7L$ tendríamos que decir que $D : L :: 7 : 5$; mas si coincidiera con $8L$ afirmaríamos que $D : L :: 8 : 5$. En cierto sentido, es como si la razón $7 : 5$ apareciera *antes* de la razón $D : L$ pero, a su vez, $8 : 5$ aparece *después* de $D : L$. Esta consideración muestra la necesidad de introducir el concepto de orden entre las razones: tendremos que decir que la razón $D : L$ es mayor que la razón $7 : 5$, pero menor que la razón $8 : 5$. Euclides resuelve esta necesidad con la definición V.7: *Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la* *tercera con la cuarta*[13].

Continuando de la manera indicada la exploración de la recta, y esperando la indulgencia solicitada en lo relativo a afirmaciones nada triviales, encontraremos nuevas posiciones relativas que nos permitirán expresar nuevas relaciones de orden del tipo que acabamos de describir. Así A_{10} se encuentra situada entre a_{14} y a_{15}, por lo cual $D : L$ es mayor que $14 : 10$ y menor que $15 : 10$; A_{100} se encuentra entre a_{141} y a_{142}, de donde $D : L$ es mayor que $141 : 100$ y menor que $142 : 100$; $A_{1000000}$ se localiza entre $a_{1414213}$ y $a_{1414214}$, de forma que $D : L$ es mayor que $1414213 : 1000000$ y menor que $1414214 : 1000000$.

Aplicaciones sucesivas del criterio establecido por la Def. V.7 mostrarán que las razones anteriores (incluyendo a $D : L$) se pueden organizar, de mayor a menor, de acuerdo a la siguiente lista:

$$\begin{array}{c} 8 : 5 \\ 15 : 10 \\ 142 : 100 \\ 1414214 : 1000000 \\ D : L \\ 1414213 : 1000000 \\ 141 : 100 \\ 14 : 10 \\ 7 : 5 \end{array}$$

(las dos últimas son, de hecho, la misma razón) de forma que las razones que hemos colocado en las líneas más cercanas a $D : L$ se pueden considerar "mejores" para representarla que aquellas que están en líneas más alejadas. Hoy utilizamos para expresar esta idea la palabra *aproximación*. El maestro griego de las aproximaciones fue Arquímedes; de hecho, la razón *circunferencia : diámetro*, que los griegos no pudieron demostrar inconmensurable, fue aproximada por Arquímedes situándola entre las razones $223 : 71$ y $22 : 7$. En el camino nos sorprendió con otras, de las que ni siquiera nos dio explicación, pero que nos asombran por su finura.

De los griegos a Dedekind

En las consideraciones anteriores hemos tratado de evitar, hasta donde nos ha sido posible, el uso de nomenclatura moderna. Al lector, por supuesto, no se le ha escapado que, salvo por la alusión al número áureo, no hemos hablado de otra cosa que no sea la raíz cuadrada de 2, y la seguridad que mostramos respecto a las razones aproximadas expresadas en los párrafos anteriores provienen de

[13] María Luisa Puertas Castaño opina que, más allá de la deuda que la definición V.5 pudiera tener con Eudoxo, la V.7 es completamente euclidiana.

nuestro conocimiento de las aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$. Está claro que para los griegos la cosa no era tan fácil y lo que hasta este momento hemos querido hacer patente es, precisamente, el cúmulo de dificultades que hubieron de remontar para expresar unas ideas que hoy, dos mil trescientos años después, podemos hacer comprender, al menos operacionalmente, a un escolar. A ellos les llevó por lo menos dos siglos superar esta cuesta; pero maravilla que en la actualidad sólo repetimos su legado y lo único que hemos hecho es añadirle economía de pensamiento, en forma de notaciones que facilitan la expresión de las ideas con mayor rapidez.

De esta manera, las *razones* pasaron a ser *cocientes* y las *proporciones* se convirtieron en *igualdades numéricas*. Aún más, las razones entre conmensurables sufrieron la metamorfosis que las llevó a números *racionales* y aquellas entre inconmensurables pasaron a ser números *irracionales*. Simbólicamente, la idea

$$D : L :: d : l,$$

se transformó en

$$\frac{D}{L} = \frac{d}{l},$$

y el componente operacional de esta última trajo como consecuencia un componente estructural —siempre presente, aún no siendo evidente— el cual contribuyó a simplificar los esquemas de razonamiento, a costa de hacer menos elemental la idea original.

La nomenclatura moderna convierte entonces el concepto de “misma razón” (Def. V.5) en lo siguiente:

$$\frac{D}{L} = \frac{d}{l}$$

si y sólo si dados dos enteros cualesquiera m, n se tiene que

$$\begin{cases} mD < nL & \text{implica que} \quad md < nl \\ mD = nL & \text{implica que} \quad md = nl \\ mD > nL & \text{implica que} \quad md > nl \end{cases}$$

mientras que “razón mayor” (Def. V.7) se transforma en:

$$\frac{D}{L} > \frac{d}{l}$$

si y sólo si cuando dos enteros m, n hacen que $mD > nL$ entonces se cumple que $md \leq nl$.

Cada una de estas definiciones es en sí misma un test que procede de manera exclusiva con números enteros o con múltiplos enteros de las magnitudes involucradas; he allí su dificultad. Al transformarlas en relaciones numéricas abstractas, que incluyan el concepto de número racional con su carga operacional, facilitamos su manejo pues se nos hace claro que la afirmación $mD < nL$

es totalmente equivalente a $\dfrac{D}{L} < \dfrac{n}{m}$ y si queremos que $\dfrac{D}{L} = \dfrac{d}{l}$, no queda otra posibilidad que $\dfrac{d}{l} < \dfrac{n}{m}$, a su vez equivalente a $md < nl$.

Entonces, cualquier razón $D : L$ separará a todo el conjunto de las razones de enteros $n : m$ en dos partes distintas: (a) aquella parte Y en la cual $D : L$ es mayor que toda $n : m$ y (b) aquella parte X en la cual $D : L$ *no* es mayor que ninguna $n : m$. Si tuviéramos otra razón $d : l$ que fuera *la misma* que $D : L$ ésta nos daría una separación similar en dos partes que, correlativamente, llamaremos y y x.

Si tomamos una razón $n : m$ de la parte Y se cumplirá que $mD > nL$ pero, por la definición euclídea de "misma razón" es claro que $md > nl$ y, por tanto $n : m$ estará también en la parte y. El razonamiento anterior es completamente simétrico respecto a las ternas Y, D, L y y, d, l, por lo cual es claro que toda razón $n : m$ de la parte y será también una razón de la parte Y. En otras palabras, las partes Y y y son exactamente la misma. A partir de aquí, no debe ser difícil probar que también X y x son una y la misma cosa.

De manera que, entonces, cualquier razón $D : L$ y todas aquellas razones $d : l$ que sean las mismas que ella, separan al conjunto de las razones de enteros en las dos partes X y Y que acabamos de comentar. Obsérvese que si D y L son conmensurables entonces $D : L :: n : m$, para alguna razón $n : m$ de la parte X; es más $n : m$ es la mayor de las razones contenidas en la parte X; pero si no son conmensurables entonces no podría establecerse una proporción como la señalada para ninguna razón de enteros $n : m$.

En el año de 1872, el matemático alemán Richard Dedekind (1831–1916) publicó un artículo denominado "*Continuidad y números irracionales*" en el que demuestra que el conjunto de los números racionales puede separarse, de infinitas maneras, en dos conjuntos, de forma que los elementos de uno de ellos sean todos mayores que cualquiera de los elementos del otro conjunto. A esta separación, Dedekind la denominó *cortadura* y la representó por el símbolo (A_1, A_2), en el que A_1 y A_2 son los conjuntos de la separación.

Además de esto, demostró que hay dos clases de cortaduras. Para una de estas clases, uno de los conjuntos de la separación tiene un elemento extremo que le pertenece. Es decir, el conjunto de elementos mayores tiene un elemento que es el menor de todos o el conjunto de elementos menores tiene un elemento que es el mayor de todos. La otra clase tiene la característica de no poseer tales elementos extremos. Evidentemente, en el primer caso, el elemento extremo en cuestión es un número racional y Dedekind dice, entonces, que este número *produce* dicha cortadura; en consecuencia, la cortadura se identifica con tal número racional.

En lo que respecta al segundo caso, Dedekind escribe: "Entonces, siempre que nos encontremos con una cortadura (A_1, A_2) que no haya sido producida por ningún número racional, crearemos un nuevo número, un número *irracional*

α, al que consideraremos completamente definido por esta cortadura (A_1, A_2); diremos que el número α corresponde a esta cortadura o que la produce."[14] Es decir, Dedekind define al número irracional por simple identificación con la cortadura correspondiente y, como es lógico, cada racional en A_1 es menor que α y cada racional de A_2 es mayor que α. Lo demás es añadir a este concepto una base operacional, tarea que Dedekind realiza pocas páginas después en el mismo ensayo.

Los historiadores de la matemática han observado que (salvo quizás por esta base operacional) el concepto de "misma razón" se puede comparar con el concepto de cortadura de Dedekind. Basta observar que las partes X, Y que aparecieron párrafos atrás pueden asimilarse exitosamente, de forma correlativa, a los conjuntos A_1, A_2 que conforman la cortadura. Así mismo, la pertenencia o no de las razones $D : L$ a la parte X se puede comparar al papel de los números (racionales o irracionales, respectivamente) que *producen* la cortadura.

Para otros, en cambio, esta comparación resulta forzada. Pudieran tener razón, si consideramos que Euclides (o Eudoxo, en cualquier caso) y Dedekind orientaban sus objetivos sobre dos terrenos de naturalezas totalmente distintas. Sin embargo, en matemática como en el poema de Manrique[15], pareciera que todos los conceptos van al mismo mar. Sólo que en la matemática no se trata de "la mar, que es el morir" sino, por el contrario, de una mar que es renacer.

Douglas Jiménez
Universidad Nacional Experimental Politécnica (UNEXPO)
"Antonio José de Sucre". Venezuela
dougjim@cantv.net; djimenez@bqto.unexpo.edu.ve

[14] *Essays on the theory of numbers (I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers).* Richard Dedekind. Dover Publications Inc. New York. 1963. Pág. 15. La traducción es del autor de este ensayo.

[15] "Nuestras vidas son los ríos/ que van a dar en la mar/ que es el morir:/ allí van los señoríos/ derechos a se acabar/ e consumir." Jorge Manrique, poeta renacentista español.