



Sophus Lie (1842-1899)

Vol. XIV • Nos. 1 y 2 • Año 2007

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XIV, Números 1 y 2, Año 2007

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Oswaldo Araujo

Editores Asociados

Carlos Di Prisco y Henryk Gzyl

Editor Técnico: Boris Iskra

Comité Editorial

Pedro Berrizbeitia, Alejandra Cabaña, Giovanni Calderón,
Sabrina Garbin, Gerardo Mendoza, Neptalí Romero, Rafael
Sánchez Lamonedá, Judith Vanegas, Jorge Vargas

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

CAPITAL

Carlos A. Di Prisco

IVIC

cdiprisc@ivic.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo

ULA

araujo@ula.ve

ZULIA-FALCON

En reorganización

CENTRO-OCCIDENTAL

Sergio Muñoz

UCLA

smunoz@uicm.ucla.edu.ve

ORIENTE

Said Kas-Danouche

UDO

skasdano@sucre.udo.edu.ve

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
<http://amv.ivic.ve/> .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana

Vol. XIV • Nos. 1 y 2 • Año 2007

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana nació en 1994 con la finalidad primordial de ser el órgano difusor de la Asociación Matemática Venezolana. Ligado, desde sus inicios, a las labores editoriales del Boletín agradezco, a la Asamblea de la Asociación Matemática Venezolana, mi designación como Editor del mismo. Espero poder cumplir con la misión asignada y emular la labor de los que me precedieron en tal loable tarea: José Ramón Ortiz, Joaquín Ortega y Argimiro Arratia. Gracias a su trabajo, dedicación y a los equipos que, formaron y dirigieron, hemos logrado mantener la circulación del Boletín durante trece años.

Antes de bosquejar mis objetivos y de comentar el contenido del volumen XIV pido disculpas, a nuestros lectores, por el retraso en la aparición de este volumen lo que, en parte, se debe a problemas propios de la transición. Es mi deseo corregirlos para evitar atrasos en la publicación, situación que logró superar Argimiro Arratia en los últimos años.

Me propongo incrementar las contribuciones de la comunidad matemática, principalmente, la establecida en el país, ya sean éstas en forma de artículos de investigación, trabajos de divulgación o temas de discusión de interés general; en otras palabras, lograr que la comunidad transforme al boletín en su natural medio de comunicación. En aras de ese objetivo y de agilizar el trabajo editorial se ha aumentado los miembros del Comité Editorial y se ha incorporado la figura de Editores asociados y de Editor técnico. Por otra parte, haré esfuerzos para dotar al boletín de una infraestructura secretarial que descargue al Editor de tareas que lo distraen de su principal función, a saber, producir una publicación.

En el volumen XIV presentamos los trabajos de Linyu Peng, Huafei Sun y Lin Jiu, Henryk Gzyl y Lázaro Recht, Said Kas-Danouche, y de Verónica Martín, Juan Núñez y Ángel F. Tenorio. Los tres primeros son artículos de investigación matemática y el cuarto es un artículo de divulgación sobre la vida de Sophus Lie. En la sección de Información nacional Carlos Di Prisco comenta los logros académicos de Carlos Uzcátegui que lo hicieron merecedor del Premio Lorenzo Mendoza Fleury 2007 que otorga, cada dos años, la Fundación Empresas Polar y Rafael Sánchez reseña la actividad olímpica del primer semestre del año pasado, como fueron: Olimpiada Juvenil de Matemáticas y IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, ambas, realizadas en Mérida.

En nombre de los Editores y del Comité Editorial agradecemos la colaboración prestada por nuestros colegas en la edición de este volumen. Por otro lado, la Asociación Matemática Venezolana le da las gracias a la Academia de Ciencias Físicas, Matemática y Naturales y a la Fundación Talven por su contribución a la realización de la XX Escuela Venezolana de Matemáticas. Asimismo, a la Fundación Empresas Polar por el apoyo sostenido al desarrollo de la matemática en Venezuela en los distintos aspectos de esa actividad: docencia, investigación y divulgación.

Finalmente, mi gratitud a todos mis colegas que han aceptado compartir

y acompañarme en la tarea de realizar el trabajo editorial. Espero que las circunstancias nos ayuden para seguir en, nuestro común ideal, de publicar una revista de calidad con presencia nacional e internacional.

Oswaldo Araujo.

The geometric structure of the Pareto distribution *

Linyu Peng, Huafei Sun and Lin Jiu
Beijing Institute of Technology

Abstract

In this paper, we characterize the Pareto manifold from the viewpoint of information geometry and give the Ricci curvatures, the Gaussian curvature, the Kullback divergence, the J-divergence and the geodesic equations. Also, some examples on the application of the Pareto distribution are provided.

Resumen

En este artículo, caracterizamos la variedad de Pareto desde el punto de vista de la geometría de la información y calculamos las curvaturas de Ricci, la curvatura Gaussiana, la divergencia de Kullback, la J-divergencia y las ecuaciones de las geodésicas. También damos algunas aplicaciones de la distribución de Pareto.

Key words. The Pareto distribution, Ricci curvature, Gaussian curvature, divergence

Mathematics Subject Classification: 53B20, 62B10.

1 Introduction

It is well known that information geometry has been widely applied into various fields, such as statistical inference, system control and neural network. Recently, scholars studied the statistical manifolds from the viewpoint of information geometry, and using the geometric metrics gave a new description of the statistical distribution. Here, the parameters of the probability density function play an important role in statistical manifold and can be regarded as the coordinate system. In [1], Amari studied the exponential distribution families and Dodson ([4]) and his colleagues investigated some special exponential distributions such as the bivariate normal distribution, the Gamma distribution,

*The subject is partially supported by the Foundation of China Education Ministry.

the McKay distribution and the Frund distribution and gave their geometric structures. It is clear that the exponential distribution shows a “lovely” form with the potential function, by using which the calculation becomes more convenient. The Pareto model is very famous, but the Pareto distribution can not be written as a form with the potential function, which means that the calculation becomes difficult. In this paper, we study the geometric structure of the Pareto distribution.

2 Preliminaries.

Definition 2.1. For a density function $f(x; \theta)$, where $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$, the function $l(x; \theta)$ is defined by

$$l(x; \theta) = \ln f(x; \theta). \quad (2.1)$$

Definition 2.2. We call $M = \{l(x; \theta) | (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n) \in R^n\}$ an n -dimensional distribution manifold, where $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ plays the role of the coordinate system.

Definition 2.3. The Fisher information matrix (g_{ij}) is defined by

$$(g_{ij}) = (E_\theta[\partial_i l \quad \partial_j l]), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

where

$$\partial_i l = \frac{\partial}{\partial \theta^i} l(x; \theta), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Then we get the inverse matrix of (g_{ij})

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Definition 2.4. The Riemannian connection Γ_{ijk} are defined by

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

and the α -connection are defined by

$$\Gamma_{ijk}^{(\alpha)} = \Gamma_{ijk} - \frac{\alpha}{2} T_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

where

$$T_{ijk} = E[\partial_i l \quad \partial_j l \quad \partial_k l], \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Definition 2.5. Under the θ coordinate system, the α -curvature tensors $R_{ijkl}^{(\alpha)}$ are defined by

$$R_{ijkl}^{(\alpha)} = \left(\partial_j \Gamma_{ik}^{s(\alpha)} - \partial_i \Gamma_{jk}^{s(\alpha)} \right) g_{sl} + \left(\Gamma_{jtl}^{(\alpha)} \Gamma_{ik}^{t(\alpha)} - \Gamma_{itl}^{(\alpha)} \Gamma_{jk}^{t(\alpha)} \right), \quad (2.7)$$

$$i, j, k, l, s, t = 1, 2, \dots, n,$$

where

$$\Gamma_{ij}^{k(\alpha)} = \Gamma_{ijs}^{(\alpha)} g^{sk}, \quad i, j, k, s = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Definition 2.6. The α -Ricci curvatures $R_{ik}^{(\alpha)}$ are given by

$$R_{ik}^{(\alpha)} = R_{ijk}^{(\alpha)} g^{jl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Definition 2.7. The α -sectional curvatures $K_{ijij}^{(\alpha)}$ are defined by

$$K_{ijij}^{(\alpha)} = \frac{R_{ijij}^{(\alpha)}}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

Specially, when $n = 2$, the α -sectional curvature $K_{1212}^{(\alpha)} = K^{(\alpha)}$ is called the α -Gaussian curvature and

$$K^{(\alpha)} = \frac{R_{1212}^{(\alpha)}}{\det(g_{ij})}. \quad (2.11)$$

Definition 2.8. Assume $p(x; \theta_p)$ and $q(x; \theta_q)$ are two points on the manifold M , the Kullback divergence $K(p, q)$ is defined by

$$\begin{aligned} K(p, q) &= E_{\theta_p} \left[\ln \frac{p(x; \theta_p)}{q(x; \theta_q)} \right] \\ &= \int p(x; \theta_p) \ln \frac{p(x; \theta_p)}{q(x; \theta_q)} dx \end{aligned} \quad (2.12)$$

and the J-divergence is defined by

$$J(p, q) = \int (p(x; \theta_p) - q(x; \theta_q)) \ln \frac{p(x; \theta_p)}{q(x; \theta_q)} dx. \quad (2.13)$$

When the two points $p(x; \theta_p)$ and $q(x; \theta_q)$ are close enough, from the Taylor's formula, one can see that

$$K(\theta, \theta + d\theta) = \frac{1}{2} ds^2$$

and

$$J(\theta, \theta + d\theta) = ds^2.$$

Definition 2.9. The geodesic equations of manifold M with coordinate $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ are defined by

$$\frac{d^2 \theta^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\theta^i}{dt} \frac{d\theta^j}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

3 The Pareto manifold.

The set

$$\{p(x; \theta) | p(x; \theta) = \lambda \mu^\lambda x^{-\lambda-1}, \theta = (\theta^1, \theta^2) = (\lambda, \mu), x > \mu, \lambda > 0, \mu > 0\}$$

is called the Pareto manifold, where

$$p(x; \theta) = \lambda \mu^\lambda x^{-\lambda-1}, x > \mu, \lambda > 0, \mu > 0$$

is the probability density function of the Pareto distribution.

Proposition 3.1. The nonzero component of the α -curvature tensor is given by

$$R_{1212}^{(\alpha)} = \frac{(\lambda^3 - \lambda)\alpha^2 + (-2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha + 3\lambda - 2}{4\lambda\mu^2(1 - \lambda)^2}.$$

Proof. Defining

$$\begin{aligned} l(x; \theta) &= \ln p(x, \theta) \\ &= \ln \lambda + \lambda \ln \mu - (\lambda + 1) \ln x, \end{aligned}$$

then we see that

$$\partial_1 l = \frac{1}{\lambda} + \ln \mu - \ln x, \quad \partial_2 l = \frac{\lambda}{\mu}$$

and

$$\partial_1 \partial_1 l = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad \partial_1 \partial_2 l = \partial_2 \partial_1 l = \frac{1}{\mu}, \quad \partial_2 \partial_2 l = -\frac{\lambda}{\mu^2}.$$

From (2.2), we get the Fisher information matrix

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & -\frac{1}{\mu} \\ -\frac{1}{\mu} & \frac{\lambda}{\mu^2} \end{pmatrix}$$

and

$$\det(g_{ij}) = \frac{1 - \lambda}{\mu^2 \lambda}.$$

Thus the square of the arc length is given by

$$(ds)^2 = \frac{1}{\lambda^2} (d\lambda)^2 - \frac{2}{\mu} d\lambda d\mu + \frac{1}{\mu^2} (d\mu)^2.$$

The inverse matrix of (g_{ij}) is given by

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{1-\lambda} & \frac{\lambda\mu}{1-\lambda} \\ \frac{\lambda\mu}{1-\lambda} & \frac{\mu^2}{\lambda(1-\lambda)} \end{pmatrix}.$$

From (2.6), we can get

$$T_{111} = -\frac{2}{\lambda^3}, \quad T_{121} = T_{211} = T_{112} = \frac{1}{\lambda\mu}, \quad (3.1)$$

$$T_{221} = T_{212} = T_{122} = 0, \quad T_{222} = \frac{\lambda^3}{\mu^3}. \quad (3.2)$$

And from (2.4), we can get

$$\Gamma_{111} = -\frac{1}{\lambda^3}, \quad \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \Gamma_{211} = 0, \quad (3.3)$$

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{1}{2\mu^2}, \quad \Gamma_{222} = -\frac{\lambda}{\mu^3}. \quad (3.4)$$

Then from (2.5), (3.1), (3.2), (3.3) and (3.4), we can get

$$\Gamma_{111}^{(\alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\lambda^3}, \quad \Gamma_{112}^{(\alpha)} = \Gamma_{121}^{(\alpha)} = \Gamma_{211}^{(\alpha)} = -\frac{\alpha}{2\lambda\mu}, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{212}^{(\alpha)} = \Gamma_{122}^{(\alpha)} = \Gamma_{221}^{(\alpha)} = \frac{1}{2\mu^2}, \quad \Gamma_{222}^{(\alpha)} = -\frac{2\lambda + \lambda^3\alpha}{2\mu^3}. \quad (3.6)$$

From (2.8), (3.5) and (3.6), we get

$$\Gamma_{11}^{1(\alpha)} = \frac{2\alpha - \alpha\lambda - 2}{2\lambda(1 - \lambda)}, \quad \Gamma_{11}^{2(\alpha)} = \frac{\mu(\alpha - 2)}{2\lambda^2(1 - \lambda)}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{12}^{1(\alpha)} = \frac{\lambda - \alpha\lambda}{2\mu(1 - \lambda)}, \quad \Gamma_{12}^{2(\alpha)} = \frac{1 - \alpha\lambda}{2\lambda(1 - \lambda)}, \quad \Gamma_{21}^{1(\alpha)} = \frac{\lambda - \alpha\lambda}{2\mu(1 - \lambda)} \quad (3.8)$$

and

$$\Gamma_{21}^{2(\alpha)} = \frac{1 - \alpha\lambda}{2\lambda(1 - \lambda)}, \quad \Gamma_{22}^{1(\alpha)} = -\frac{\lambda^2 + \alpha\lambda^4}{2\mu^2(1 - \lambda)}, \quad \Gamma_{22}^{2(\alpha)} = \frac{\lambda - 2 + \alpha\lambda^2}{2\mu(1 - \lambda)}. \quad (3.9)$$

From (2.7), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) and (3.9), we can get

$$R_{1212}^{(\alpha)} = \frac{(\lambda^3 - \lambda)\alpha^2 + (-2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha + 3\lambda - 2}{4\lambda\mu^2(1 - \lambda)^2}. \quad (3.10)$$

This completes the proof of Proposition 3.1.

Theorem 3.1. The α -Gaussian curvature and the α -Ricci curvatures of the Pareto manifold are given by

$$K^{(\alpha)} = \frac{(\lambda^3 - \lambda)\alpha^2 + (-2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha + 3\lambda - 2}{4(1 - \lambda)^3}$$

and

$$\begin{aligned} R_{11}^{(\alpha)} &= \frac{(\lambda^3 - \lambda)\alpha^2 + (-2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha + 3\lambda - 2}{4\lambda^2(1 - \lambda)^3}, \\ R_{12}^{(\alpha)} &= R_{21}^{(\alpha)} = -\frac{(\lambda^3 - \lambda)\alpha^2 + (-2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha + 3\lambda - 2}{4\mu(1 - \lambda)^3}, \\ R_{22}^{(\alpha)} &= \frac{(\lambda^3 - \lambda)\alpha^2 + (-2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 2)\alpha + 3\lambda - 2}{4\mu^2(1 - \lambda)^3}. \end{aligned}$$

Proof. From the definition 2.6 and 2.7, by a direct calculation, we can obtain Theorem 3.1, immediately.

From Theorem 3.1 we can get the following

Corollary 3.1. When $\alpha = 0$, the Gaussian curvature and the Ricci curvatures satisfy

$$K^{(0)} = \frac{3\lambda - 2}{4(1 - \lambda)^3}$$

and

$$R_{11}^{(0)} = \frac{3\lambda - 2}{4\lambda^2(1 - \lambda)^3}, \quad R_{12}^{(0)} = R_{21}^{(0)} = -\frac{3\lambda - 2}{4\mu(1 - \lambda)^3}, \quad R_{22}^{(0)} = \frac{3\lambda - 2}{4\mu^2(1 - \lambda)^3}.$$

Theorem 3.2. On the Pareto manifold the Kullback divergence is given by

$$K(p, q) = \ln \frac{\lambda_p}{\lambda_q} + \lambda_q \ln \frac{\mu_p}{\mu_q} + \frac{\lambda_q - \lambda_p}{\lambda_p}$$

and the J-divergence is given by

$$J(p, q) = (\lambda_q - \lambda_p)(\ln \mu_p - \ln \mu_q) + \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{\lambda_p \lambda_q}.$$

Proof. From (2.12), we can get

$$\begin{aligned} K(p, q) &= E_{\theta_p} \left[\ln \frac{p(x; \theta_p)}{q(x; \theta_q)} \right] \\ &= \int p(x; \theta_p) \ln \frac{p(x; \theta_p)}{q(x; \theta_q)} dx \\ &= \ln \frac{\lambda_p}{\lambda_q} + \lambda_q \ln \frac{\mu_p}{\mu_q} + \frac{\lambda_q - \lambda_p}{\lambda_p}. \end{aligned}$$

Then from (2.13), we can get

$$\begin{aligned} J(p, q) &= \int (p(x; \theta_p) - q(x; \theta_q)) \ln \frac{p(x; \theta_p)}{q(x; \theta_q)} dx \\ &= K(p, q) + K(q, p) \\ &= (\lambda_q - \lambda_p)(\ln \mu_p - \ln \mu_q) + \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{\lambda_p \lambda_q}. \end{aligned}$$

Corollary 3.2. When $\mu_p = \mu_q$, then

$$K(p, q) = \ln \frac{\lambda_p}{\lambda_q} + \frac{\lambda_q - \lambda_p}{\lambda_p}, \quad J(p, q) = \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^2}{\lambda_p \lambda_q}.$$

When $\lambda_p = \lambda_q = \lambda$, then

$$K(p, q) = \lambda \ln \frac{\mu_p}{\mu_q}, \quad J(p, q) = 0.$$

Theorem 3.3. The geodesic equations are given by

$$\frac{d^2 \lambda}{dt^2} - \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{\lambda}{\mu(1-\lambda)} \frac{d\lambda}{dt} \frac{d\mu}{dt} - \frac{\lambda^2}{2\mu^2(1-\lambda)} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 \mu}{dt^2} - \frac{\mu}{\lambda^2(1-\lambda)} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \frac{d\lambda}{dt} \frac{d\mu}{dt} + \frac{\lambda-2}{2\mu(1-\lambda)} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 = 0. \quad (3.12)$$

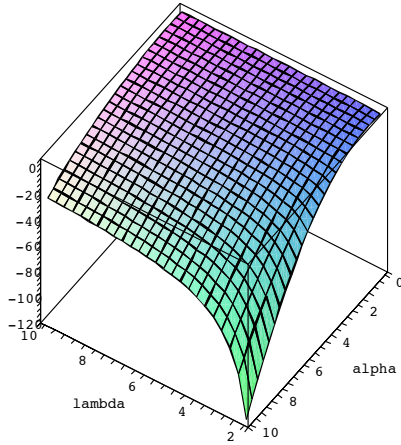
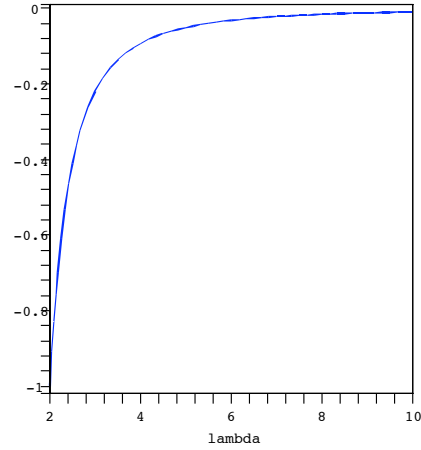
Proof. By the definition 2.9 and using Γ_{ij}^k which we have calculated above, we can get the geodesic equations immediately.

In particular, for fixed λ , from (3.12) we get the solution with respect to μ that $\mu^{\frac{\lambda}{2(\lambda-1)}} = c_1 t + c_2$ or $\mu = \text{constant}$. Similarly, for fixed μ , from (3.11) we get the solution with respect to λ that $\lambda - \ln \lambda = c_3 t + c_4$ or $\lambda = \text{constant}$.

4 Applications.

The Pareto distribution can be used in various fields. J. Shi and H. Zhu ([5]) modeled the TELNET originator traffic by using the Pareto distribution and shown that packet interarrivals of the TELNET originator can be well modeled by Pareto distribution in large time scales. In [6], three modified Edf-type tests, the Kolmogorov-Smirnov (K-S), Anderson-Darling (A-D), and Cramer-von Mises (C-vM), were developed for the Pareto distribution with unknown parameters of location and scale and known shape parameter. In [7], L. Ouyang and S. Wu presented the prediction intervals on future ordered-observation in a sample of size from a Pareto distribution with known shape parameter. Then a useful method was defined for obtaining a bound on life-test duration for sample from a population having Pareto distributed lifetimes.

5 Figures of the Gaussian curvature $K^{(\alpha)}$.

Fig 1. The α -Gaussian curvature $K^{(\alpha)}$ Fig 2. The Gaussian curvature $K^{(0)}$

Acknowledgement. The authors would like to thank the referees for the valuable suggestions. Without their help, we couldn't get the final version.

References

- [1] S. Amari, Differential geometrical methods in statistics, Springer lecture Notes in Statistics, 28 (1985).
- [2] S. Amari, Methods of information geometry, TMM 191, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [3] S. Amari, Differential geometry of a parametric family of invertible linear systems Riemannian metric, dual affine connections and divergence, Mathematical systems theory, 20 (1987b), 53-82.
- [4] C. T. J. Dodson, Spatial statistical and information geometry for parametric statistical models of galaxy clustering, Springer Netherlands, 10 (1999).
- [5] J. Shi and H. Zhu, The application of the Pareto distribution in modeling TELNET originator traffic, Journal of computer research and development, 6 (2000), 746-751.
- [6] James E. Porter III, Joseph W. Coleman and Albert H. Moore, Modified KS, AD, and C-VM tests for the Pareto distribution with unknown location & scale parameters, IEEE transactions on reliability, 1 (1992).

-
- [7] L. Ouyang and S. Wu, Prediction intervals for an ordered observation from a Pareto distribution, IEEE transactions on reliability, 2 (1994).

Linyu Peng

Department of Mathematics
Beijing Institute of Technology
Beijing, 100081 China

e-mail: bityuquansuperman@126.com

Huafei Sun

Department of Mathematics
Beijing Institute of Technology
Beijing, 100081 China

e-mail: sunhuafei@263.net

Lin Jiu

Department of Mathematics
Beijing Institute of Technology
Beijing, 100081 China

e-mail: xinjilonely@gmail.com

Geometry on the space of positive functions

Henryk Gzyl^(*), Lazaro Recht^(**)
^(*)Universidad Simón Bolívar, IESA
^(**)Universidad Simón Bolívar
^(*)hgzyl@reacciun.ve, ^(**)recht@usb.ve

Abstract

This note is devoted to the study of geometric properties and the relationships between a projective space and an exponential class, both naturally associated with the positive elements in a commutative Banach algebra. Even though the motivating problem consists of understanding the geometry of the class of densities with respect to a given measure, the formulation can be carried out in general in a generic commutative Banach algebra set up.

Resumen

Este artículo esta destinado al estudio las propiedades geométricas y las relaciones entre el espacio proyectivo y la clase exponencial, ambas asociadas de manera natural a los elementos positivos en un álgebra conmutativa de Banach. Aunque la motivación del problema consiste en entender la geometría de la clase de densidades respecto de una medida, la formulación se puede realizar en general sobre una álgebra conmutativa de Banach.

1 Introduction and preliminaries

In two previous notes [GR1] and [GR2] we began exploring an intrinsic geometry in the commutative Banach algebra \mathcal{A} consisting of all bounded, measurable, complex valued functions defined on a measure space (S, \mathcal{S}, m) . There we considered separately the finite and infinite dimensional cases. Even though the constructs are the same, in the finite dimensional case it is easy to visualize geometrically what goes on. The original aim was to provide a framework in which curves like

$$\rho(t) = \frac{\rho_0^{1-t} \rho_1^t}{E_m[\rho_0^{1-t} \rho_1^t]}$$

were related to geodesics in some geometry. Here ρ_0 and ρ_1 are densities (positive functions a such that the integral $\int a dm \equiv E_m[a] = 1$). Even though the model

should be kept in mind, from now we assume that \mathcal{A} is a commutative, complex Banach algebra, with a unit, denoted by 1 and a conjugation operation denoted by $*$.

After briefly describing the contents of this paper, we devote the remainder of this section to recalling some basics from [GR1] and [GR2]. In section 2 we study several aspects of the geometry of the projective space \mathbb{P}^+ obtained by identifying the positive elements G^+ in the group G of invertible elements in \mathcal{A} . In particular we shall study the action of an affine group naturally associated to the projection of G^+ onto \mathbb{P}^+ . In particular we relate some vector bundles over \mathbb{P}^+ . In section 3 we take up the concluding comments in [GR1] and explore the geometry of an hyperbolic space which can be regarded as a class of representatives for \mathbb{P} which inherits the geometry from G^+ . In section 4 we conclude the study of the geometry on \mathbb{P}^+ . We direct the reader to the mentioned references for references to the necessary literature.

To describe the geometric structure, we considered in [GR1] and [GR2] the group G of invertible (with respect to the product operation) elements in \mathcal{A} . The group acts on the algebra according to (the right action)

$$L_g(a) = (g^*)^{-1}ag^{-1} = |g|^{-2}a$$

where the middle term stays as is in the non-commutative case. As usual, we shall say that an element a is real or self-adjoint whenever $a = a^*$ and a positive when there is a b such that $a = bb^*$. We shall denote by G^+ the class of positive invertible elements in \mathcal{A} . It is clear the action of G on G^+ is transitive. To obtain G^+ as a homogeneous reductive space the idea was to fix an $a \in G^+$ and define $\pi_a : G \rightarrow G^+$ by $\pi_a(g) = L_g(a)$. In the commutative case the conjugation operation on G is trivial, that is, if $g \in G$ and $C_g(g') = gg'g^{-1} = g'$, but in general the setup is such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{C_g} & G \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow \pi_{L_g(a)} \\ G^+ & \xrightarrow{Lg} & G^+ \end{array}$$

One also defines the isotropy group of $a \in G^+$ by $I_a = \{g \in G \mid L_g(a) = a\}$, and the standard result here is that $G^+ = G/I_a$. This setup makes G^+ a homogeneous space, and (G, G^+, π_a) a fiber bundle with fibers isomorphic to I_a . there is a well established way of defining a connection on G^+ and render (G, G^+, π_a) a homogeneous reductive structure. let us recall the very basics and direct the reader to [KN] for the basics and to [CPR] for the specifics in the general non-commutative case. The basic constructs at this stage are: the tangent space at $1 \in G$ which happens to be \mathcal{A} since G is open in \mathcal{A} , the tangent space to G^+ at a which happens to be \mathcal{A}^s , the symmetric elements in \mathcal{A} . To simplify notations, we shall denote the tangent map induced by π_a by $\tilde{\pi}_a$. The connection 1-form κ_b is defined on G^+ in such a way that $\tilde{\pi}_b \circ \kappa_b = id|_{\mathcal{A}^s}$. Here $\pi_b = \pi_{L_g(a)}$ for some

$g \in G$ which exists due to the transitivity of the action. The differential version of the commutative diagram helps us verify that the construction can be made equivariant starting from $\kappa_a : (TG^+)_a \simeq \mathcal{A}^s \longrightarrow (TG)_1 \simeq \mathcal{A}$, which is defined by $\kappa_a(X) = \frac{1}{2}a^{-1}X$. We leave for the reader to verify that $\tilde{\pi}_a \circ \kappa_a = id|_{\mathcal{A}^s}$. This construction is moved around by means of the group action and an equivariant setup is obtained.

With respect to this connection a geodesic through a_0 with initial speed X happens to be $a(t) = a_0 e^{tX}$. Also given any two points a_0 and a_1 , the geodesic going from a_0 to a_1 in a unit of time is obtained starting with speed $X = \ln\left(\frac{a_1}{a_0}\right)$.

Comment 1.1 *Note that commutativity of \mathcal{A} ensures that a_1/a_0 is well defined and being a positive element in \mathcal{A} , its logarithm is well defined*

Definition 1.1 *Given a differentiable curve $a(t)$ in G^+ , the transport curve $g(t) \in G$ in associated to $a(t)$ is defined to be the solution to the **transport equation***

$$\dot{g}(t) = \kappa_{a(t)}(\dot{a}(t))g(t); \quad g(0) = 1. \quad (1)$$

It is easy to see that $g(t) = (a_0/a(t))^{1/2}$ is the desired solution to (1) and that

Lemma 1.1 *With the notations just introduced, the following holds:*

$$(i) \pi_{a_0}(g(t)) = a(t) \quad \text{and} \quad (ii) \tilde{\pi}_{a(t)}(g^{-1}(t)\dot{g}(t)) = \dot{a}(t).$$

Proof Both assertions are easy to verify. To better understand the second, it is emphasizing that the tangent space to G at g is $g\mathcal{A}$ where \mathcal{A} is the tangent space at 1. \square

What is important at this stage is to realize that parallel transport along a curve $a(t) \in G^+$ is realized by means of the group action of the associated transport curve, and we have

Definition 1.2 *we say that the vector field $X(t)$ along the differentiable curve $a(t) \in G^+$ is parallel if $\tilde{L}_{g(t)}(X(0)) = X(t)$, where $L_{g(t)}(a_0) = a(t)$.*

Comment 1.2 *Note that if $L_g : G^+ \longrightarrow G^+$ then linearity implies that $\tilde{L}_g : (TG^+)_a \longrightarrow (TG^+)_a$ is given by $\tilde{L}_g(X) = L_g(X)$ as in the algebra.*

2 Geometry in \mathbb{P}^+

2.1 \mathbb{P}^+ as a homogeneous space

Let \mathcal{B} be a sub algebra of \mathcal{A} and let $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ be a projection operator satisfying $\Phi_{\mathcal{B}}(ab) = b\Phi_{\mathcal{B}}(a)$ for any $a \in \mathcal{A}$ and $b \in \mathcal{B}$. In our standard model \mathcal{B} can be thought of as a class of functions measurable with respect to a smaller σ -algebra and $\Phi_{\mathcal{B}}$ can be thought of as a conditional expectation, and when $\mathcal{B} = \mathbb{C}$, it can be thought of as an expectation. Let us begin with

Definition 2.1 (a) We shall say that $a \sim_{\mathcal{B}} \tilde{a}$ whenever $\tilde{a}a^{-1} \in \mathcal{B}^+$, or equivalently, (b) when there exists an element $g \in G_{\mathcal{B}}$ such that $\tilde{a} = L_g(a)$. Let (a, X) and (\tilde{a}, \tilde{X}) be elements in TG^+ . (c) We shall say that $(a, X) \sim_{\mathcal{B}} (\tilde{a}, \tilde{X})$ whenever $\tilde{X}/\tilde{a} - X/a \in \mathcal{B}^s$

Comment 2.1 The equivalence of (a) and (b) is left for the reader. Here $G_{\mathcal{B}}$, \mathcal{B}^+ and \mathcal{B}^s denote, respectively, the invertible elements, the positive elements and the self-adjoint (real) elements in \mathcal{B} .

Definition 2.2 Set $\mathbb{P}^+ = G^+ / \sim_{\mathcal{B}}$ and denote by $\Psi : G^+ \longrightarrow G^+ / \sim_{\mathcal{B}}$ the canonical projection mapping.

Notice to begin with that the action of G on G^+ induces an action on \mathbb{P}^+ in the obvious way. We shall denote this action by the same symbol. Let $\alpha = [a] \in \mathbb{P}^+$, an set

$$L_g([\alpha]) = L(\Psi(a)) \equiv \Psi(L_g(a)).$$

To see that this is independent of the representative $a \in [\alpha]$ is standard: Note that

$$L(\Psi(\tilde{a})) = \Psi(L_g(\tilde{a}))\Psi(L_g(L_h(a))) = \Psi(L_h(L_g(a))) = \Psi(L_g(a)).$$

That is, L_g maps ‘‘rays’’ in G^+ onto ‘‘rays’’ in G^+ . To visualize \mathbb{P}^+ as a homogeneous space we need $\alpha_1 = \Psi \circ \pi_a(1)$ and set

$$I_{\alpha_1} = \{g \in G \mid L_g(\alpha_1) = \alpha_1\}.$$

Note that $g \in I_{\alpha_1}$ whenever $(g^*)^{-1}ag^{-1} \sim_{\mathcal{B}} a$ or $g^*g \sim_{\mathcal{B}} 1$ if you prefer. It should perhaps be more accurate to write $I_{\alpha_1} = S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, the \mathcal{B} -similarities of \mathcal{A} . An easy calculation shows that the Lie algebra of I_{α_1} is given by

$$\mathcal{I}_{\alpha_1} = S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{X \in \mathcal{A} \mid X + X^* \in \mathcal{B}\}.$$

The next result renders \mathbb{P}^+ as a homogeneous space, with the obvious group action.

Proposition 2.1 With the notations employed above, $\mathbb{P}^+ \simeq G/S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, where now the quotient denotes the class of cosets of $g \sim_{S(\mathcal{A}, \mathcal{B})} g' \iff g = g'h$ for some $h \in S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Proof Let $[g] \in G/S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ be the class of $g \in G$. Define $p_{\alpha_1} : G \longrightarrow \mathbb{P}^+$ be defined by $p_{\alpha_1}(g) = L_g(\alpha_1)$. Note that if $g \sim_{S(\mathcal{A}, \mathcal{B})} g'$, i.e., $g' = gh$ with $h \in S(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Then

$$p_{\alpha_1}(g') = L_{g'}(\alpha_1) = L_{gh}(\alpha_1) = L_g L_h(\alpha_1) = L_g(\alpha_1) = p_{\alpha_1}(g).$$

That is, the action of the group is constant on the classes of $\sim_{S(\mathcal{A}, \mathcal{B})}$, and it can be naturally transported on to the quotient, that is, the mapping $p_{\alpha_1} : G/S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{P}^+$ can be defined as above. \square

To define the inverse to p_{α_1} , recall that given $\tilde{a} \in G^+$, there exists $g \in G$ such that $\tilde{a} = L_g(a)$. Actually $g = e^{-X/2}$ with $X = \ln(\tilde{a}/a)$. So, let $\tilde{\alpha} \in \mathbb{P}^+$ and set $\pi_{\alpha_1}^{-1}(\tilde{\alpha}) = g$. Again, it is easy to see that this mapping is well defined, for if $\Psi(c) = [\alpha]$ and $\pi_{\alpha_1}^{-1}(\tilde{\alpha}) = g_1$, then $g_1 = gh$

Now that we have obtained \mathbb{P}^+ as a homogeneous space. we can define a connection on it and verify that it admits a homogeneous reductive structure.

Proposition 2.2 *There exists a subspace \mathcal{K} of \mathcal{A} which is an invariant complement for \mathcal{I}_{α_1} which verifies: (i) $\mathcal{K} + \mathcal{I}_{\alpha_1}\mathcal{A}$, (ii) $\mathcal{K} = \text{Ker}(\Phi_{\mathcal{B}}) \cap \mathcal{A}^s$ and (iii) $h\mathcal{K}h^{-1} = \mathcal{K}$ for any $h \in \mathcal{I}_{\alpha_1}$.*

Proof We shall exhibit \mathcal{I}_{α_1} and \mathcal{K} respectively as the kernel and the range of an idempotent mapping on \mathcal{A} . Note that $x + x^* \in \mathcal{B}^s$ is equivalent to $(Id - \Phi_{\mathcal{B}})(\mathfrak{R}(x)) = 0$, where $\mathfrak{R}(x) = (x + x^*)/2$ is a real idempotent on $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ regarded as sub algebra of \mathcal{K} . Note as well that $Id - \Phi_{\mathcal{B}}$ is also an idempotent and that both of these idempotents commute. Therefore $(Id - \Phi_{\mathcal{B}}) \circ \mathfrak{R}$ is an idempotent and its range is a complement for \mathcal{I}_{α_1} , that is $\mathcal{K} \equiv R((Id - \Phi_{\mathcal{B}}) \circ \mathfrak{R})$ satisfies (i).

To verify that $\mathcal{K} = \text{Ker}(\Phi_{\mathcal{B}}) \cap \mathcal{A}^s$ is simple. Let $x \in \mathcal{K}$, then $x = x^*$ and $\Phi_{\mathcal{B}} \circ (Id - \Phi_{\mathcal{B}}) \circ \mathfrak{R} = 0$ trivially. The converse is equally simple.

To verify (iii) is simple in the commutative case and it is left for the reader.

\square

To define a linear connection on \mathbb{P}^+ we proceed as follows. As above let $\alpha_1 = \Psi \circ \pi_{\alpha}(1)$, therefore the tangent map $(dr_{\alpha_1})_1 : \mathcal{A} \longrightarrow (T\mathbb{P}^+)_{\alpha_1}$ is onto with kernel \mathcal{I}_{α_1} . Therefore, the restriction

$$\delta_{\alpha_1} = (dr_{\alpha_1})|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow (T\mathbb{P}^+)_{\alpha_1}$$

is an isomorphism. Define now the 1-form of the connection by

Definition 2.3 *Define*

$$\kappa_{\alpha_1} : (T\mathbb{P}^+)_{\alpha_1} \longrightarrow \mathcal{K} \text{ by } \kappa_{\alpha_1} = (\delta_{\alpha_1})^{-1}. \quad (2)$$

Lemma 2.1 *At any other point $\alpha = L_{\alpha_1} \in \mathbb{P}^+$, set $\delta_{\alpha} = (dr_{\alpha}|_{\mathcal{K}})_1$. Then $\kappa_{\alpha} = Ad_g \circ \kappa_{\alpha_1} \circ L_{g^{-1}}$ is an inverse for δ_{α}*

To compute κ_{α} explicitly consider a differentiable curve $g(t) \in G$ such that $g(0) = 1$ and $\dot{g}(0) = X$. then

$$\frac{d}{dt} r_{\alpha_1}(g(t)) = \frac{d}{dt} (\Psi(g(t)^*)^{-1} a g(t)^{-1}) |_{t=0} = \tilde{\Psi}(a, -(X + X^*)a).$$

The restriction of this mapping to \mathcal{K} provides us with δ_{α_1} . As element of $T\mathbb{P}^+$, $\tilde{\Psi}(a, -(X + X^*)a) = \{(b, w) \mid w/b + (X + X^*) \in \mathcal{B}^s\}$, therefore the obvious candidate for κ_{α_1} is

$$\kappa_{\alpha_1}(b, w) = -\frac{1}{2} (b^{-1} (w - \Phi_{\mathcal{B}}(b^{-1}w))) \quad (3)$$

It is an exercise to verify that $\kappa_{\alpha_1}(b, w) \in \mathcal{K} = \text{Ker}(\Phi_{\mathcal{B}}) \cap \mathcal{A}^s$, that it has the desired properties and that the defining map is independent of the representative chosen.

Definition 2.4 Let $a(t)$ be a differentiable curve in G^+ and $\alpha(t) = \Psi(a(t))$. Let $X(t)$ be a differentiable vector field along $a(t)$ and let us use the same symbol to define its equivalence class in $T\mathbb{P}^+$. The covariant derivative of $X(t)$ is defined to be

$$\frac{DX}{dt} = \delta_{\alpha(t)} \left(\frac{d}{dt} \kappa_{\alpha(t)}(X(t)) \right) \quad (4)$$

2.2 An affine group determined by \mathcal{B}

As at the beginning of this section, let \mathcal{B} be a sub-algebra of \mathcal{A} . We can define an action of the group $G_{\mathcal{B}}^+$ on the real algebra \mathcal{B}^s as follows

$$G_{\mathcal{B}}^+ \times \mathcal{B}^s \longrightarrow \mathcal{B}^s \quad (b, b') \rightarrow bb'. \quad (5)$$

Similarly, we can define an action of \mathcal{B}^s on itself by means of

$$\mathcal{B}^s \times \mathcal{B}^s \longrightarrow \mathcal{B}^s \quad (b, b') \rightarrow b + b'. \quad (6)$$

Definition 2.5 Let us denote by $Af_{\mathcal{B}^s}$ the semi direct product of the multiplicative group $G_{\mathcal{B}}^+$ and the additive group \mathcal{B}^s . The group operation is $(\hat{b}, \hat{b}'), (b, b') = (\hat{b}b, \hat{b}b' + \hat{b}')$.

Comment Notice that \mathcal{B}^s can be thought of as the tangent space to $G_{\mathcal{B}}^+$ at the identity.

That that is a well defined group operation is standard exercise, and it is simple to verify the following

Lemma 2.2 With the notations introduced above and in definition 2.1 we have

(i) The mapping $Af_{\mathcal{B}^s} \times \mathcal{B}^s \rightarrow \mathcal{B}^s$ defined by $(b, b')(b'') = bb'' + b'$ is a well defined action of $Af_{\mathcal{B}^s}$ on \mathcal{B}^s .

(ii) The mapping $Af_{\mathcal{B}^s} \times TG^+ \rightarrow TG^+$, defined by $(b, b')(a, X) = (ba, bX + b'a)$ is a group action.

(iii) The affine group action is compatible with the equivalence relation $\sim_{\mathcal{B}}$.

(iv) $Af_{\mathcal{B}^s}$ acts on $T\mathbb{P}^+$ by means of $(b, b')[a, X] = [(b, b')(a, X)]$, where $[a, X]$ denotes the equivalence class of $(a, X) \in TG^+$ under $\sim_{\mathcal{B}}$.

Proof We shall just sketch the proof of the third assertion. Let $(a, X) \sim_{\mathcal{B}} (\tilde{a}, \tilde{X})$. It is just a computation to verify definition 2.1, namely that

$$(b, b')(a, X) \sim_{\mathcal{B}} (b, b')(\tilde{a}, \tilde{X}),$$

which we leave for the reader to complete. The fourth assertion is clear from this. \square

2.3 Tangent bundles over \mathbb{P}^+

To better understand the apparition of $Af_{\mathcal{B}^s}$ and what comes below, let us go back to definition 2.1, and notice that the equivalence class of $(1, 0)$ with respect to $\sim_{\mathcal{B}}$ is $[1, 0] = \{(b, b') \mid b \in G_{\mathcal{B}}^+, b' \in \mathcal{B}^s\} = Af_{\mathcal{B}^s}$. Thus if we write the tangent space at $1 \in G^+$ as $\mathcal{A}^s = \mathcal{B}^s \oplus V$, then under (the lifting of) Ψ , \mathcal{B}^s projects down to 0. Actually, we have the simple

Lemma 2.3 *With the notations introduced above*

$$[a, X] = \{(b, b')(a, X) \mid (b, b') \in Af_{\mathcal{B}^s}\}.$$

Another way in which \mathcal{B}^s comes up as the part of the tangent bundle which is tangent to the rays is the following. Consider a smooth curve $b(t)$ in $G_{\mathcal{B}}^+$ such that $b(0) = 1$ and derivative $\dot{b}(0) = X \in \mathcal{B}^s$. Then for $a \in G^+$, $b(t)a$ lies along the ray through a , and its tangent is aX . Therefore, we may call the vector bundle introduced below the radial bundle. We have the easy

Lemma 2.4 *Consider the vector bundle*

$$\mathcal{R} = \{(a, X) \in TG^+ \mid a^{-1}X \in \mathcal{B}^s\}$$

which is contained in TG^+ . Then, \mathcal{R} is stable under the action of $G_{\mathcal{B}}^+$.

Recall that the action of $G_{\mathcal{B}}^+$ on G^+ produces \mathbb{P}^+ as quotient space. Let us now examine the equivalence classes of action of $G_{\mathcal{B}}^+$ on TG^+ .

Definition 2.6 *We shall say that $(a, X) \sim_{G_{\mathcal{B}}^+} (a', X')$ whenever there exists $b \in \mathcal{B}^+$ such that $a' = ba$ and $X' = bX$.*

Comments The classes on the action of $G_{\mathcal{B}}^+$ on TG^+ are bigger than those of the action on \mathcal{R}

Lemma 2.5 *The following sequence is exact:*

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{i} TG^+ \xrightarrow{\Psi_*} T\mathbb{P}^+ \rightarrow 0,$$

where i denotes the inclusion mapping.

Proof From the comments above, it is clear that if $(a, X) \in \mathcal{R}$ then $[a, X] = [a, 0]$, of $\mathcal{R} \subset \ker \Psi_*$. The rest is easy. \square

For the next proposition we need the following

Lemma 2.6 *With the notations from above, Ψ_* preserves $G_{\mathcal{B}}^+$.*

Proof If $(a, X) \sim_{G_{\mathcal{B}}^+} (\tilde{a}, \tilde{X})$ or, equivalently; if $(\tilde{a}, \tilde{X}) = b_0(a, X)$ for some $b_0 \in G_{\mathcal{B}}^+$, then $[\tilde{a}, \tilde{X}] = b_0[a, X]$. To see why this is so, notice that according to 2.3

$$\begin{aligned} [\tilde{a}, \tilde{X}] &= \{(b, b')(\tilde{a}, \tilde{X}) \mid (b\tilde{a}, b\tilde{X} + \tilde{a}b') \text{ for } (b, b') \in \text{Af}_{\mathcal{B}^s}\} \\ &= \{b_0(ba, bX + ab') \mid (b, b') \in \text{Af}_{\mathcal{B}^s}\} = b_0[a, X] \end{aligned}$$

from which the conclusion drops out. \square

Proposition 2.3 *There exists a mapping $\hat{\Psi}_*$ such that the following diagram is commutative, and furthermore the lower row is exact.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{i} & TG^+ & \xrightarrow{\Psi_*} & T\mathbb{P}^+ & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{R}/\sim_{G_{\mathcal{B}}^+} & \xrightarrow{i} & TG^+/\sim_{G_{\mathcal{B}}^+} & \xrightarrow{\hat{\Psi}_*} & T\mathbb{P}^+/\sim_{G_{\mathcal{B}}^+} & \rightarrow & 0, \end{array}$$

where the vertical mappings in all cases are the implied quotient mappings.

Proof According to the previous lemma, the last arrow is well defined. The existence of $\hat{\Psi}_*$ is a standard argument when dealing with quotient structures. See [D] or [P]. \square

3 The class $\mathcal{E}_o = \exp \mathcal{K}$

We shall now explore the properties of the class $\mathcal{E}_o = \exp \mathcal{K} = \{\exp^z \mid z \in \mathcal{K}\}$. The original ideas in the non-commutative case can be found in [PR]. This class happens to be isometric with \mathbb{P}^+ and its geometry is easier to deal with. Let us begin with

Proposition 3.1 *With the notations introduced above, any $a \in G^+$ can be uniquely factored as $a = be^z$, with $z \in \mathcal{K}$ and $b \in \mathcal{B}^+$. In other words, the mapping $G^+ = G_{\mathcal{B}}^+ \times \mathcal{K}$, sending a onto (b, z) is a homeomorphism. Certainly $G_{\mathcal{B}}^+$ denotes the positive invertible elements in \mathcal{B} .*

Proof Commutativity readily implies that $a = e^{\ln a} = e^{\Phi_{\mathcal{B}}(\ln a)} e^{\ln a - \Phi_{\mathcal{B}}(\ln a)}$ for $a \in G^+$. \square

Comment 3.1 *One way of thinking about the starting point of the proof is that a is the end point of the geodesic $\gamma(t) = e^{tX}$ that joins $a \in G^+$ to $1 \in G^+$, with initial speed $X = \ln a$. The rest is clear for the decomposition is multiplicative.*

The geometric properties of \mathcal{E}_o are inherited from G^+ . Let us begin with

Proposition 3.2 (a) *The connection on G^+ reduces to \mathcal{E}_o : If $a \in \mathcal{E}_o$ and $X \in (T\mathcal{E}_o)_a$ is tangent to a differentiable curve $c(t)$ in G^+ that passes through a , then $\nabla_X Y \in (T\mathcal{E}_o)_a$.*

(b) *A geodesic of G^+ , which starts tangent to \mathcal{E}_o , remains in \mathcal{E}_o , that is, if $\gamma(t)$ is a geodesic in G^+ such that $\gamma(0) = a \in \mathcal{E}_o$ and $\dot{\gamma}(0) \in (T\mathcal{E}_o)_a$, then $\gamma(t) \in \mathcal{E}_o$ for all t .*

(c) *\mathcal{E}_o is geodesically convex. That is, if c_1 and c_2 are in \mathcal{E}_o , the geodesic in G^+ joining c_1 to c_2 is in \mathcal{E}_o .*

Proof Let us begin with a useful remark: If $Z \in (T\mathcal{E}_o)_a$, then $\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}Z) = 0$. To see why this is clear, let $c(t)$ be a differentiable curve in \mathcal{E}_o such that $c(0) = a$ and $\dot{c}(0) = Z$, therefore $a^{-1}c(t) = e^{X(t)} \equiv \delta(t)$ for some differentiable curve $X(t) \in \mathcal{K}$. Thus $0 = \frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{B}}(\delta(t))_{t=0} = \Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}Z)$.

To prove (a) recall that if X is tangent to $a(t)$ and $Y(t)$ is tangent to \mathcal{E}_o in a neighborhood of a , then $\nabla_X Y = \frac{d}{dt}Y - a^{-1}XY$. Multiply by a^{-1} both sides and keep in mind that $X = \dot{a}$, then

$$\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}) = \Phi_{\mathcal{B}}\left(a\frac{dY}{dt} - a^{-1}\dot{a}a^{-1}Y\right) = \frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}Y) = 0.$$

(b) Let now $\gamma(t) = a_0 e^{tX} = e^{\xi_0 + tX}$ be a geodesic in G^+ such that $\gamma(0) = e^{\xi_0} \in \mathcal{E}_o$ and $\Phi_{\mathcal{B}}(\gamma(0)^{-1}\dot{\gamma}) = \Phi_{\mathcal{B}}(X) = 0$. Therefore $\gamma(t) \in \mathcal{E}_o$.

(c) Let $c_1 = e^{Z_1}$ and $c_2 = e^{Z_2}$ be such that $Z_1, Z_2 \in \mathcal{K}$. We saw in section 1 that the geodesic in G^+ through these points is $c(t) = c_1 e^{t \ln(c_2/c_1)} = \exp(Z_1 + t(Z_2 - Z_1)) \in \mathcal{E}_o$. \square We also have

Proposition 3.3 *The restriction $\Psi|_{\mathcal{E}_o} : \mathcal{E}_o \rightarrow \mathbb{P}^+$ is a diffeomorphism.*

Proof Note first that $\Psi|_{\mathcal{E}_o}$ is bijective. If $e^X \sim e^Y$, with $X, Y \in \mathcal{K}$, then there exists $b \in \mathcal{B}^+$ such that $e^X = be^Y$. By the uniqueness of the factorization, $b = 1$ and $X = Y$. Also, if $\Psi(a) \in \mathbb{P}^+$ for some $a \in G^+$, then $a = be^X$ and therefore $a \sim e^X$ and we have produced an $X \in \mathcal{K}$ such that $\Psi(e^X) = \Psi(a)$.

Clearly, the mapping is continuous and has inverse $\mathbb{P}^+ \rightarrow \mathcal{E}_o$ given by $\Psi(a) \rightarrow e^X$. To verify the continuity of the inverse mapping, assume that a_n and $a \in G^+$, are such that $\Psi(a_n) \rightarrow \Psi(a)$. This means that there exists a sequence $b_n \in \mathcal{B}^+$ such that $b_n a_n \rightarrow a$. Now let $a_n = d_n e^{X_n}$ and $a = de^X$. Therefore $b_n d_n e^{X_n} \rightarrow de^X$ which implies that $X_n \rightarrow X$. \square

and we finish with

Proposition 3.4 *The mapping $\Psi : G^+ \rightarrow \mathbb{P}^+$ is a fiber bundle.*

Proof Suffices to exhibit a global section, namely

$$\mathbb{P}^+ \rightarrow \mathcal{E}_o \subset G^+; \quad \text{given by } \Psi(a) \rightarrow e^X$$

where $a = be^X$ with $b \in \mathcal{B}^+$ and $X \in \mathcal{K}$. \square

4 The geometry on \mathbb{P}^+ concluded

In the previous section we saw how the geometry of G^+ restricts well to \mathcal{E}_o . We shall now see how to obtain the geometry of \mathbb{P}^+ from that of \mathcal{E}_o . The diffeomorphism $\Psi|_{\mathcal{E}_o} : \mathcal{E}_o \longrightarrow \mathbb{P}^+$ yield a linear isomorphism

$$\tilde{\Psi}|_{\mathcal{E}_o} : (T\mathcal{E}_o)_a \longrightarrow (T\mathbb{P}^+)_{\alpha}$$

where of course, $\alpha = \Psi(a)$. Also recall that

$$\begin{aligned} (T\mathbb{P}^+)_{\alpha} &= \left\{ (a, X) \in G^+ \times \mathcal{A}^s \mid (a, X) \sim (\tilde{a}, \tilde{X}) \right. \\ &\quad \left. \iff \tilde{a}a^{-1} \in \mathcal{B}^+ \text{ and } \tilde{X}/\tilde{a} - X/a \in \mathcal{B}^s \right\}. \end{aligned}$$

Let us denote by $\|a\|$ the norm in \mathcal{A} , and begin with

Definition 4.1 For $(a, X) \in (T\mathbb{P}^+)_{\alpha}$ define the (projective) norm

$$\|(a, X)\|_{\Phi_{\mathcal{B}}} = \inf \left\{ \|\tilde{X}\|_{a, \Phi_{\mathcal{B}}} \mid (\tilde{a}, \tilde{X}) \sim (a, X) \right\} \quad (7)$$

where

$$\|\tilde{X}\|_{a, \Phi_{\mathcal{B}}} \equiv \|a^{-1/2} X a^{-1/2}\|_{\Phi_{\mathcal{B}}} \equiv \|\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-2} X^2)\|^{1/2}$$

Proposition 4.1 With the same notation as above, the mapping

$$\Psi|_{\mathcal{E}_o} : \mathcal{E}_o \longrightarrow \mathbb{P}^+$$

is isometric.

Proof Let (a, X) be a representative of the class of a tangent vector at $(T\mathbb{P}^+)_{\alpha}$, where $\alpha = \Psi(a)$. Since $\Psi|_{\mathcal{E}_o} : \mathcal{E}_o \longrightarrow \mathbb{P}^+$ is a diffeomorphism, there exists a pair (c, V) with $c \in \mathcal{E}_o$ and $V \in (T\mathcal{E}_o)_c$, such that $(a, X) \sim (c, V)$. Recall that $(T\mathcal{E}_o)_c = \{Y \in \mathcal{A} \mid Y = Y^*, \text{ and } \Phi_{\mathcal{B}}(c^{-1}Y) = 0\}$. Then $V/c - X/a \in \mathcal{B}^s$ or

$$V/c - X/a = \Phi_{\mathcal{B}}(V/c - X/a) = -\Phi_{\mathcal{B}}(X/a)$$

or $V/c = X/a - \Phi_{\mathcal{B}}(X/a)$ and therefore

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{B}}(c^{-2}V^2) &= \Phi_{\mathcal{B}}(a^{-2}X^2) - 2\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}X\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}X)) + (\Phi_{\mathcal{B}}(a^{-1}X))^2 \\ &= \Phi_{\mathcal{B}}(a^2X^2) - (\Phi_{\mathcal{B}}(a^1X))^2 \leq \Phi_{\mathcal{B}}(a^{-2}X^2). \end{aligned}$$

That is $\|V\|_{c, \Phi_{\mathcal{B}}} \leq \|\Phi_{\mathcal{B}}(a^2X^2)\|^{1/2}$ holds for any pair $(a, X) \sim (c, V)$, or in other words $\|V\|_{c, \Phi_{\mathcal{B}}} \leq \|(V)\|_{\Psi(c), \Phi_{\mathcal{B}}}$.

The converse inequality is proved similarly. \square

Let us now verify that the connection on \mathbb{P}^+ transported from \mathcal{E}_o by means of $\Psi|_{\mathcal{E}_o}$ coincides with the connection defined in section 2 by means of the reductive structure. Let us begin by explicitly computing the idempotent $\kappa_\alpha \circ \delta_\alpha$ for $\alpha = \Psi(a) \in \mathbb{P}^+$. For $X \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \circ \delta_\alpha(X) &= \kappa_\alpha(a, -(X + X^*)a) = \frac{1}{2}(Id - \Phi_{\mathcal{B}})(a^{-1}(X + X^*)a) \\ &= \frac{1}{2}(X + X^* - \Phi_{\mathcal{B}}(X + X^*)). \end{aligned}$$

Proposition 4.2 *The diffeomorphism $\Psi|_{\mathcal{E}_o}$ preserves linear connections.*

Proof Let $X(t)$ be a tangent field to \mathbb{P}^+ along a differentiable curve $\alpha(t)$. Let us denote by D^r/dt the covariant derivative determined by the reductive connection and denote by D^Ψ/dt the connection induced by $\Psi|_{\mathcal{E}_o}$. In order to compare them, we shall use κ_α to translate both to \mathcal{A} (regarded as tangent space to G at 1). Let $V(t)$ be a vector field in \mathcal{E}_o along the curve $(\Psi|_{\mathcal{E}_o})^{-1}(\alpha(t)) \equiv c(t)$, that is

$$X(t) = (\tilde{\Psi})_{c(t)}(V(t)).$$

Being tangent to \mathcal{E}_o , $V(t)$ verifies $\Phi_{\mathcal{B}}(c(t)^{-1}V(t)) = 0$. Therefore

$$\kappa_\alpha \left(\frac{D^r X}{dt} \right) = \kappa_\alpha \circ \delta_\alpha \left(\frac{d}{dt} \kappa_\alpha(X(t)) \right),$$

and now note that $\kappa_\alpha(X(t)) = \kappa_\alpha(\tilde{\Psi})_{c(t)}(V(t)) = \frac{c(t)^{-1}}{2}V(t)$. Then

$$\frac{d}{dt} \kappa_\alpha(X(t)) = \frac{1}{2}c(t)^{-2}\dot{c}(t)V(t) - \frac{1}{2}c(t)^{-1}\dot{V}(t).$$

Using the computation carried out above for $\kappa_\alpha \circ \delta_\alpha$ with $a(t) = c(t)$ we obtain

$$\kappa_\alpha \left(\frac{D^r X}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(c(t)^{-2}\dot{c}(t)V(t) - c^{-1}\dot{V}(t) \right)$$

because $\Phi_{\mathcal{B}}(c(t)^{-2}\dot{c}(t)V(t) - c^{-1}\dot{V}(t)) = \frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{B}}(c^{-1}V) = 0$. On the other hand

$$\frac{D^\Psi X}{dt} = \tilde{\Psi}_{c(t)} \left(\frac{D^{\mathcal{E}_o} X}{dt} \right) = \tilde{\Psi}_{c(t)} \left(\dot{V}(t) - c^{-1}\dot{c}(t)V(t) \right).$$

Now apply κ_α to both sides to obtain

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \left(\frac{D^\Psi X}{dt} \right) &= -\frac{1}{2}c^{-1} \left(\dot{V}(t) - c^{-1}\dot{c}(t)V(t) \right) - \Phi_{\mathcal{B}} \left(c^{-1} \left(\dot{V}(t) - c^{-1}\dot{c}(t)V(t) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(c(t)^{-2}\dot{c}(t)V(t) - c^{-1}\dot{V}(t) \right) \end{aligned}$$

for exactly the same reasons as in the previous computation. \square

The following corollary, the proof of which is for the reader, asserts that \mathbb{P}^+ inherits geometric properties from G^+ via \mathcal{E}_o .

Corollary 4.1 *The Finsler metric defined in section 1, \mathbb{P}^+ inherits the following properties from \mathcal{E}_o :*

(i) *Any two points in \mathbb{P}^+ are joined by a unique geodesic, which is the shortest possible curve in \mathbb{P}^+ with such end points.*

(ii) *If $\alpha_1(t)$ and $\alpha_2(t)$ are two geodesics in \mathbb{P}^+ , and $d(a, b)$ denotes the distance in the Finsler metric, then the mapping $t \rightarrow d(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ is a convex function.*

(iii) *If $\alpha = \Psi(a)$ and $\beta = \Psi(b)$, with $a, b \in \mathcal{E}_o$, then the unique geodesic joining them is given by*

$$\gamma_{\alpha, \beta} = \Psi(a^{1-t}b^t).$$

References

- [D] Dugundji, J. “*Topology*” Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [GR1] Gzyl, H. and Recht, L. “*A geometry in the space of probabilities I: The finite dimensional case*” To appear in *Revista Iberoamericana de Matematicas*, 2006.
- [GR2] Gzyl, H. and Recht, L. “*A geometry in the space of probabilities II: Projective spaces and exponential families*” To appear in *Revista Iberoamericana de Matematicas*, 2006.
- [KN] Kobayashi, S and Nomizu, K. “*Foundations of Differential Geometry*” Vol. II, Interscience publishers, New York, (1969).
- [P] Porteous, I. “*Topological geometry*” Van Nostrand Reinhold, London, 1969.
- [PR] Porta, H. and Recht, L. “*Exponential sets and their geometric motions*” *J. Geometric Analysis* **6** (1996) pp.277-285.

A mathematical model for core-annular fluids with surfactants

Said Kas-Danouche

Departamento de Matemáticas.

Universidad de Oriente. Núcleo de Sucre.

skasdano@sucre.udo.edu.ve

Abstract

We investigate the influence of surfactants in core-annular fluids without basic flow. The surfactant is considered insoluble in both film and core fluids. We derive a complete problem and obtain an asymptotic solution which consists of a system of two coupled non-linear partial differential equations. One describing the evolution of the interface and the other, the evolution of the surfactant concentration throughout the interface.

Resumen

Investigamos la influencia de surfactantes en fluidos centro-anulares en ausencia de flujo básico. El surfactante se considera insoluble tanto en el líquido anular como en el central. Derivamos un problema completo y obtenemos una solución asintótica del mismo, que consiste de un sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Una para la evolución de la interfaz y la otra para la evolución de la concentración de surfactantes a lo largo de la interfaz.

Key words. core-annular flow, surfactants, interfacial tension.

Palabras claves. flujo centro-anular, surfactantes, tensión interfacial.

AMS subject classifications. 35Q35, 76E17, 76T99

1 Introduction

If a liquid displaces another one that initially is contained in a capillary cylinder, a layer of the first fluid remains coating the cylinder walls (Taylor [12], 1961). **Core-annular flows** are parallel flows of immiscible fluids inside a cylinder. A fluid is at the center of the cylinder and the others in successive annuli that surround the core. An important application to the oil industry is

lubricated pipelining, where the annular liquid lubricates the core liquid movement. Also, the core-annular flows occur during the liquid-liquid displacements in porous media, and in lung airways since the internal surfaces of them are coated with a thin layer of liquid.

There are several studies related to core-annular flows for interfaces free of surfactants. Goren ([4], 1962) found that an annular film is unstable in the presence of infinitesimal sinusoidal disturbances. He studied the linear stability of an annular film that coats the internal surface of a cylinder when the core fluid is inviscid or the surface of a wire when the ambient is inviscid.

A non-linear analysis for the adjustment, under surface tension, of a thin annular film, was developed by Hammond ([7], 1983) based on lubrication theory indicating that an initial sinusoidal disturbance of the interface could lead to the rupture of the film in the form of axisymmetric drops or “lenses” of the annular liquid separated by the core fluid. Later, Gauglitz and Radke ([3], 1988) developed an alternative approximation based on Hammond’s analysis, including the exact expression of the curvature in the theory used by Hammond. Thus, the approximate equation reduces to the Young-Laplace’s equation (see Adamson [1], 1976) for capillary static in regions where the fluid is almost static, and acts as the usual evolution equation when the film is thin. They found a critical thickness which marks the transition between films that evolve into collars and those that brakeup to form liquid lenses.

On the other hand, the presence of surfactant on a fluid-fluid interface can have a substantial effect on the evolution of the interface (Edwards, Brenner and Wasan [2], 1991). There are two known ways how surfactants affect the interfacial dynamic. One way is reducing the interfacial tension; i.e. the surface tension on an interface without surfactants is bigger than the surface tension on an interface with surfactants. The other way is introducing the Marangoni force caused by the presence of a gradient in the surfactant concentration. This is a force directed from regions of high surfactant concentration to regions of low surfactant concentration through the interface. In general, the Marangoni force acts to oppose any external flow that promotes accumulation of surfactant throughout the interface.

Applications to pulmonary fluid dynamics have been the motivation of most of the works on the effects of surfactants on core-annular flows. A thin liquid film coats the internal walls of the airways forming a liquid-air interface. The interfacial tension tries to minimize the interfacial area, so a collapse of the fine airways could happen due to the formation of a meniscus (from the liquid) while exhalation is in process. The biological surfactants tend to reduce the interfacial tension decreasing the attractive force between the film molecules. This way, surfactants have a stabilizing effect which prevent the collapse and keep the airways open. Halpern and Grotberg ([5], 1992) considered the stability, including the effect of surfactants, in a flexible cylinder. In ([6], 1993), they

developed a nonlinear model taking into account the fluid mechanic of the film, the equation of motion of the tube and the transport equation. They concluded that surfactant convection has the effect of reducing the surface tension which prevent the meniscus formation.

Kas-Danouche, Papageorgiou and Siegel ([8], 2004) solved the problem of two fluids with a core-annular configuration inside a cylindrical tube with rigid walls. In the problem, they considered a pressure gradient (basic flow) and the presence of insoluble surfactants at the interface.

In this article, we explore the influence of surfactants on a core-annular configuration in the absence of the pressure gradient. The core liquid is surrounded by another (annular) liquid. We assume that the surfactant is insoluble in both the film and the core. Physically, this corresponds to surfactants that have a very low solubility in the film and core fluids. So, the surfactant remains at the interface between the two fluids.

Here, as in ([8], 2004), we employ asymptotic analysis to derive very carefully a system of two coupled nonlinear partial differential equations that govern the evolution of the interface and the surfactant concentration.

2 Physical Problem and Governing Equations

We consider an annular liquid film, which we call fluid 2, that surrounds a cylindrical core fluid, which we call fluid 1, infinitely long inside a cylindrical horizontal tube of radius R . The internal surface of the tube is coated by the liquid film. The fluid 1 has an undisturbed radius b and viscosity μ_1 . The viscosity of fluid 2 is μ_2 . The gravitational effects are neglected (Hammond [7], 1983); i.e., the gravity does not appreciably change the shape of the interface.

Also, we consider that at the interface between the two fluids there are surfactants. The surfactant concentration, given in units of surfactant mass per unit of interfacial area, is denoted by Γ^* . The relationship between the interfacial tension σ and the surfactant concentration is given by the surface equation of state for the interfacial tension (Edwards, Brenner, and Wasan [2], 1991, Milliken, Stone, and Leal [10], 1993, and Stone and Leal [11], 1990)

$$\sigma \equiv \sigma(\Gamma) = \sigma_o + \Re T \Gamma_\infty \ln(1 - \Gamma), \quad (1)$$

where σ_o is the interfacial tension of the clean (without surfactant) interface, \Re is the ideal gas constant and T is the temperature. The dimensionless surfactant concentration is given by $\Gamma = \frac{\Gamma^*}{\Gamma_\infty}$, where Γ_∞ is the maximum packing concentration that the interface can support. Expanding $\ln(1 - \Gamma)$ in Taylor series about $\Gamma = 0$ we obtain the linear relation between the interfacial tension σ and the surfactant concentration Γ expressed as follows

$$\sigma(\Gamma) = \sigma_o(1 - \beta\Gamma), \quad (2)$$

where $\beta = \frac{\Re T \Gamma_\infty}{\sigma_o}$ and σ_o , \Re , T , Γ_∞ , and Γ are defined as before. Expression (2) is expected to hold in the dilute Γ limit. Even though this appears to be a restrictive assumption, our asymptotic solution is developed for small surfactant variations about a uniform state, in which instance (2) is the appropriate starting point.

We use cylindrical coordinates $\vec{x} = (r, \theta, z)$ with associated velocity components $\vec{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ for the core and $\vec{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ for the film. Let $h(z, t)$ be the typical thickness of the film, we define $S(z, t)$, the interface, as

$$S(z, t) = R - h(z, t), \quad (3)$$

where R is the tube radius.

For the evolution of the interface we start from the **Navier-Stokes** equations for axisymmetric flows with kinematic viscosity and pressure ν_1 , p_1 for the core and, kinematic viscosity and pressure ν_2 , p_2 for the film. We consider both regions with the same density ρ .

In order to complete the mathematical model, we require a no slip condition at the tube wall $\vec{u}_2 = 0$, continuity of velocity at the interface $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, kinematic condition which take the form

$$u_i = \frac{\partial S}{\partial t} + w_i \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (4)$$

where $i = 1, 2$. Also, we require normal stress balance

$$[\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}]_1^2 = \sigma \nabla_s \cdot \vec{n} \quad (5)$$

and tangential stress balance

$$[\vec{t} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}]_1^2 = -\nabla_s \sigma \cdot \vec{t}, \quad (6)$$

where $[\cdot]_1^2 = (\cdot)_2 - (\cdot)_1$, $\underline{\underline{T}}$ is the stress tensor, ∇_s is the surface gradient operator, \vec{n} the normal unit vector, and \vec{t} the tangential unit vector.

Now, for the evolution of surfactant concentration, we start from the convective-diffusion equation for surfactant transport (Wong, Rumschitzki and Maldarelli [14], 1996)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \nabla_s \Gamma + \nabla_s (\Gamma u_s) - D_s \nabla_s^2 \Gamma + \Gamma \kappa \vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (7)$$

where κ is the surface curvature and D_s is the diffusivity constant. Using the surface gradient operator ∇_s , surface divergence operator $\nabla_s \cdot$, the surface Laplacian operator ∇_s^2 (Wheeler and McFadden [13], 1994 and Kas-Danouche [9], 2002), and parameterizing the interface in terms of θ and z ; i.e., we write $\vec{x} \equiv \vec{x}(\theta, z)$, we obtain:

The **normal stress balance**

$$\begin{aligned} \left\{ -p + \frac{2\mu_i}{1+(S')^2} \left[(S')^2 \frac{\partial w}{\partial z} - S' \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right\}_1^2 &= \\ &= \frac{\sigma(\Gamma)}{S\sqrt{1+(S')^2}} \left\{ 1 - \frac{SS''}{1+(S')^2} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

where $i = 1, 2$.

The **tangential stress balance**

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\mu_i}{1+(S')^2} \left[2S' \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (1-(S')^2) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\}_1^2 &= \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+(S')^2}} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{aligned} \quad (9)$$

where $i = 1, 2$.

The **convective-diffusion equation for surfactant transport**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\dot{S}S'}{1+(S')^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{S\sqrt{1+(S')^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{S\Gamma}{\sqrt{1+(S')^2}} (w + S'u) \right] \right\} \\ - D_s \frac{1}{S\sqrt{1+(S')^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S}{\sqrt{1+(S')^2}} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \\ + \frac{\Gamma}{S(1+(S')^2)} \left[1 - \frac{SS''}{1+(S')^2} \right] (-S'w + u) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

3 Non-dimensionalization Process

We non-dimensionalize using the tube radius R as the length unit, the interfacial tension σ_0 in the absence of surfactant, the film viscosity μ_2 and the surfactant uniform concentration Γ_0 . Γ_0 is considered as the surfactant concentration at the interface in the absence of any movement of the fluids.

This way, we re-scale the pressure with σ_0/R , velocities with σ_0/μ_2 , time with $\mu_2 R/\sigma_0$, and the concentration of surfactant with Γ_0 . In what follows we write the dimensionless equations of our model. For the Navier-Stokes equations, the non-dimensionalization process introduces the **Reynolds number** (Re) which is defined as $Re = \sigma_0 \rho R / \mu_2^2$. The non-dimensionalization of the transport equation produces the **Peclet number** (Pe) which is given by $Pe = \sigma_0 R / (\mu_2 D_s)$. We are using the same notation for the dimensional and non-dimensional variables.

The **non-dimensional Navier-Stokes and continuity** equations are

$$Re [(w_i)_t + w_i(w_i)_z + u_i(w_i)_r] = -(p_i)_z + \frac{\mu_i}{\mu_2} \nabla^2 w_i \quad (11)$$

$$Re [(u_i)_t + w_i(u_i)_z + u_i(u_i)_r] = -(p_i)_r + \frac{\mu_i}{\mu_2} \left(\nabla^2 u_i - \frac{u_i}{r^2} \right) \quad (12)$$

$$(w_i)_z + \frac{1}{r} (ru_i)_r = 0, \quad (13)$$

with $i = 1$ for the core and $i = 2$ for the film, where

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad \text{and} \quad Re = \sigma_0 \rho R / \mu_2^2. \quad (14)$$

The **non-dimensional normal stress balance** equation is

$$\begin{aligned} \left\{ -p + \frac{2\lambda_i}{1 + (S')^2} \left[(S')^2 \frac{\partial w}{\partial z} - S' \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \right] \right\}_1 &= \\ &= \frac{\sigma(\Gamma)}{S\sqrt{1 + (S')^2}} \left\{ 1 - \frac{SS''}{1 + (S')^2} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

where $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_2}$, $i = 1, 2$.

The **non-dimensional tangential stress balance** equation is

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\lambda_i}{1 + (S')^2} \left[2S' \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (1 - (S')^2) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\}_1 &= \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 + (S')^2}} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{aligned} \quad (16)$$

where $\lambda_i = \frac{\mu_i}{\mu_2}$, $i = 1, 2$.

Finally, the **non-dimensional convective-diffusion equation for the surfactant transport** is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\dot{S}S'}{1 + (S')^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{S\sqrt{1 + (S')^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{S\Gamma}{\sqrt{1 + (S')^2}} (w + S'u) \right] \right\} \\ - \frac{1}{P_e} \frac{1}{S\sqrt{1 + (S')^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S}{\sqrt{1 + (S')^2}} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \\ + \frac{\Gamma}{S(1 + (S')^2)} \left[1 - \frac{SS''}{1 + (S')^2} \right] (-S'w + u) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

where $P_e = \frac{\sigma_0 R}{\mu_2 D_s}$.

4 Derivation of the Model

Here, we take advantage of the film thickness relative to the core thickness and derive a coupled system of two approximated evolution equations. One equation describes the evolution of the interface between the two fluids, and the other one describes the evolution of surfactant concentration at the interface. In the **non-dimensional unperturbed state** the tube radius is 1 and the distance from the tube wall to the interface is $\varepsilon = a/R \ll 1$, where $h(z, t) = aH(z, t)$ and $a = R - b$.

At the film, we define the radial component of a point as $r = 1 - \varepsilon y$, where y is 0 at the tube wall and $H(z, t)$ on the interface. The axial component is defined as $z = \hat{z}$. Thus,

$$\frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial r} \longrightarrow -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (18)$$

From the continuity condition we know that, in order to balance both terms, the order of u_2 must equals ε times the order of w_2 . From the first momentum equation (11) for $i = 2$, we find the order of w_2 . But before that we look for the order of pressure. Let \bar{p}_1 , \bar{p}_2 , \tilde{p}_1 , and \tilde{p}_2 be the basic state pressure in region 1 which is the core fluid, the basic state pressure in region 2 which is the film, the perturbed pressure in region 1 and the perturbed pressure in region 2, respectively. Then,

$$p_1 = \bar{p}_1 + \tilde{p}_1 \quad (19)$$

$$p_2 = \bar{p}_2 + \tilde{p}_2. \quad (20)$$

First, let us consider that the core is a non-viscous fluid, then, $\lambda_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0$. The pressure of the core fluid is constant and, by a convenient choice of reference pressure, $p_1 = 0$ ($\bar{p}_1 = \tilde{p}_1 = 0$). Let us consider the asymptotic expansion of the Navier-Stokes equation (11) in the film and $Re \sim O(1)$. Balancing the pressure with the leading order term ($\partial^2 w_2 / \partial r^2$), we obtain

$$\tilde{p}_2 \sim \frac{1}{\varepsilon^2} (\text{order of } w_2). \quad (21)$$

The basic state for the surfactant concentration Γ is taken as a uniform covering of the interface, which in dimensionless terms is given by $\Gamma = 1$. Therefore, the perturbed surfactant concentration can be expressed by $\Gamma = 1 + \tilde{\Gamma}$, where $\tilde{\Gamma}$ is the perturbation of the surfactant concentration. The dimensionless interfacial tension is $\sigma(\Gamma) = 1 - \beta\Gamma$ and so, the basic state of the interfacial tension is $\sigma(\Gamma) = 1 - \beta$. All the left hand side terms of the normal stress balance equation (15), are of order w_2 , except the pressure p_2 . Due to (21), \bar{p}_2 and \tilde{p}_2 are the

leading order terms of the left hand side of (15). In the right hand side of (15) we have $1 - \beta + O(\varepsilon)$. Thus

$$\bar{p}_2 = \beta - 1 \sim O(1) \quad (22)$$

$$\tilde{p}_2 \sim O(\varepsilon). \quad (23)$$

4.1 Derivation of the Interface Evolution Equation

Now, let us assume that $\lambda_1 > 0$, but not too big. The asymptotic expansion of the Navier-Stokes equation (11) in the core and $Re \sim O(1)$ give us

$$\tilde{p}_1 \sim \text{order of } u_1. \quad (24)$$

The continuity of the axial velocity at the interface produces order of $w_1 =$ order of w_2 . Therefore, order of $\tilde{p}_1 \ll$ order of \tilde{p}_2 .

Similarly, all the left hand side terms of the normal stress balance equation (15), are of the order of w_2 , except the pressures which are the leading order terms in the left hand side. In the right hand side of (15) we have $1 - \beta + O(\varepsilon)$. Then, $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 1 - \beta$ and $\tilde{p}_2 \sim O(\varepsilon)$.

Therefore, $w_2 \sim O(\varepsilon^3)$ and $u_2 \sim O(\varepsilon^4)$. The continuity of the axial velocity at the interface implies that $w_1 \sim O(\varepsilon^3)$, the axial velocity in the core. Thus, in the left hand side of Navier-Stokes equation (11), in order to balance the second and third terms, we have $u_1 \sim O(\varepsilon^3)$. By (24) we have that $\tilde{p}_1 \sim O(\varepsilon^3)$, and from the tangential stress balance equation (16) we need that $\lambda_1 \ll \frac{1}{\varepsilon}$ for the core to decouple from the film.

In what follows, we look for the time scale. Let us consider (4), the kinematic condition, u and $w \frac{\partial S}{\partial z}$ are of order ε^4 ; therefore, $\frac{\partial S}{\partial t} \sim O(\varepsilon^4)$. Since $\frac{\partial S}{\partial t} = -\varepsilon H_t(z, t)$, we have that $H_t \sim O(\varepsilon^3)$. This motivates the introduction of the scaled variable for time $\tau = \varepsilon^3 t$ such that

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (25)$$

Continuing in this way and keeping only the leading order terms in (11) for $i = 2$, we obtain $(\tilde{u}_2)_{yy} = (\tilde{p}_2)_z$; but, from the second momentum equation (12) for $i = 2$, we have $p_y \sim O(\varepsilon^3)$. So, $\tilde{p}_2 \equiv \tilde{p}_2(z)$ is not a function of y in the resulting equation retaining the leading order terms. Therefore, we can integrate twice with respect to y and apply $\tilde{w}_2(0) = 0$ (no slip at the tube wall) to obtain

$$\tilde{u}_2(y) = \frac{1}{2}(\tilde{p}_2)_z y^2 + A(z)y. \quad (26)$$

However, keeping the leading order terms $\frac{1}{\varepsilon}(w_2)_y$ and $\beta \Gamma_z$ in the tangential stress balance (16), we obtain

$$\frac{1}{\varepsilon}(w_2)_y = \beta \Gamma_z, \quad (27)$$

but, $(w_2)_y \sim O(\varepsilon^3)$. Choosing $\beta = \varepsilon^2 \beta_o$, we have $(\tilde{w}_2)_y = \beta_o \Gamma_z$. Now, using (26) we find

$$A(z) = \beta_o \Gamma_z - (\tilde{p}_2)_z H. \quad (28)$$

Thus,

$$(\tilde{w}_2)(y) = \frac{1}{2} (\tilde{p}_2)_z y^2 + (\beta_o \Gamma_z - (\tilde{p}_2)_z H) y. \quad (29)$$

On the other hand, using the condition of normal stress balance (15) we find the pressure. Firstly, we take the terms of $O(1)$ and obtain $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 1 - \beta$. In the next step, we take the terms of $O(\varepsilon)$ obtaining $\tilde{p}_2 = -H_{zz} - H$. Therefore, \tilde{w}_2 becomes

$$(\tilde{u}_2)(y) = -\frac{1}{2} (H_{zzz} + H_z) y^2 + [\beta_o \Gamma_z + (H_{zzz} + H_z) H] y. \quad (30)$$

Now, using the continuity condition (13) for $i = 2$ and the scales for w_2 , u_2 and r , we obtain considering only leading order terms

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y}. \quad (31)$$

So, differentiating \tilde{w}_2 with respect to z and integrating it with respect to y , we find an expression for \tilde{u}_2

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= -\frac{1}{6} (H_{zzzz} + H_{zz}) y^3 + \frac{1}{2} \beta_o \Gamma_{zz} y^2 + \frac{1}{2} (H_{zzzz} + H_{zz}) H y^2 \\ &+ \frac{1}{2} (H_{zzz} + H_z) H_z y^2. \end{aligned} \quad (32)$$

In order to obtain the evolution equation for H , we consider the kinematic equation (4) and the fact that

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\varepsilon H_t = -\varepsilon^4 H_\tau \\ \frac{\partial S}{\partial z} &= -\varepsilon H_z. \end{aligned}$$

Then,

$$\tilde{u}_2 = -H_\tau - \tilde{w}_2 H_z. \quad (33)$$

Substituting \tilde{w}_2 and \tilde{u}_2 in (33), and evaluating it at the interface ($y = H$), we obtain the **evolution equation for the interface**

$$H_\tau = -\frac{1}{3} [(H_{zzz} + H_z) H^3]_z - \frac{1}{2} \beta_o (\Gamma_z H^2)_z. \quad (34)$$

4.2 Derivation of the Evolution Equation of Surfactant Concentration

Now, in order to derive the equation for Γ , we use the scales in the equation of surfactant concentration (17) and take the leading order terms, to find

$$\Gamma_\tau + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{w}_2\Gamma) + \frac{1}{\tilde{P}e} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = 0. \quad (35)$$

Finally, substituting \tilde{w}_2 evaluated at $y = H$, we obtain the **evolution equation of surfactant concentration** through the interface

$$\Gamma_\tau = - \left[\left(\frac{1}{2} (H_{zzz} + H_z) H^2 + \beta_o \Gamma_z H \right) \Gamma \right]_z - \frac{1}{\tilde{P}e} \Gamma_{zz}. \quad (36)$$

5 Re-scaling of the Model

We want to re-scale z from $[0, L]$ to $[0, 2\pi]$. For that, we consider the change of variables $z = \frac{2\pi}{L} \tilde{z}$ and $t = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \tilde{t}$, where $\tilde{z} \in [0, L]$, $\tilde{t} \geq 0$, and the variables with ‘ $\tilde{\cdot}$ ’ represent the non-scaled variables. Then, we have $z \in [0, 2\pi]$, $t \geq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \frac{2\pi}{L} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t}.$$

Writing (34) and (36) in terms of the new scaled variables, we obtain the following coupled system of two non linear partial differential equations

$$H_t = -\frac{1}{3} [H^3 (\lambda^2 H_{zzz} + H_z)]_z - \frac{1}{2} \beta_o (\Gamma_z H^2)_z \quad (37)$$

and

$$\Gamma_t = - \left\{ \left[\frac{1}{2} (\lambda^2 H_{zzz} + H_z) H^2 + \beta_o \Gamma_z H \right] \Gamma \right\}_z - \frac{1}{\tilde{P}e} \Gamma_{zz} (\Gamma_z H^2)_z, \quad (38)$$

where $\lambda = \frac{2\pi}{L}$. This system is more complicated than the one obtained for the problem with basic flow studied in ([8], 2004).

Now, we are exploring numerical schemes in order to solve (37) and (38). Thus, it is convenient to isolate the terms in (37) and (38) that contain the derivatives of H and Γ of higher order. Therefore, we re-write them as

$$H_t = -\frac{1}{3} \lambda^2 H^3 H_{zzzz} - \frac{1}{2} \beta_o H^2 \Gamma_{zz} - f(H, H_z, H_{zz}, H_{zzz}, \Gamma_z)$$

and

$$\Gamma_t = -\frac{1}{2}\lambda^2 H^2 \Gamma H_{zzzz} - \left(\beta_0 \Gamma H + \frac{1}{Pe} \right) \Gamma_{zz} - g(H, H_z, H_{zz}, H_{zzz}, \Gamma, \Gamma_z)$$

where,

$$\begin{aligned} f(H, H_z, H_{zz}, H_{zzz}, \Gamma_z) &= \frac{1}{3} H^3 H_{zz} + \lambda^2 H^2 H_z H_{zzz} + H^2 H_z^2 \\ &+ \beta_0 H H_z \Gamma_z, \\ g(H, H_z, H_{zz}, H_{zzz}, \Gamma, \Gamma_z) &= \frac{1}{2} H^2 H_{zz} \Gamma + \lambda^2 H H_z H_{zzz} \Gamma + H H_z^2 \Gamma \\ &+ \frac{1}{2} \lambda^2 H^2 H_{zzz} \Gamma_z + \frac{1}{2} H^2 H_z \Gamma_z + \beta_0 H \Gamma_z^2 \\ &+ \beta_0 H_z \Gamma \Gamma_z \end{aligned}$$

and $\lambda = \frac{2\pi}{L}$.

For the case when $\Gamma = 0$; i.e., there is not surfactant in our problem, we have

$$H_t = -\frac{1}{3} \left(H^3 (\lambda^2 H_{zzz} + H_z) \right)_z, \quad (39)$$

which is the equation, originally, derived by Hammond in ([7], 1983).

Hammond solved this equation numerically replacing the spacial derivatives with finite differences (**The Line Method**). However, we have developed some numerical methods that can be applied to (39). One method uses **Fast Fourier Transform (FFT)** for the spacial derivatives and **finite differences** for H_t . This is what is known as a **Pseudospectral Method**. Even though this method is spectrally precise, has a restriction in the time step $\Delta t \sim O(\Delta x^4)$. But, this explicit method is simple to code and helpful to compare with results of implicit methods which are more complicated. An efficient implicit method for (39) that does not have such restriction with the time step will be the subject of future work which will help us to construct a numerical scheme able to solve the system (37) and (38).

6 Conclusion

We have derived a system of two coupled non linear partial differential equations which model the evolution of core-annular fluids without pressure gradient. One equation describes the evolution of the interface and the other the evolution of the surfactant concentration at the interface.

We note that, when $\Gamma = 0$, the system of equations (37) and (38) derived in this research is transformed in equation (39) which, originally, was derived by Hammond ([7], 1983). So, we can conclude that the presence of surfactants

in our problem influence the evolution of the interface in the sense that a new term appears in the interface evolution equation as we compare (37) with (39).

Acknowledge

I want to give special thanks to Demetrius Papageorgiou and Michael Siegel for their help during the development of this research. Also, to the Mathematical Sciences Department of New Jersey Institute of Technology, U.S.A., for its support during the Summer of 2001, and to Consejo de Investigación de Universidad de Oriente, Venezuela (Grant CI-2-010301-1277/06).

References

- [1] A. W. Adamson. *Physical Chemistry of Surfaces*. Wiley Interscience, New York, U.S.A., 1976.
- [2] D. Edwards, H. Brenner, and D. Wasan. *Interfacial Transport Processes And Rheology*. Butterworth-Heinemann, Boston, 1991.
- [3] P. A. Gauglitz and C. J. Radke. An extended evolution equation for liquid film breakup in cylindrical capillaries. *Chemical Engineering Science*, 43(7):1457–1465, 1988.
- [4] S. L. Goren. The instability of annular thread of fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 12:309–319, 1962.
- [5] D. Halpern and J. B. Grotberg. Dynamics and transport of a localized soluble surfactant on a thin film. *Journal of Fluid Mechanics*, 237:1–11, 1992.
- [6] D. Halpern and J. B. Grotberg. Surfactant effects on fluid-elastic instabilities of liquid-lined flexible tubes: A model of airway closure. *Journal of Biomechanical Engineering*, 115:271–277, 1993.
- [7] P. S. Hammond. Nonlinear adjustment of a thin annular film of viscous fluid surrounding a thread of another within a circular cylinder pipe. *Journal of fluid Mechanics*, 137:363–384, 1983.
- [8] S. Kas-Danouche, D. Papageorgiou, and M. Siegel. A math. model for core-annular flows with surfactants. *Divulgaciones Matemáticas*, 12(2):117–138, 2004.
- [9] Said Kas-Danouche. *Nonlinear Interfacial Stability of Core-Annular Film Flows in the Presence of Surfactants*. PhD thesis, New Jersey Institute of Technology, Newark, NJ. U.S.A., 2002.

-
- [10] W. J. Milliken, H. A. Stone, and L. G. Leal. The effect of surfactant on the transient motion of Newtonian drops. *Physics of Fluids A*, 5(1):69–79, 1993.
 - [11] H. A. Stone and L. G. Leal. The effects of surfactants on drop deformation and breakup. *Journal of Fluid Mechanics*, 220:161–186, 1990.
 - [12] G. I. Taylor. Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 10:161–165, 1961.
 - [13] A. A. Wheeler and G. B. McFadden. A ξ -vector formulation of anisotropic phase-field models: 3-D asymptotics. Technical Report NISTIR 5505, U.S. Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology, October 1994.
 - [14] H. Wong, D. Rumschitzki, and C. Maldarelli. On the surfactant mass balance at a deforming fluid interface. *Physics of Fluids*, 8(11):3203–3204, 1996.

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Sophus Lie: un matemático visionario

Verónica Martín¹, Juan Núñez¹ y Ángel F. Tenorio²

¹Departamento de Geometría y Topología.

Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Apto. 1160. 41080-Sevilla (Spain).

²Dpto. de Economía, Métodos Cuantitativos e H.^a Económica.

Escuela Politécnica Superior. Universidad Pablo de Olavide.

Ctra. Utrera km. 1, 41013-Sevilla (Spain).

E-mail: veronicamartinmolina@gmail.com, jnvaldes@us.es, aftenorio@upo.es

Resumen

A diferencia de una mera exposición de datos puramente biográficos, este artículo pretende dar a conocer a cualquier persona en general, y a los matemáticos y científicos en particular, aquellas anécdotas menos conocidas, leyendas más o menos ajustadas a la realidad, correspondencia enviada y recibida, y sobre todo, opiniones de otras personas sobre la vida y obra de Sophus Lie.

Abstract

Unlike a typical and traditional biography, the goal of this paper consists in showing those more or less unknown but true stories, letters and above all, other people's opinions about Sophus Lie's research and life.

Introducción

Pregúntesele a cualquier persona, o incluso si se desea, y por elevar algo el nivel de exigencia, a cualquier científico (sea o no matemático), por el nombre de los dos o tres matemáticos más importantes a lo largo de la historia, y de seguro que las respuestas recibidas no diferirán mucho de las siguientes: Pitágoras, Gauss, Euler o, a lo sumo, Newton o Leibniz.

Sin embargo, han existido obviamente muchísimos otros matemáticos cuya importancia en orden a sus descubrimientos, tanto por estos mismos como por su aplicación a otras ciencias, no desmerecen de los anteriores, si bien es cierto que no lograron despertar la misma fascinación en el público en general que los anteriormente citados.

Pues bien, el objetivo principal del presente trabajo va dirigido a realzar los méritos de, precisamente, uno de los más desconocidos de entre los menos habituales: Sophus Lie, del cual el mismísimo Albert Einstein llegó a afirmar que “*sin sus descubrimientos (los de Lie) no habría sido posible el nacimiento de la Teoría de la Relatividad*” [2].

En cualquier caso, este trabajo no ambiciona ser una biografía de este matemático. De hecho, ya existen en la literatura muy buenas y completas biografías sobre Sophus Lie (véanse [3, 6, 7] o [8], por ejemplo, de donde se han extraído la mayor parte de las citas de este artículo).

Lo que en realidad pretende este trabajo es dar a conocer al público en general, y a los matemáticos y científicos en particular, aquellos aspectos que jalonan la vida de Sophus Lie y que pueden considerarse más reservados y de aparentemente menor relevancia que los puramente biográficos. Para ello, se recurrirá a la exposición de anécdotas poco conocidas, leyendas más o menos ajustadas a la realidad, correspondencia enviada y recibida, y sobre todo, opiniones de otras personas sobre su persona.

En su época, Sophus Lie era considerado por casi todos como el arquetipo de personaje de un drama teatral, el prototipo de rubio nórdico. Era conocido en toda Europa como el gran gigante germano, una fuerza primordial, un titán lleno de ansias de vivir con objetivos audaces y una fuerza de voluntad indomable. Era descrito como altamente comprometido e innovador, alguien con la resistencia necesaria para superar la mayoría de los obstáculos, pero también como un hombre que más tarde tendría que pagar por todo esto con bruscos cambios de humor y temperamento.

Todo el que lo conoció tenía algo que decir de este gran hombre que abrió nuevos campos de investigación en las Matemáticas, y cada uno intentó popularizar su propia versión, acompañándola de historias y anécdotas variadas, gracias a las cuales, Lie se había convertido en el centro de las conversaciones de sus amigos, mucho tiempo antes de ser reconocido mundialmente.

¿Qué cuentan estas historias exactamente? ¿Qué sabemos con seguridad? ¿Qué es imaginario y qué es real? A continuación, y respondiendo al objetivo señalado, se ofrecen algunas de estas anécdotas, acompañadas de citas, cartas, fotos y opiniones de familiares, amigos y otros matemáticos de su tiempo.

Sin embargo, antes de ello nos gustaría responder previamente a una pregunta que puede surgir de manera natural tras la lectura de los párrafos anteriores: ¿por qué dedicarle este artículo precisamente a Sophus Lie?

Nuestra respuesta se fundamenta en varias razones. En primer lugar y como ya se ha indicado anteriormente, entendemos que la enorme trascendencia de la obra de Lie, tanto sobre los fundamentos de la Matemática actual como por su extensa aplicación a otras ciencias (tales como Física e Ingenierías, por ejemplo), le hacen merecedor de ser un poco más conocido por el público en general. Como una muestra de la aplicación del trabajo de Lie a la Física Moderna,

queremos destacar que los grupos y las álgebras de Lie son actualmente muy utilizados como herramientas en el estudio de las simetrías, no sólo de las clásicas y habituales en el espacio-tiempo, sino en las nuevas asociadas con los grados de libertad interna de las partículas y de los campos, así como también en la moderna teoría de las super-cuerdas.

En segundo lugar, la devoción particular de dos de los autores de este texto por este matemático, tras la realización de sus respectivas Tesis Doctorales sobre álgebras de Lie, que les llevó primero a bucear en su vida y en su obra, como paso previo al estudio de su teoría. Esto, junto con la admiración que la figura de Lie también despertó en el tercer autor tras la lectura de una de sus biografías, es lo que nos ha llevado a escribir sobre él y a tratar de investigar sobre aquellos episodios de su vida más desconocidos y difíciles por tanto de encontrar en las biografías ya escritas.

Estos han sido por tanto los motivos que nos han llevado a escribir este trabajo, que aparece adornado por una pequeña colección de fotografías no muy conocidas, cuyo contenido hemos considerado oportuno estructurar de la siguiente forma: tras esta introducción, siguen tres breves secciones: la primera, dedicada a la infancia de Lie en Nordfjordeid, su pueblo natal, y dos más, en las que se tratan algunos aspectos de los estudios previos y universitarios de Lie. Se dedican después dos secciones, ya algo más extensas, a recordar cómo Lie encontró su verdadera vocación y cómo desarrolló su labor profesional, tanto docente como investigadora. Finalmente, en un epílogo del trabajo, se muestran algunas opiniones de destacados matemáticos sobre quien, junto con Niels Henrik Abel (1802 - 1829), han sido los dos más preclaros matemáticos que el pueblo noruego ha donado a la posteridad.

1 1842-1851: Infancia en Nordfjordeid

Marius Sophus Lie (en adelante, Lie) nació el 17 de diciembre de 1842 en la vicaría de Eid, en Nordfjordeid, Noruega. Su padre, Johan Herman Lie, era un pastor protestante y su madre, Mette Maren (nacida Stabell) era altamente considerada por todos gracias a su trabajo en la granja de la vicaría.



A la izquierda, una panorámica de Eid en Nordfjordeid alrededor de 1885, vista desde la vicaría.

A la derecha, Johan Herman Lie, vicario desde 1836 hasta 1851, y padre de Sophus Lie.

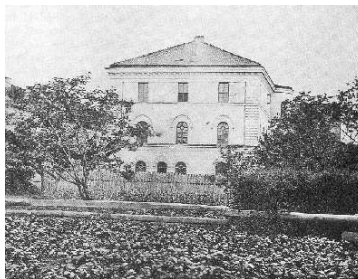


Lie pasó su infancia en esta pequeña aldea en compañía de sus tres hermanos y tres hermanas (Fredrik Gill, Mathilde, Laura, Dorothea, John Herman

y Ludvig Adler) hasta que su familia se mudó a Moss, donde su madre y su hermano pequeño murieron no mucho después y su padre permaneció hasta su fallecimiento 22 años más tarde.

2 1852-1859: Moss y Christiania

Lie estudió en la escuela comunal de la ciudad de Moss (Realskole) hasta los 15 años, cuando ingresó en la Nissen's Private Latin School de Christiania (actual Oslo, desde 1924). Allí conoció a Ernst Motzfeldt, de su misma edad, que se convirtió en un amigo fiel y que sería para él de gran ayuda a lo largo de toda su vida (a la derecha, la escuela Nissen).



Lie estaba interesado en ejercer la carrera militar, como su hermano John Herman, pero problemas de visión le hicieron abandonar esa idea. También dudó durante un tiempo entre estudiar Ciencias o Letras, hasta que se decidió a entrar, en 1859, en la Royal Fredrik's University de Christiania para estudiar Matemáticas y Ciencias.

3 1859-1865: Universidad de Christiania

Muchos de sus compañeros tienen historias que contar sobre su tiempo en la Universidad. Uno de los amigos de Lie en esa época, Armauer Hansen, escribió años después sus memorias, en las que habló sobre sus años de estudiante y sus experiencias junto con Sophus Lie y Ernst Motzfeldt. Los tres estudiantes solían relajarse haciendo ejercicio en las anillas del gimnasio. En una ocasión, Lie estaba ejecutando una acrobacia en ellas cuando se soltó demasiado tarde y cayó de espaldas más allá de la colchoneta. Cuando vio que sus dos amigos se estaban riendo de la cómica expresión que mostraba su cara, se enfadó y comenzó a re-primarlos. Sin embargo, a mitad de su discurso paró y dijo, casi como si hablase para sí mismo: *¡Es extraño, porque hasta había calculado precisamente cuándo debía soltarme!* [8, p. 82].



Lie vivió en un tiempo en el que muchos estudiantes eran ávidos gimnastas y deportistas. Él y sus amigos solían dar largas caminatas por las colinas Nordmarka detrás de Christiania. Lie era especialmente conocido por su fuerza y

resistencia, que hacían que fuese a pie hasta Moss (a unos 58 Km.) para visitar a su familia. Una historia en particular cuenta que en una ocasión fue hasta Moss a recoger un libro y, sin ni siquiera saludar a su padre, que había salido, volvió a Christiania en el mismo día. Su último año como estudiante, 1865, parece que fue especialmente difícil para él. No estaba cómodo con las asignaturas de esa parte de sus estudios y además sufría de insomnio y depresión. Armauer Hansen pensaba que Sophus Lie habría sucumbido completamente si no hubiese sido por la ayuda de Ernst Motzfeldt, que solía llevarlo a dar largas caminatas por los alrededores de Christiania para cansarlo y que así pudiese dormir mejor. Sin embargo, Sophus Lie no era fácil de cansar.

4 1865-1869: La búsqueda de una vocación

En otoño de 1865, Lie obtuvo su diploma de licenciado en Ciencias, sin haber mostrado especial habilidad o inclinación por las Matemáticas. Vivió durante un tiempo dando clases particulares a otros estudiantes mientras que decidía su camino a seguir, al tiempo que también daba clases de astronomía. Esta falta de vocación supuso para él un gran problema y cuando fue a Moss en diciembre de 1865 lo hizo muy deprimido.

Su amigo Motzfeldt pensó que este abatimiento estaba ligado a no haber obtenido la máxima nota en los últimos exámenes. Aunque esto jugó un papel importante en su depresión, no hay duda de que hubo otros factores, como la imposibilidad de entrar en el ejército por problemas físicos. Está claro que, de todas formas, el estado mental de Lie era mucho peor de lo que Motzfeldt creía. Prueba de ello es que, después de tres meses, Lie respondió a una carta de Motzfeldt incluyendo las siguientes líneas [8, p. 95]:

“Cuando te dije adiós antes de Navidad, lo hice pensando que sería para siempre, pues tenía la intención de suicidarme. Pero no tengo la fuerza para hacerlo. Así que, en consecuencia, tengo otra oportunidad para intentar vivir”.

Este periodo de incertidumbre duró hasta el verano de 1866, que pasó con su hermana mayor Matilde (la cual estaba casada con el médico Fredrik Vogt) en Tvedestrand, donde era conocido por sus escapadas. De hecho, se decía que una expresión que las madres utilizaban para amenazar a sus hijos era: *“Pórtate bien o Sophus Lie vendrá por ti”.*

En otoño de ese año Lie volvió a Christiania, donde intentó obtener el puesto de ayudante de profesor en el Observatorio de Astronomía y después dio clases de Astronomía y Matemáticas. Años más tarde Lie escribió las siguientes líneas sobre sus recuerdos de esta época:

“Nunca se me hubiese ocurrido acabar envuelto en el trabajo de investigador original. Sobre todo, estaba pensando en mejorar la pedagogía matemática. Estaba preocupado considerablemente por eso”.

Fue en 1868 cuando leyó las obras de los geómetras Poncelet y Plücker (los fundadores, con Möbius, de la Geometría Proyectiva) y sus ideas lo inspiraron para dedicarse a la investigación en Geometría. El otoño de ese año trabajó duro leyendo los volúmenes de revistas matemáticas que venían de París y Berlín.

Lie publicó su primer trabajo en el *Crelle's Journal* de Berlín en 1869 [4], que tuvo que pagar de su propio bolsillo. Como anécdota al respecto, cabe decir que Lie lo había escrito basándose en una idea de Plücker que le había llamado particularmente la atención y que lo presentó previamente ante la Asociación de Estudiantes de Ciencia. El mismo Ernst Motzfeldt fue quien prestó a Lie el dinero necesario para la publicación. Además, a petición del Profesor Ole Jacob Broch, el trabajo fue traducido al alemán para poder ser publicado en el extranjero.

Posteriormente, una versión ampliada de este trabajo fue publicada en los *Proceedings de la Academia de Ciencias*, lo que le valió una beca del Estado para salir de Noruega y viajar al extranjero. Es conveniente también notar que esta versión ampliada contenía ideas revolucionarias para la época, desde el punto de vista matemático, que no fueron aceptadas por algunos matemáticos de su tiempo. Incluso la Academia de Ciencias de Christiania tuvo sus dudas a la hora de publicarlo. Para intentar arreglar esta situación, Lie llegó a escribirles cartas a dos matemáticos prusianos, Carl Theodor Reye y Alfred Clebsch, pidiéndoles que se le reconocieran sus ideas.

Algún tiempo después de esto, Reye reconoció que el tratamiento que Lie le daba a los números imaginarios era extremadamente interesante y se sorprendió de que Lie hubiese producido con un nuevo y simple principio lo que él mismo había tratado en la segunda parte de su renombrada obra *Geometrie der Lage* (Reye publicó su primer volumen en 1866 y este segundo en 1868). De hecho, Reye le facilitó a Lie una copia de esta obra con la siguiente dedicatoria elogiosa [8, p. 126] : *“Tú, con tu teoría de imaginarios, has hecho un feliz descubrimiento”.*

5 Periodo 1869-1886

Lie pasó el invierno de 1869–1870 en Berlín, donde conoció a un alumno de Plücker, Felix Klein, con el que trabó una enorme amistad. Lie y Klein trabajaron juntos, intercambiaron ideas y es indudable que este intercambio fue fructífero para ambos.

En el verano de 1870 los dos viajaron juntos a París, donde conocieron a Camille Jordan y a Gaston Darboux, este último de la misma edad que Lie y el primero cuatro años mayor; se trataba de dos glorias de la ciencia francesa.

Fue en París donde Sophus Lie hizo uno de sus más hermosos descubrimientos: la célebre *transformación* que lleva su nombre. Este descubrimiento suscitó la admiración de todos los geómetras y bastaría por sí solo para inmortalizar su nombre.

Al declararse la guerra franco-alemana, Klein tuvo que volver rápidamente a Berlín. Sophus Lie permaneció en Francia y maduró el proyecto de ir a pie hasta Italia atravesando toda Francia. Desgraciadamente, no llegó más allá de Fontainebleau (a poco más de 50 Km. de París) cuando fue detenido por los franceses como sospechoso de ser espía alemán.

Varias historias circularon sobre el cómo y por qué de este incidente. Se decía que Lie solía hablar solo mientras caminaba y que cualquiera podía comprobar que no era en francés. Otros dicen que, además, solía hacer esbozos del paisaje en su cuaderno y que estaba sentado y dibujando las defensas francesas cuando fue detenido. Además, los símbolos matemáticos fueron tomados por códigos secretos. Lie intentó demostrar su inocencia mostrando su pasaporte noruego y explicando los símbolos y expresiones matemáticas de su cuaderno de la forma más simple que pudo, todo ello en vano. En cualquier caso, en los titulares de los periódicos noruegos apareció: "*Científico noruego encarcelado por ser espía alemán*", lo que hizo que su nombre fuese conocido en toda Noruega.

A consecuencia de esta detención, Lie tuvo que pasar cuatro semanas en la prisión de Fontainebleau. Se cuenta que cuando Lie le preguntó a uno de los guardias qué hacían con sus prisioneros, se dice que éste le respondió [8, p. 146]: "*les disparamos a las seis de la mañana*". Lie logró salir de la prisión gracias a la intervención de Darboux, que se presentó en la prisión con una carta del Ministro del Interior, el todopoderoso Gambetta, autorizando su liberación. El propio Lie contó más tarde que su estancia en prisión le dio la paz necesaria para meditar y trabajar con toda tranquilidad.

Cuando Lie fue liberado se dirigió en tren a Italia, a donde llegó sin inconvenientes y volvió a Christiania pasando por Suiza y Alemania. A su llegada, Lie se mostró dispuesto a contar sus experiencias y, de ese tiempo en adelante, fue vox populi que siempre había una anécdota relacionada con él.

En 1871, la Universidad de Christiania le otorgó una beca de investigación para la obtención del doctorado en ciencias. Como el estipendio no era suficiente para vivir, Lie complementó su salario como profesor asistente de esa misma Universidad y también del Nissen's Private Latin School, su antiguo colegio. Se dio el caso, por tanto, de que Lie llegó a ser profesor simultáneo de los dos centros en los que él mismo había estudiado. Finalmente, se doctoró en julio de 1872 con un trabajo sobre una clase de transformaciones geométricas.

Tras defender su tesis, Lie enseñó durante un año en la Universidad de Lund, en Suecia, obteniendo posteriormente una cátedra que el Parlamento noruego había creado pensando expresamente en él, en 1872, en la Universidad de Christiania. Lie pudo entonces entregarse de lleno al desarrollo de sus ideas,

siendo constante su producción de memorias en este periodo. Un año más tarde, Lie recordaba su situación en la siguiente carta:

“Yo, que casi siempre he tenido muy buena salud, me he debilitado debido a la enorme tensión de los últimos años. Esto alcanzó su cima el pasado verano pero, afortunadamente, el nombramiento de catedrático ha hecho posible vivir más sensatamente. Desde entonces, mi salud ha mejorado constantemente y espero tener pronto de vuelta mi vieja energía. No debes malentenderme; en toda mi vida nunca he estado verdaderamente enfermo, es que este último año empecé a estar un poco nervioso”.

Otros hechos que sucedieron durante los dos primeros años del desempeño de su cátedra fueron la muerte de su padre, en 1873, en Moss, y su boda, en agosto de 1874, con Anna Sophie Birch (a la derecha) después de un largo periodo de compromiso. La madre de Anna era prima hermana de su célebre compatriota Abel. De hecho, Lie escribió a Anna lo siguiente [8, p. 183]:

“No tienes concepción de la rara coincidencia que es para mí el que mi prometida sea un familiar cercano de Abel, mi gran, aunque inalcanzable, ideal.”

Lie y su esposa tuvieron dos hijas, Marie (1877) y Dagny (1880), y un hijo, Herman (1884). A la derecha puede observarse un retrato de toda la familia.



Tanto Mayer como Klein escribieron a Lie para felicitarle por su compromiso. Mayer le escribió:

“Mis más sentidas felicitaciones por tu compromiso. Verás que una nueva vida comienza cuando uno no puede permanecer solo durante más tiempo, pero otra se une a nuestra vida y nos llena el corazón tanto o más que el Intelecto llena el Estudio. Entonces uno obtiene el Sentido de la Vida apropiado, la Alegría de Vivir correcta”.

Por su parte, Klein le escribió:

“Me parece increíble que te me hayas adelantado. ¿Recuerdas la conversación que tuvimos en nuestra caminata de Nürnberg a Fuerth? En esa ocasión los dos estuvimos de acuerdo en que era una cosa muy bella el encontrar refugio en un buen hogar. Y, ahora que vas a hacer esto primero, me hace mucha más gracia porque yo solía

tener los mismos pensamientos rondando por la cabeza, y me decía a mí mismo: ¡No, señor, en esa condición no puedes trabajar, y Lie nunca lo permitiría! No puedo asegurar que siga tu ejemplo pronto, pero puedo decir con certeza que lo haré algún día”.

Lie también deseaba reunir en una gran obra los resultados de sus investigaciones anteriores, especialmente las referidas a la teoría de grupos. Sin embargo, él era consciente de no ser del todo reconocido por sus trabajos por parte del mundo matemático, lo que hacía que se sintiese a veces decepcionado por esta falta de reconocimiento. Algunos autores han intentado explicar esta situación basándose en el hecho de que sus artículos estuviesen escritos en noruego, o también en que no usaba el lenguaje analítico aceptado por entonces o bien, ciertamente, porque sus artículos no fuesen fácilmente comprensibles al exceder mucho la intuición geométrica de Lie a la de otros matemáticos.

En 1884, Klein tuvo la feliz idea de enviar a Christiania para ayudar a Lie en la redacción de sus trabajos a uno de los discípulos de A. Mayer y suyo propio, Friedrich Engel, que se había doctorado en Leipzig un año antes. La colaboración entre Lie y Engel duró nueve meses y fue descrita en múltiples ocasiones por este último [8, p. 312]:

“Cuando lo conocí, Lie estaba en la cima de sus poderes, era una presencia gigantesca y puramente germánica que daba la impresión de una fuerza física inusual y de resistencia. La verdad es que todavía era famoso entre sus compatriotas por ser senderista, pero hay que señalar que en la Noruega de esa época era más comprensible evaluar al senderista que al matemático. [...]

Su manera era directa y abierta, y era opuesto a cualquier pretensión, de forma que inspiraba confianza inmediatamente. Desde el primer momento uno sentía que debía ser abierto con él, que se presentaba a sí mismo exactamente como era. Era completamente directo y franco en sus opiniones sobre gente para la que no guardaba ninguna simpatía. Sobre todo, odiaba cualquier indicio de intriga y tenía una gran propensión para descubrirlas. [...]

El objetivo de mi viaje era doble: por una parte, debía sumergirme en las teorías de Lie bajo su guía, y, por otra, debía ejercer cierta presión sobre él para que continuara con su trabajo de presentar de forma más coherente algunas de sus mejores teorías, con lo que debería ayudarle”.

Lie también tenía una opinión muy positiva de Engel, llegando a referirse así sobre él en una de sus cartas a Klein [8, p. 314]:

“Estoy bastante de acuerdo contigo y con Mayer en que Engel tiene mucho talento. Piensa de forma científica, y al mismo tiempo posee originalidad”.

6 Periodo 1886-1898



A la izquierda la primera página del *Ny illustreret Tidende* (periódico de Christiania) en ocasión de la partida de Lie hacia Leipzig.

El dibujo fue realizado por H.G. Olsen y la historia (sin firmar) había sido escrita por Armund Helland.

Engel y Lie volverían a encontrarse en 1886, cuando Lie fue llamado por la Universidad de Leipzig para suceder a Klein, que había sido nombrado profesor de la Universidad de Göttingen. El propio Klein, que había seguido manteniendo correspondencia con Lie a lo largo de los años, le animó para que aceptara el puesto y éste le hizo caso. Lie se sintió particularmente feliz y orgulloso de ver llegar a Leipzig a una serie de jóvenes alumnos de la Escuela Normal Superior enviados por su director, Jules Tannery, para estudiar la teoría de grupos con una de las autoridades en la materia (el propio Lie llegó a afirmar [8, p. 104] “Yo creo que la Teoría de Grupos llegará a tener gran importancia”).

Aunque los doce años que Lie pasó en Leipzig como profesor de la Universidad fueron de los más prolíficos de su carrera, hay que indicar que durante esa etapa no fue del todo feliz. Tuvo algunos problemas con sus compañeros que no llegaron a resolverse, pues buena parte del conflicto fue que Lie trabajó en campos que otros no conseguían llegar a ver. Por otra parte, sufría de la ansiedad de ser incomprendido y utilizado. Las desavenencias le causaban ansiedad y todas estas experiencias afectaron a su ego. Taciturno, apático y profundamente deprimido fue admitido en una clínica psiquiátrica cerca de Hannover en 1889, donde permaneció siete meses. Esta dualidad en su visión de Leipzig puede apreciarse en la carta que escribió a Ernst Motzfeldt después de salir de la clínica, en el verano de 1890 [8, p. 350]:

“Querido Ernst:

Finalmente tengo la oportunidad de darte un poco de información sobre la razón de mi seria enfermedad de los nervios, la cual aún padezco de vez en cuando. [...]

Creo que ha sido desafortunado el haber aceptado este puesto tentador en Leipzig, aunque durante estos años he conseguido una cantidad extraordinaria de victorias científicas y avances. [...]

Los médicos dicen que sufro de melancolía, que es una débil expresión de la terrible condición mental en la que me encuentro”.

A su salida de la clínica, Sophus Lie volvió gradualmente a su trabajo matemático. Sin embargo, tanto sus amigos como colegas en Alemania creyeron ver grandes cambios en su actitud y temperamento. De hecho, Lie empezó a acusar a otros de usar y prácticamente robar sus ideas.

En 1892 Lie fue a pasar seis meses en París, donde se interesó por las investigaciones que los jóvenes matemáticos franceses dedicaban a la teoría de grupos. Se lo podía ver a menudo con ellos alrededor de una mesa del Café de la Source, en el boulevard Saint-Michel y no era raro que el mármol blanco de la mesa se cubriera de fórmulas a lápiz que el maestro escribía para ilustrar la exposición de sus ideas. La indiferencia con que sus primeros trabajos habían sido recibidos por los matemáticos, se podría decir inclusive que habían sido ignorados, se había tornado por entonces en admiración: la mayor parte de las grandes Academias, excepto la de Berlín, anhelaban contarle entre sus miembros. Durante su estancia en París, el 7 de junio de 1892 la Academia de Ciencias de París lo nombró miembro de la sección de Geometría.

Fue también en ese año cuando Lie cortó con casi todos sus contactos en Alemania, incluida su estrecha relación con Engel. Su amistad de por vida con Klein también se rompió y al año siguiente Lie lo atacó públicamente diciendo [5]:

“No soy discípulo de Klein y tampoco es cierto lo contrario, aunque quizás esto último esté más cerca de la verdad”.

Klein nunca llegó a responder a esa frase; pero tras su muerte, su esposa le escribió una carta al matemático noruego William Henry Young en la que le explicaba lo sucedido a este respecto. En el siguiente fragmento que se reproduce de la misma puede leerse (texto original en [9], traducido al castellano en [7]):

“La relación de mi marido con Lie fue una íntima amistad tanto en el aspecto personal como en el matemático. Además, duró hasta mucho después, cuando él nos visitó en Leipzig. Yo también le apreciaba, el poderoso hombre del Norte de mirada abierta y franca y sonrisa alegre, un héroe en cuya presencia lo común y lo mediano no se atrevían a hacer presencia. Luego, él llegó a ser el sucesor de mi marido en Leipzig, y allí le atrapó la nostalgia. ¡Qué bien comprendí yo eso! Él, un hombre libre, acostumbrado a su rudo pero hermoso hogar del norte, ¿cómo podía permanecer en la gran ciudad humeante, de altas casas, de callejones estrechos y llenos de enclenque gente sajona? Él sufrió de melancolía, fue llevado a un

sanatorio, pero allí las cosas empeoraron, ya que sentía que le robaban su trabajo y su libertad. Allí, en su amargado estado mental, debió de ser cuando escribió esas cosas maliciosas que mi marido encontró dolorosas e incomprensibles. Pero pronto mi marido comprendió que su mejor amigo estaba enfermo y que no se le podía considerar responsable de sus actos. No fue sólo magnanimidad y bondad, sino que fue también sabiduría lo que mostró mi marido al no entrar en la polémica y dejar que las cosas sencillamente se calmaran. Él no estaba equivocado con su amigo. Una tarde de verano, cuando volvíamos a casa de una excursión, allí, delante de nuestra puerta, estaba sentado un hombre pálido y enfermo. ¡Lie!, exclamamos gratamente sorprendidos. Los dos amigos se dieron la mano, se miraron uno al otro a los ojos, todo lo que había pasado desde su último encuentro lo daban por olvidado. Lie se quedó un día con nosotros, el querido amigo, y ya había cambiado. Yo no puedo pensar en él y su trágico destino sin emocionarme. Poco después murió, pero no antes de que el gran matemático fuese recibido en Noruega como un rey”.

En 1897, la Sociedad Físico-matemática de Kazan otorgó por primera vez el premio Lobatchevski, que fue creado en honor del primer matemático ruso que hizo una exposición sistemática de la geometría no euclidiana basada en la negación del postulado de Euclides. Este galardón tenía gran importancia y debía concederse cada cinco años al mejor libro publicado sobre geometría, en particular sobre geometría no euclidiana. Sobre la base de un informe de Felix Klein, muy interesante en sí mismo, el premio fue otorgado a Sophus Lie.

En septiembre de 1898, Sophus Lie volvió finalmente a Noruega para ocupar en Christiania una cátedra de teoría de grupos que su patria había fundado para él. Pero todo el mundo pudo ver que estaba muy enfermo. Sufría de anemia perniciosa, una enfermedad incurable de la sangre. Su salud fue empeorando rápidamente a lo largo de ese otoño, durante el que consiguió dar sus clases gracias a un gran esfuerzo. Murió el 18 de febrero de 1899 mientras dormía. Fue enterrado seis días después en el cementerio de Nuestro Salvador de Christiania después de un concurrido y solemne funeral en la Iglesia de la Sagrada Trinidad.

Erik Werenskiöld hizo el esbozo de la derecha el día después de la muerte de Lie.



7 Epílogo

A la derecha, puede verse un esbozo de Gustav Lærum que acompañaba al obituario de Lie en Verdens Gang el 21 de febrero de 1899.

Es de destacar que Lie es considerado uno de los matemáticos más prolíficos que han existido, a pesar de su corta vida. De hecho, el volumen de sus publicaciones es comparable incluso al de los propios Euler y Gauss, por ejemplo.



En 1921, Engel, con la colaboración de Heegaard, profesor de la Universidad de Christiania, comenzó la publicación de las Obras Completas de Lie, que comprenden seis grandes volúmenes llenos de abundantes notas y de varios extractos muy interesantes de la correspondencia de Lie con diferentes matemáticos extranjeros. Apenas terminado este hermoso monumento elevado a la gloria de Sophus Lie, se realizó en 1936 un Congreso Internacional que reunió en Oslo a un gran número de matemáticos de todos los países del mundo. En una de las sesiones de este congreso, en presencia de las más altas personalidades noruegas y en la gran sala de la Universidad, se inauguró un busto de Sophus Lie y uno de los delegados franceses rindió en su memoria el homenaje de la Escuela Normal Superior. Desde 1939, una réplica de este busto, donado por su hijo Herman, adorna la biblioteca científica de esta escuela.

A la derecha, el busto creado por Elisabeth Steen que fue colocado en Eid durante el Memorial a Sophus Lie en 1992.



El gran matemático francés Élie Cartan escribió en 1948 [1]:

“El público culto conoce a los grandes novelistas, los grandes dramaturgos y los grandes músicos de Noruega, pero conoce menos las contribuciones de esta nación a las otras ramas de la actividad intelectual. La ciencia le debe en particular dos grandes matemáticos: el primero, Niels Henrik Abel, nacido en 1802 y muerto a los 27 años, dejó una obra de admirable profundidad; el segundo es Sophus Lie”.

El matemático francés Jean Dieudonné dijo en 1974 [8, p. 376]:

“La teoría de Lie está en proceso de convertirse en la parte más importante de las Matemáticas. Poco a poco se ha hecho obvio que las teorías más inesperadas, desde Aritmética hasta Física Cuántica, han venido a rodear este campo de Lie como a un gran eje gigante”.

Sophus Lie proporcionó la fundación ideológica que, en gran medida, marcó el desarrollo de las Matemáticas modernas y de la construcción de modelos matemáticos. El método de Lie para resolver ecuaciones diferenciales fue importante para los cálculos inmersos en la Teoría General de la Relatividad de Einstein. La Teoría de Lie también fue indispensable para la formulación fundamental de las leyes naturales y del entendimiento de las estructuras internas del átomo. Cabe señalar que Sophus Lie ya había previsto este hecho en vida cuando dijo: *“Estoy seguro, absolutamente seguro de que estas teorías serán reconocidas como fundamentales en algún momento del futuro”.*

Referencias

- [1] Cartan, E. Un Centenario: Sophus Lie. En F. de Lionnais (ed.) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. EUDEBA, 1976.
- [2] Einstein, A. Geometrie und Erfahrung (Geometry and Experience). Discurso en la Academia Prusiana de Ciencias, Enero de 1921 (traducido al inglés en Einstein, A. *Sidelights on Relativity*. Dover, 1983).
- [3] Fritzsche, B. *Sophus Lie: A Sketch of his Life and Work*. Verlag, 1999.
- [4] Lie, S. Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)* **70** (1869), 346–353.
- [5] Lie, S. and Engel, F. *Theorie der Transformationsgruppen* Vol. 3. Leipzig, 1893.
- [6] Núñez, J. y Tenorio, A.F. (Consultar en Internet)
<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/SophusLief1.asp>
- [7] Núñez J. y Tenorio A.F. Sophus Lie, *LA GACETA de la R.S.M.E.* **5** nº 1 (2002), 121-130.
- [8] Stubhaug, A. *The Mathematician Sophus Lie: It was the audacity of my thinking*. Springer, 2002.
- [9] Young, L. *Mathematicians and Their Times: History of Mathematics and Mathematicians of History*. North-Holland Publishing Company, 1981.

INFORMACIÓN NACIONAL

CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN

Premio Lorenzo Mendoza Fleury 2007

Carlos A. Di Prisco

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

cdiprisc@ivic.ve

En su décima tercera edición correspondiente a 2007, el Premio Lorenzo Mendoza Fleury que otorga la Fundación Empresas Polar para reconocer el talento y la creatividad en ciencias básicas, fue otorgado a cinco científicos que se destacaron entre un grupo de unos cincuenta candidatos propuestos. Estos fueron: Juan Anacona, químico de la Universidad de Oriente, Gustavo Benaim, biólogo de la Universidad Central de Venezuela y del Instituto de Estudios Avanzados (IDEA), Alejandra Melfo, física de la Universidad de Los Andes, Mary Sobrado, bióloga de la Universidad Simón Bolívar y Carlos Uzcátegui, matemático de la Universidad de Los Andes.

En 1982, Carlos Uzcátegui, para entonces estudiante de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Los Andes (ULA), Mérida, participó, junto con un grupo de talentosos estudiantes de matemáticas de varias universidades del país, en un taller de resolución de problemas que se llevó a cabo en el Departamento de Matemáticas del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC). El taller resultó una experiencia motivadora tanto para los estudiantes participantes como para los profesores que lo coordinaron. Carlos demostró poseer una gran capacidad para el trabajo en matemáticas.

El año siguiente, como Estudiante Asistente del IVIC, Carlos desarrolló el Trabajo de Grado que presentó en la ULA para obtener el título de Licenciado. Inmediatamente después, ingresó al postgrado del IVIC para hacer estudios conducentes al título de M. Sc., que obtuvo en 1985 con un trabajo de grado sobre filtros y ultrafiltros en espacios de conjuntos de ordinales. Durante la realización de estos trabajos de grado, se puso de manifiesto su potencial como matemático, que lo llevó a establecerse rápidamente como un investigador independiente. En 1985 obtuvo un cargo por concurso en la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes y fue aceptado por la escuela de postgrado del California Institute of Technology, donde hizo sus estudios de doctorado bajo la dirección del Profesor Alexander Kechris, reconocido especialista en la teoría descriptiva de conjuntos.

A su regreso a Venezuela en 1990, una vez obtenido el doctorado, Carlos

Uzcátegui se reincorporó a la ULA y desde entonces se ha desempeñado como profesor en el Departamento de Matemáticas de esa universidad, detentando desde agosto de 2000 el cargo de Profesor Titular. Allí ha desarrollado una exitosa carrera, como profesor y como investigador en temas de la teoría de conjuntos, lógica matemática, topología y teoría combinatoria.

La carrera de Investigación.

Las primeras publicaciones de Carlos Uzcátegui se derivan de su trabajo como estudiante de postgrado. El primero de sus artículos, publicado en 1987 en *Proceedings of the American Mathematical Society*, contiene resultados de su trabajo de grado para obtener el título de M. Sc. en el IVIC. En este trabajo estudia el concepto de clausura normal de un filtro, logrando una caracterización de los filtros normales en un contexto muy amplio. Luego publica un trabajo basado en su tesis de doctorado sobre σ -ideales de conjuntos compactos. Este artículo contiene una serie de generalizaciones de algunos resultados clásicos sobre σ -ideales, en particular se presentan generalizaciones de propiedades del σ -ideal de los conjuntos numerables de un espacio métrico compacto.

A partir de ese momento diversifica sus investigaciones, continuando, por un lado, con el trabajo en teoría descriptiva, y por otro, iniciando investigaciones en temas de topología. A raíz de su participación en un taller sobre fundamentos lógicos de la computación, realizado en Caracas en 1992 comenzó una interesante colaboración con Jorge Lobo y con Ramón Pino para estudiar relaciones de consecuencia y operadores de cambio, iniciando así sus incursiones en temas de inteligencia artificial, rama de la lógica en la que también ha hecho contribuciones importantes. El trabajo titulado “Abductive consequence relations”, que publicó con Jorge Lobo en la revista *Artificial Intelligence*, es considerado como un trabajo pionero que establece conexiones entre la noción de abducción y el concepto más clásico de relación de consecuencia. Su trabajo conjunto con Ramón Pino ha abierto una línea de investigación sobre un nuevo concepto relacionado, relaciones explicatorias, que ha tenido amplia repercusión. Una relación de consecuencia es la que se establece entre enunciados según las leyes de la derivación lógica; en cambio, una relación explicatoria se establece entre un enunciado “observado” y sus posibles explicaciones. Los resultados más interesantes en esta línea son los teoremas de representación que han obtenido para varias familias de relaciones explicatorias.

En temas de topología el trabajo de Carlos Uzcátegui ha dado resultados que han merecido comentarios elogiosos de especialistas por su originalidad y su profundidad. En un trabajo conjunto con Gerardo Chacón (para entonces su estudiante de maestría) y Jorge Vielma estudia el espacio de funciones acotadas definidas en un espacio discreto y caracterizan nociones de la teoría de conjuntos tales como la cardinalidad del espacio o su cofinalidad en términos de nociones provenientes del análisis matemático. Posteriormente Carlos Uzcátegui

ha hecho contribuciones de gran originalidad al estudiar topologías en espacios numerables desde el punto de vista de la teoría descriptiva de conjuntos. En 2001 publicó junto con Stevo Todorčević el artículo “Analytic topologies over countable sets” donde se establecen explícitamente profundas conexiones entre propiedades puramente topológicas y conceptos de la teoría descriptiva de conjuntos. Continuando esta línea de investigación ha publicado los trabajos “On the complexity of subspaces of S_ω ”, y “Analytic k -spaces” (este último en coautoría con Todorčević) que son muestra de un alto nivel de creatividad. En esta misma línea han aparecido más recientemente otros artículos: “Alexandrov topologies viewed as closed sets in a Cantor cube”, y “Topologies generated by ideals”.

Los trabajos más recientes, publicados en la prestigiosa revista *Discrete Applied Mathematics*, responden a una nueva inquietud investigativa de Carlos Uzcátegui que ha sido desarrollada en colaboración con Juan Rada, también de la ULA. Se trata del estudio de estructuras combinatorias de interés para la química.

Como se puede observar, Carlos es un investigador creativo y versátil.

Docencia.

Carlos Uzcátegui se ha destacado en la ULA como un docente de gran calidad, tanto en cursos de la licenciatura en matemáticas como en cursos de postgrado. Aparte de los cursos que imparte en la ULA, con frecuencia colabora con los postgrados de matemáticas del IVIC y de la UCV, dictando conferencias, seminarios o parte de algún curso.

Ha dirigido tres trabajos de grado para Maestría en Matemáticas y cuatro trabajos de grado de Licenciatura, todos en el Departamento de Matemáticas de la ULA. Aparte de eso, brindó una valiosa asesoría a Janneth Arelis Díaz durante la realización de su tesis de doctorado en el IVIC.

Dotes de expositor.

Las conferencias de Carlos Uzcátegui son siempre muy bien pensadas, organizadas con maestría y presentadas con una gran claridad. Carlos Uzcátegui fue por esto seleccionado para dictar la conferencia inaugural de la XIX Escuela Venezolana de Matemáticas que se realizó en septiembre de 2006. Su destreza para presentar por escrito temas complejos a un público matemático amplio, incluyendo al público estudiantil, es bien conocida.

Otras actividades.

Del 6 al 10 de julio de 1998 se realizó en las instalaciones de la Facultad de Ciencias de la ULA el XI Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática (XI SLALM), con la participación de casi un centenar de personas provenientes

de varias partes del mundo. Carlos Uzcátegui fue coordinador del Comité Organizador Local y fue editor invitado para un volumen de la revista *Annals of Pure and Applied Logic* que recogió una selección de trabajos presentados en ese simposio .

Ha sido un entusiasta promotor de las olimpiadas matemáticas en Mérida, participando varias veces en los programas de entrenamiento y selección de estudiantes para estos eventos. En lo referente a las actividades organizativas y de administración, planificación y evaluación de actividades académicas en la Universidad de Los Andes, ha sido muy activo, desarrollando una labor que ha contribuido a mejorar los programas de enseñanza de las matemáticas en la licenciatura y a diseñar el programa de doctorado. Además ha sido miembro del Comité Organizador Local de la Escuela Venezolana de Matemáticas y miembro del Comité de Programa y organizador de sesiones de las Jornadas Venezolanas de Matemáticas en varias oportunidades.

Carlos Uzcátegui ha sido miembro del Comité para la Lógica en América Latina de la Association for Symbolic Logic, lo que confirma que goza de un alto grado de reconocimiento internacional.

Cooperación internacional.

Ha sido invitado por varias universidades de gran prestigio internacional, como son: Universidad de Illinois en Chicago, Universidad de Iowa, EEUU, Universidad de Lille, Francia, Universidad de Paris VII, Francia y California Institute of Technology, EEUU.

Fue participante en un proyecto financiando a través del convenio FONACIT (Venezuela) - CNRS (Francia), y también ha recibido, en varias oportunidades, financiamiento del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la ULA para desarrollar proyectos de investigación, algunos de ellos con participación de investigadores extranjeros.

El éxito alcanzado por Carlos Uzcátegui en todos los ámbitos de su actividad académica y especialmente la forma como se desarrolla su trabajo de investigación, logrando una amplia proyección internacional en varias áreas de las matemáticas, lo hicieron merecedor del Premio Lorenzo Mendoza Fleury.

Publicaciones de Carlos Uzcátegui:

1.- Monografías:

1. *Teoría Descriptiva de Conjuntos y la Recta Real*, con Carlos Augusto Di Prisco, Monografía de la IV Escuela Venezolana de Matemáticas, 1991.

2. *Elementos de Matemáticas 1 y 2*, disponible en <http://matematicas.ula.ve/publicaciones/index.html>.
3. *Introducción al Análisis Real* con Antonio Tineo, disponible en <http://matematicas.ula.ve/publicaciones/index.html>.

2.- Artículos:

1. *Normal filters generated by a family of sets*, con Carlos Augusto Di Prisco, Proceedings of the American Mathematical Society, 101 (3), 1987, 513-518.
2. *La clase de conjuntos de unicidad para series trigonométricas*, con Carlos Augusto Di Prisco, Actas del coloquio de homenaje a Rafael Laguardia, Vol 1, Uruguay, 1988, 37-54.
3. *The covering property for σ -ideals of compact sets*, Fundamenta Mathematicae, (141), 1992, 119-146.
4. *Some results on the descriptive set theory of σ -ideals of compact sets*, Notas de Matemática # 132, Dpto. de Matemáticas (ULA), 1994.
5. *Cardinal Topologies*, con Jorge Vielma, Notas de Matemática # 159, Dpto. de Matemáticas (ULA), 1995.
6. *Smooth sets for a Borel equivalence relation*, Transactions of the American Mathematical Society, 347 (6), 1995, 2025-2039.
7. *Cardinality and Compactness, Cofinality and Equicontinuity*, con G. Chacón y J. Vielma, Acta Math. Hungarica. 72 (4), 1996, 283-290.
8. *The σ -ideal of closed smooth sets does not have the covering property*, Fundamenta Mathematicae, 150, 1996, 227-236.
9. *Abductive change operators*, con Jorge Lobo, Fundamenta Informaticae, 27 (4), 1996, 385-411.
10. *On Borel topologies over countable sets*, Notas de Matemática # 169, Dpto. de Matemáticas (ULA), 1997.
11. *Abductive consequence relations*, con Jorge Lobo, Artificial Intelligence 89, 1997, 149-171.
12. *Jumping to explanations vs Jumping to conclusions*, con Ramón Pino Pérez, Artificial Intelligence, 111, 1999, 131-169.
13. *On representation theorems for non-monotonic consequence relations*, con Ramón Pino Pérez, Journal of Symbolic Logic, 65(3), 2000, 1321-1337.

14. *Explanatory relations based on mathematical Morphology*, con Ramón Pino Pérez e Isabelle Bloch, actas de ECSQRAU 2001, Toulouse, Francia Septiembre 2001, Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 2143, pag. 736-747.
15. *Analytic topologies over countable sets*, con Stevo Todorcevic, Top. and its Appl., 111(3), 2001, 299-326.
16. *Radic structure of a graph*, con Juan Rada, Discrete Applied Mathematics, 128, 2003, 447-463.
17. *On the complexity of the subspaces of S_ω* , Fundamenta Mathematicae, 176, 2003, 1-16.
18. *Maximal complements in the lattices of pre-orders and topologies*, Top. and its Appl., 132, 2003, 147-157.
19. *Preferences and Explanations*, con Ramón Pino Pérez, Artificial Intelligence, 149, 2003, 1-30.
20. *A Unified Treatment of Knowledge Dynamics*, con I. Bloch y R. Pino-Pérez. In Proceedings of the Tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, KR

INFORMACIÓN NACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá
Escuela de Matemáticas Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela
rsanchez@euler.ciens.ucv.ve

En esta oportunidad reseñaremos la actividad olímpica del primer semestre del año 2007. Se destacan los siguientes eventos, la realización de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, en la cual participaron 52.358 estudiantes de 21 estados, distribuidos entre los grados 7^o, 8^o y 9^o de Educación Básica y los años 1^o y 2^o de Educación Media y Diversificada. La Olimpiada tuvo tres certámenes, el Preliminar o Canguro Matemático, la Final Regional y la Final Nacional, esta última se realizó en la ciudad de Mérida los días 9 y 10 de Junio. También del 30 de Mayo al 9 de Junio tuvo lugar en la ciudad de Mérida la IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, IX OMCC, y el Simposio en Geometría y Herramientas Informáticas para la Enseñanza de las Matemáticas, organizado dentro del marco de la IX OMCC. Ambos eventos tuvieron como sede la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes y su Departamento de Matemáticas. Además contamos con el apoyo de un grupo de colegas de las principales universidades del país. La Asociación Matemática Venezolana y la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, agradecen a todos los colegas e instituciones que hicieron posible la realización de estas actividades.

La delegación venezolana estuvo integrada por:

David Urdaneta. Maracaibo. Medalla de Bronce.

Estefanía Ordaz. Puerto La Cruz. Mención Honorífica

Cheryl Sánchez. Altos Mirandinos

Angel López. Tutor de Delegación. Universidad de Carabobo.

Eduardo Sarabia. Jefe de Delegación. UPEL-IPC.

El tercer evento a reseñar es la 48^a Olimpiada Internacional de Matemáticas realizada del 19 al 31 de Julio en Hanoi Vietnam. La delegación venezolana estuvo integrada por:

Sofía Taylor. Caracas. Mención Honorífica

Gilberto Urdaneta. Maracaibo.

Carmela Acevedo. Caracas.

Laura Vielma. Tutor de delegación. U. de Los Andes. Colombia.

Rafael Sánchez. Jefe de delegación. UCV.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de 48^a IMO. Cada examen tiene una duración de cuatro horas y media y el valor de cada problema es de 7 puntos.

48^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día

Hanoi, Vietnam, 25 de Julio de 2007

Problema 1

Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales. Para cada i ($1 \leq i \leq n$) se define

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

y sea

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Demostrar que para cualesquiera números reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Demostrar que existen números reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ para los cuales se cumple la igualdad en (*).

Problema 2

Se consideran cinco puntos A, B, C, D y E tales que $ABCD$ es un paralelogramo y $BCED$ es un cuadrilátero cíclico y convexo. Sea ℓ una recta que pasa por A . Supongamos que ℓ corta al segmento DC en un punto interior F y a la recta BC en G . Supongamos también que $EF = EG = EC$.

Demostrar que ℓ es la bisectriz del ángulo DAB .

Problema 3

En una competencia de matemáticas algunos participantes son amigos. La amistad es siempre recíproca. Decimos que un grupo de participantes es una *clique* si dos cualesquiera de ellos son amigos. (En particular, cualquier grupo con menos de dos participantes es una clique). Al número de elementos de una clique se le llama *tamaño*. Se sabe que en esta competencia el mayor de los tamaños de las cliques es par.

Demostrar que los participantes pueden distribuirse en dos aulas, de manera que el mayor de los tamaños de las cliques contenidas en un aula sea igual al mayor de los tamaños de las cliques contenidas en la otra.

Segundo día

Hanoi, Vietnam, 26 de Julio de 2007

Problema 4

En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BCA corta a la circunferencia circunscrita en R ($R \neq C$), a la mediatriz de BC en P y a la mediatriz de AC en Q . El punto medio de BC es K y el punto medio de AC es L . Demostrar que los triángulos RPK y RQL tienen áreas iguales.

Problema 5

Sean a y b enteros positivos tales que $4ab - 1$ divide a $(4a^2 - 1)^2$. Demostrar que $a = b$.

Problema 6

Sea n un entero positivo. Se considera

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

como un conjunto de $(n + 1)^3 - 1$ puntos en el espacio tridimensional. Determinar el menor número posible de planos cuya unión contiene todos los puntos de S pero no incluye a $(0, 0, 0)$.

INFORMACIÓN NACIONAL

XXI JORNADAS VENEZOLANAS DE MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL “LISANDRO ALVARADO”

Barquisimeto, 10 al 13 de marzo de 2008

COMITÉ ORGANIZADOR

Sergio Muñoz (Coordinador-UCLA)

smunoz@uicm.ucla.edu.ve

Adalys Álvarez (UNA)

adalys.alvarez@gmail.com

Dones Colmenárez (UPEL)

donesc25@yahoo.com

Ramón Gómez (UCLA)

gomezra@cantv.net

Ismael Huerta (UCLA)

ihuerta@uicm.ucla.edu.ve

Douglas Jiménez (UNEXPO)

dougjim@cantv.net

Isabel Márquez (UCLA)

amastrom@cantv.net

Ángel Mastromartino (UCLA)

amastrom@cantv.net

COMITÉ DE PROGRAMA

Neptalí Romero (Coordinador-UCLA)

nromero@uicm.ucla.edu.ve

Mercedes Arriojas (UCV)

marrioja@euler.ciens.ucv.ve

Stefania Marcantognini (IVIC)

smarcant@ivic.ve

Gerardo Mendoza (Temple University)

gmendoza@math.temple.edu

Sergio Muñoz (UCLA)

smunoz@uicm.ucla.edu.ve

Juan Rada (ULA)

juanrada@ula.ve

Ennis Rosas (UDO)

erosas@sucre.udo.edu.ve

LLAMADO A SESIONES TEMÁTICAS

Las Jornadas Venezolanas de Matemáticas son organizadas por sesiones temáticas. Con el presente anuncio se abre el llamado para las propuestas de las mismas. éstas deben venir acompañadas de una lista de al menos cinco investigadores del área, quienes participarán como algunos de los expositores de la sesión; además, se debe indicar al coordinador(es) de la sesión. Las propuestas deben ser formuladas vía electrónica a cualquier miembro del Comité de Programa.

FECHAS IMPORTANTES

- Proposición de apertura de Sesiones: hasta 19 de octubre de 2007.
- Selección de Sesiones por el Comité de Programa: 26 de octubre de 2007.
- Envío de resúmenes a coordinadores de Sesiones: hasta 30 de noviembre de 2007.
- Notificación de la aceptación de resúmenes: hasta 10 de enero de 2008.

INFORMACIÓN NACIONAL

XXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS-EMALCA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Mérida, 3 al 9 de septiembre de 2008.

Cursos

1. **Análisis de datos con métodos bayesianos.**
Lelys Bravo e Isabel LLatas (Univerisdad Simón Bolívar, Caracas)
2. **Teoría de Ramsey y aplicaciones a espacios de Banach.**
Carlos Di Prisco (IVIC, Caracas) y Jordi López Abad (Univ. de Paris VII)
3. **Ecuaciones diofantinas.**
Florián Luca (UNAM, Morelia)
4. **Complex methods in higher dimensions.**
Wolfgang Tutschke (Universidad de Graz) y Carmen Vanegas (Universidad Simón Bolívar, Caracas)

Comité Organizador

Stella Brassesco (Coordinadora) (sbrasses@ivic.ve)

Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.

Oswaldo Araujo (araujo@ula.ve)

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes.

Neptalí Romero (nromero@uicm.ucla.edu.ve)

Departamento de Matemáticas, Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado.

Comité Científico

Stella Brassesco (sbrasses@ivic.ve)

Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.

Marisela Dominguez (mdomin@euler.ciens.ucv.ve)

Universidad Central de Venezuela

Neptalí Romero (nromero@uicm.ucla.edu.ve)

Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado

Jose Giménez (jgimenez@ula.ve)

Universidad de Los Andes

Domingo Quiroz (dquiroz@usb.ve)

Universidad Simón Bolívar

Ennis Rosas (erosas@sucre.udo.edu.ve)

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente

Comité Organizador Local**Oswaldo Araujo (Coordinador)** (araujo@ula.ve)

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes

María Luisa Colasante (marucola@ula.ve)

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes

Ramón Pino (pino@ula.ve)

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes

Giovanni Calderón (giovanni@ula.ve)

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes

Blasdimir Ruiz (bladismir@ula.ve)**José Giménez** (jgimenez@ula.ve)

Universidad de Los Andes

Cada curso tendrá una duración de veinte horas. Esperamos contar con financiamiento de FONACIT, IVIC, Universidad Simón Bolívar, Universidad de Los Andes (todas estas instituciones de Venezuela), y del CIMPA a través de UMALCA. El financiamiento de CIMPA se usará para participantes provenientes de otros países de la región, principalmente de Centro América y El Caribe, y si es imprescindible, para cubrir parcialmente los gastos de transporte de profesores europeos.

Información y recepción de solicitudes de financiamiento para estudiantes en <http://cea.ivic.ve/evm>. Abierta la recepción de propuestas para cursos para la XXII EVM (2009).

AGRADECIMIENTO

Nuestra gratitud por la colaboración prestada, en el trabajo editorial del volumen XIV del Boletín de la AMV, a las siguientes personas:

**Adrián Andrada, María Luisa Colasante, Juan Guevara,
Manuel Saorín y Jorge Vielma**

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs. 10.000 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs. 10.000 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XIV, Números 1 y 2, Año 2007

PRESENTACIÓN	3
ARTÍCULOS	
The geometric structure of the Pareto distribution Linyu Peng, Huafei Sun & Lin Jiu	5
Geometry on the space of positive functions Henryk Gzyl & Lázaro Recht	15
A mathematical model for core–annular fluids with surfactants Said Kas-Danouche	27
DIVULGACIÓN MATEMÁTICA	
Sophus Lie: Un matemático visionario Verónica Martín, Juan Núñez & Ángel F. Tenorio	41
INFORMACIÓN NACIONAL	
Carlos Uzcátegui, Premio Lorenzo Mendoza Fleury 2007 Carlos Di Prisco	55
La esquina olímpica Rafael Sánchez	61
XXI Jornadas Venezolanas de Matemáticas	65
XXI EVM – EMALCA 2008	67
AGRADECIMIENTO	69