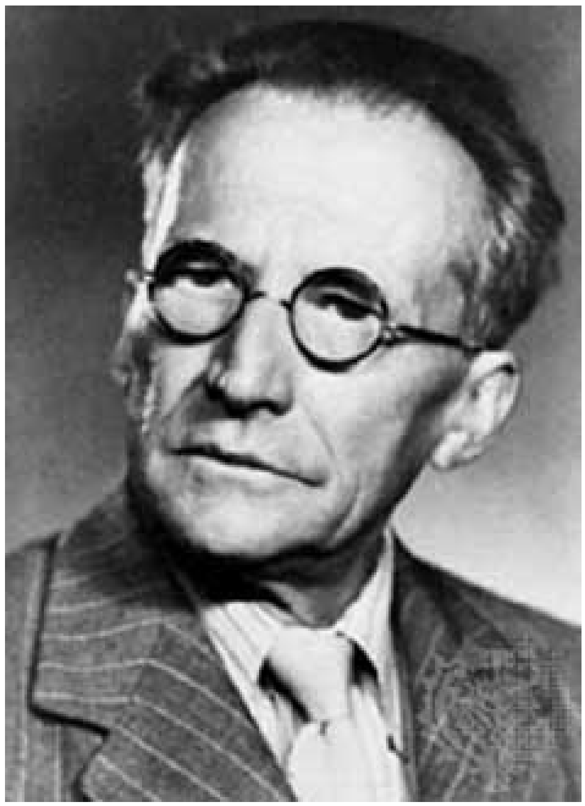

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887 - 1961)

Vol. XVI • No. 2 • Año 2009

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVI, Número 2, Año 2009
I.S.S.N. 1315–4125

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
`http://amv.ivic.ve/` .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Vol. XVI • No. 2 • Año 2009

Comenzamos el segundo número del volumen XVI de nuestro Boletín, correspondiente al año 2009, con nuestra sección de artículos. El primero de ellos es de Saúl Buitrago y Raúl Manzanilla, "A fase IMFES formulation for solving 1D three-fase black-oil equations", en el cual nos presentan una nueva propuesta para resolver las ecuaciones de flujo que gobiernan el modelo de tres fases de petróleo en medios porosos. A seguir Muhafzan resuelve la versión singular del problema de control LQ estándar en su trabajo, "SDF approach for solving LQ control problem subject to implicit system"; cerramos esta sección con el artículo, "Operador de Gram asociado al operador de Schrödinger con potencial puntual", de Vladimir Strauss y Javier Villamizar donde calculan el operador de Gram asociado a una forma bilineal generada por un particular tipo de operador definido sobre un cierto espacio de Sobolev. A continuación Lucio Berrone nos reseña sobre "La correspondencia entre Beppo Levi y Mischa Cotlar".

Beppo Levi (1875–1961) estudió en la Universidad de Turín, donde se doctoró en matemáticas a los 21 años. Fue uno de los ilustres matemáticos de finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Trabajó con Giuseppe Peano y con Vito Volterra. Publicó numerosos artículos y libros sobre temas de matemática, física, historia y didáctica. Italia le reconoció su contribución científica nombrándolo miembro de las Academias de Bolonia y Dei Lincei. En 1938, por ser judío, fué expulsado de la universidad. El decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Rosario, Argentina, Ingeniero Cortés Plá, en 1939, lo invitó a trasladarse al país y creó, para él, el Instituto de Matemática de dicha facultad en la Universidad Nacional de Rosario, donde trabajó desde 1939 hasta el año 1961. En homenaje a su memoria ese instituto lleva, hoy, su nombre.

En la encomiable labor desempeñada por Beppo Levi en Rosario destaca, también, la fundación, en 1940, de Mathematicae Notae, primera revista de matemática de Argentina, y Publicaciones del Instituto de Matemática. Es precisamente en Publicaciones donde aparecen dos de los primeros trabajos de Mischa Cotlar(1936–2006) y cuya gestación es analizada por Berrone.

En la sección de Información nacional presentamos un obituario dedicado a la memoria de nuestro colega y amigo Diomedes Bárcenas (1919-2009). Rafael Sánchez en su acostumbrada Esquina olímpica nos comenta sobre los 50 años de actividad de La olimpiada internacional de matemáticas (IMO, por sus siglas en inglés) celebrados, en julio del 2009, en Alemania y del desempeño de la delegación venezolana en la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC), y en la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM). Nuestras felicitaciones para Mauricio Marcano y Carmela Acevedo que obtuvieron Mención honorífica en la OMCC, y a Carlos Lamas, Medalla de bronce, y a Edenys Hernao, Mención honorífica, ambos logros conseguidos en la OIM. Además incluimos, en esta sección, el segundo anuncio sobre XXIII Jornadas Venezolanas de Matemáticas a realizarse en la sede de la Universidad

Simón Bolívar, en Caracas, el próximo mes de abril.

Finalmente, expresamos nuestro agradecimiento a los colegas que, gracias a su colaboración, han hecho posible la edición del volumen XVI, 2009, de este Boletín

Oswaldo Araujo G.

A FAST IMFES FORMULATION FOR SOLVING 1D THREE-PHASE BLACK-OIL EQUATIONS

Saúl Buitrago and Raúl Manzanilla

Abstract. A new approach for solving the flux equations governing a three-phase black-oil model in porous media is proposed. The approach consists of solving the total flux implicitly and the saturations explicitly. This formulation avoids solving a costly second order differential equation in pressure. In the proposed approach, the total flux is expressed as an asymptotic expansion of ascending powers of the total fluid compressibility. Contributions to the total flux are obtained from solving first order differential equations (gradient and divergence operators). Discretizing these operators by finite differences, the resulting linear system coefficients are fixed during the whole simulation.

Resumen. Se propone nuevo enfoque para la solución de las ecuaciones de flujo que gobiernan el modelo de tres fases de petróleo en medios porosos. El enfoque consiste en resolver el total de flujo de forma implícita y la saturación de forma explícita. De esta forma se evita la solución de una costosa ecuación diferencial de segundo orden en la presión. En el enfoque propuesto, el flujo total se expresa como una expansión asintótica de potencias crecientes de la compresibilidad total del fluido. Las contribuciones al flujo total se obtienen de la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden (los operadores gradiente y divergencia). Discretizando los operadores por diferencias finitas, resulta en un sistema lineal de coeficientes fijos durante toda la simulación.

1 Introduction

Nowadays, there is an increasing demand for performing fast reservoir simulation studies. This has been mainly driven by the need to model larger reservoirs (consisting of millions of gridblocks) and to perform as many realizations as possible in order to quantify the uncertainty associated to the exploitation plans (see [1,3,4,8,9]). Parallel computing strategies have been an important vehicle to achieve this goal. On the other hand, new numerical paradigms may provide an alternative solution to this problem. An approach for solving the flux in porous media equations governing a three-phase black-oil model is proposed. The approach consists of solving the total flux implicitly and the saturations explicitly. Pressures are then computed directly from the total flux without incurring in a significant additional cost. In contrast to more conventional approaches (see [1,2,3,4]), this formulation avoids solving a costly second order differential equation in pressure. Compared to streamline codes, this formulation includes solubility of gas, gravity and capillary pressures. In fact, solutions are not restricted to lower dimensional domains (streamtubes). In the proposed approach, the total flux is expressed as an asymptotic expansion of ascending powers of the total fluid compressibility. Contributions to the total flux are obtained from solving first order differential equations (gradient and divergence operators). Discretizing these operators by finite differences, the resulting linear system coefficients are fixed during the whole simulation. The method is amenable for carrying out only one matrix factorization at the beginning of the simulation, allowing to reduce the number of floating point operations for solving the associated linear system in each time step.

2 The fluid flow equations

Darcy's law states that the volumetric flow rate Q of a homogeneous fluid through a porous medium is proportional to the pressure (or hydraulic gradient) and to the cross-sectional area A normal to the direction of flow and inversely proportional to the viscosity μ of the fluid (see [1,2,3,4]). The law defines a concept of permeability K of the rock, which quantifies the ability of the rock to transmit fluid. We can write the superficial fluid velocity of the phase l (Darcy velocity u_l) with $l = o, w, g$ (oil, water and gas respetively) by

$$u_l \;=\; K_x \, \frac{K_{rl}}{\mu_l} \, \frac{\partial P_l}{\partial x} \;, \tag{1}$$

where P_l is the fluid pressure for phase l in psi, μ_l is the viscosity of phase l in cp, K_{rl} is the relative permeability of phase l between 0 and 1, and K_x is an absolute permeability in units of milidarcies (length squared).

The mathematical models for displacement process (1 dimensional 3 phases) considered in this work, equations (2) below, are partial differential equations of convection-diffusion type, under the asumption of no gas solubility in water (i.e. $R_{sw} = 0$).

That is,

$$\frac{\partial}{\partial x}[K_x(\frac{\lambda_o}{B_o})\frac{\partial P_o}{\partial x}] - \frac{q_o}{\rho_{osc}} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\frac{S_o}{B_o}) \tag{2A}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[K_x(\frac{\lambda_w}{B_w})\frac{\partial P_w}{\partial x}] - \frac{q_w}{\rho_{wsc}} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\frac{S_w}{B_w}) \tag{2B}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[K_x(\frac{\lambda_g}{B_g})\frac{\partial P_g}{\partial x} + R_{so}K_x(\frac{\lambda_o}{B_o})\frac{\partial P_o}{\partial x}] - \frac{q_g}{\rho_{gsc}} = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\frac{S_g}{B_g} + R_{so}\frac{S_o}{B_o})], \tag{2C}$$

with the mobility of the phase i $\lambda_i = K_{ri}/\mu_i$, for $i = o, w, g$.

The system (2) is taken to hold over a bounded domain Ω, representing a reservoir or part of a reservoir, through a time interval $[0, T]$. The equations (2A-2C) are coupled via the constraints

$$S_o + S_w + S_g = 1, \tag{2D}$$

$$P_{cow} = P_o - P_w \quad \text{and} \quad P_{cgo} = P_g - P_o \ , \tag{2E}$$

where S_i, $i = o, w, g$ are saturations for each phase, P_{cow} and P_{cgo} the oil-water and gas-oil capillary pressures, respectively.

Phase densities are related to formation volume factors and gas solubilities by

$$\rho_o = \frac{1}{B_o}[\rho_{osc} + R_{so}\rho_{gsc}] \ , \tag{2F}$$

$$\rho_w = \frac{\rho_{wsc}}{B_w} \ , \tag{2G}$$

$$\rho_g = \frac{\rho_{gsc}}{B_g} \ . \tag{2H}$$

The system (2) requires boundary and initial conditions. In reservoir modeling, the usual boundary conditions are no-flow, representing an axis of simmetry or an impermeable boundary, or constant pressure, applicable when the reservoir is repressurized at the boundary during depletion, say by an aquifer.

The oil, water, gas and rock compressibilities are defined as

$$c_o = -\frac{1}{B_o}\frac{\partial B_o}{\partial P_o} + \frac{B_g}{B_o}\frac{\partial R_{so}}{\partial P_o}, \tag{2I}$$

$$c_w = -\frac{1}{B_w}\frac{\partial B_w}{\partial P_o}, \tag{2J}$$

$$c_g = -\frac{1}{B_g}\frac{\partial B_g}{\partial P_o}, \tag{2K}$$

$$c_r = -\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial P_o}, \qquad (2L)$$

and the total compressibility

$$c_t = c_r + c_o S_o + c_w S_w + c_g S_g \ . \qquad (2M)$$

Definition 1: From the diffusion terms from equations (2A) to (2C), let define L_o, L_w and L_g for the oil, water and gas fases as follows

$$L_o = \frac{\partial}{\partial x}[K_x(\frac{\lambda_o}{B_o})\frac{\partial P_o}{\partial x}], \quad L_w = \frac{\partial}{\partial x}[K_x(\frac{\lambda_w}{B_w})\frac{\partial P_w}{\partial x}],$$

$$L_g = \frac{\partial}{\partial x}[K_x(\frac{\lambda_g}{B_g})\frac{\partial P_g}{\partial x}]. \qquad (3)$$

Observation: The oil, water and gas fluid velocities, according to equations (1), (2E) and the definitions of λ_o, λ_w and λ_g, can be rewritten as follows

$$u_o = K_x \frac{K_{ro}}{\mu_o}\frac{\partial P_o}{\partial x} = K_x \lambda_o \frac{\partial P_o}{\partial x} \ , \qquad (4A)$$

$$u_w = K_x \frac{K_{rw}}{\mu_w}\frac{\partial P_w}{\partial x} = K_x \lambda_w \frac{\partial P_w}{\partial x} = K_x \lambda_w [\frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_{cow}}{\partial x}] \ , \qquad (4B)$$

$$u_g = K_x \frac{K_{rg}}{\mu_g}\frac{\partial P_g}{\partial x} = K_x \lambda_g \frac{\partial P_g}{\partial x} = K_x \lambda_g [\frac{\partial P_o}{\partial x} + \frac{\partial P_{cgo}}{\partial x}] \ . \qquad (4C)$$

Lemma 1: L_o, L_w and L_g can be expressed in function of u_o, u_w and u_g the oil, water and gas fluid velocities respectively, by

$$L_o = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_o}u_o], \quad L_w = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_w}u_w], \quad L_g = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_g}u_g + \frac{R_{so}}{B_o}u_o] \ . \qquad (5)$$

Proof: it follows easily from (3), (1) and the definition of phase mobility λ_i. $\diamond$

Definition 2: Let define the total flow velocity u_t by

$$u_t = u_o + u_w + u_g \qquad (6)$$

where u_o, u_w and u_g are the oil, water and gas fluid velocities respectively.

Definition 3: Let define the total mobility λ_t by

$$\lambda_t = \lambda_o + \lambda_w + \lambda_g \qquad (7)$$

where λ_o, λ_w and λ_g are the oil, water and gas fluid mobilities repectively.

Lemma 2: The total flow velocity u_t can be expressed as

$$u_t \;=\; K_x \lambda_t \frac{\partial P_o}{\partial x} + K_x (\lambda_g \frac{\partial P_{cgo}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cow}}{\partial x}) \;. \tag{8}$$

Proof: it follows easily from the definition of the total velocity u_t, the total mobility λ_t and equations (4). $\diamond$

Lemma 3: The oil pressure gradient $\frac{\partial P_o}{\partial x}$ can be expressed as

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\lambda_t} {K_x}^{-1} [u_t - K_x (\lambda_g \frac{\partial P_{cgo}}{\partial x} - \lambda_w \frac{\partial P_{cow}}{\partial x})] \;. \tag{9}$$

Proof: Equation (9) for the oil pressure gradiente follows directly from (8). $\diamond$

Lemma 4: The u_o, u_w and u_g oil, water and gas fluid velocities respectively can be expressed as

$$u_o \;=\; \frac{\lambda_o}{\lambda_t} u_t + C_{og} + C_{ow} \;, \tag{10}$$

$$u_w \;=\; \frac{\lambda_w}{\lambda_t} u_t + C_{wg} - C_{ow} \;, \tag{11}$$

$$u_g \;=\; \frac{\lambda_g}{\lambda_t} u_t - C_{wg} - C_{og} \;, \tag{12}$$

where C_{og}, C_{ow} and C_{wg} group the capilarity terms.
Proof: Replacing (9) in (4A), (4B) and (4C), and after some calculations follows equations (10), (11) and (12) respectively by setting

$$C_{og} \;=\; -K_x \frac{\lambda_o \lambda_g}{\lambda_t} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial x} \;, \qquad C_{ow} \;=\; K_x \frac{\lambda_o \lambda_w}{\lambda_t} \frac{\partial P_{cow}}{\partial x} \;,$$

$$C_{wg} \;=\; K_x \frac{\lambda_w \lambda_g}{\lambda_t} (-\frac{\partial P_{cgo}}{\partial x} - \frac{\partial P_{cow}}{\partial x}) \;. \diamond$$

Lemma 5: The oil pressure gradient can be expressed as a function of the total flow velocity u_t and the total mobility λ_t by

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\lambda_t} K_x^{-1} u_t + T, \tag{13A}$$

where T depends on C_{og}, C_{ow}, C_{wg}, λ_o, λ_w and λ_g.

Proof: From equation (9), the oil pressure gradient yields (13A) with

$$T = \frac{1}{2\lambda_o K_x} \left(\frac{1}{\lambda_w}[\lambda_w C_{og} + \lambda_g C_{ow} + \lambda_o C_{wg}] + \frac{1}{\lambda_g}[\lambda_w C_{og} + \lambda_g C_{ow} - \lambda_o C_{wg}]\right), \tag{13B}$$

using the definitions for C_{og}, C_{ow} and C_{wg} from Lemma 4. $\diamond$

Definition 4: Let define c_f the total fluid compressibility as follows

$$c_f = c_o + c_w + c_g. \tag{14}$$

Lemma 6: Using the definitions of L_o, L_w y L_g, the linear combination $(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_w L_w + B_g L_g$ becomes

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_w L_w + B_g L_g \; =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_t + \frac{1}{\lambda_t^2} c_f \beta_\lambda K_x^{-1} u_t^2 + [\frac{K_x^{-1}}{\lambda_t} c_f \beta_C + \frac{T}{\lambda_t} c_f \beta_\lambda] u_t + T c_f \beta_C \tag{15A}$$

with

$$\alpha_o = \frac{c_o}{c_f}, \quad \alpha_w = \frac{c_w}{c_f}, \quad \alpha_g = \frac{c_g}{c_f},$$

$$\beta_\lambda \; = \; \lambda_o \alpha_o + \lambda_w \alpha_w + \lambda_g \alpha_g \; ,$$

$$\beta_C \; = \; \alpha_o (C_{og} + C_{ow}) + \alpha_w (C_{wg} - C_{ow}) - \alpha_g (C_{wg} + C_{og}) \; .$$

Proof: Using the definitions for L_o, L_w y L_g, given in (5), and the definition of the total velocity u_t, then

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_w L_w + B_g L_g \; =$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial x} + B_o \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_o}] u_o + B_w \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_w}] u_w + B_g \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_g}] u_g + \frac{B_g}{B_o} u_o \frac{\partial R_{so}}{\partial x} \; .$$

From the fact B_i, $i = o, w, g$, and R_{so} are functions of P_o,

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_i}] = -\frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial x} = -\frac{1}{B_i^2} \frac{\partial B_i}{\partial P_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \; ,$$

and introducing the definitions of the fluid compressibilities equations (2I) to (2K), the following expresion arises

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_w L_w + B_g L_g = \frac{\partial u_t}{\partial x} + c_o \frac{\partial P_o}{\partial x} u_o + c_w \frac{\partial P_o}{\partial x} u_w + c_g \frac{\partial P_o}{\partial x} u_g \; .$$

Using equation (13A) for the oil pressure gradient and the equations (10), (11) and (12) for u_o, u_w and u_g respectively

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_wL_w + B_gL_g = \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_t^2}(\lambda_oc_o + \lambda_wc_w + \lambda_gc_g)K_x^{-1}u_t^2$$

$$+[\frac{K_x^{-1}}{\lambda_t}(c_o(C_{og} + C_{ow}) + c_w(C_{wg} - C_{ow}) + c_g(-C_{wg} - C_{og})$$

$$+\frac{T}{\lambda_t}(\lambda_oc_o+\lambda_wc_w+\lambda_gc_g)]u_t+T(c_o(C_{og}+C_{ow})+c_w(C_{wg}-C_{ow})+c_g(-C_{wg}-C_{og})).$$

Introducing the definitions for α_o, α_w, α_g, β_λ and β_C, in addition to definition 4 for c_f, follows

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_wL_w + B_gL_g \; =$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_t^2}c_f\beta_\lambda K_x^{-1}u_t^2 + [\frac{K_x^{-1}}{\lambda_t}c_f\beta_C + \frac{T}{\lambda_t}c_f\beta_\lambda]u_t + Tc_f\beta_C \; . \; \diamond$$

Now we take a look at the accumulation terms, i.e. equations (2A) to (2C).

Definition 5: Let define R_o, R_w and R_g for the oil, water and gas fases as follows

$$R_o \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(\phi\frac{S_o}{B_o}), \quad R_w \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(\phi\frac{S_w}{B_w}), \quad R_g \;=\; \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\frac{S_g}{B_g} + R_{so}\frac{S_o}{B_o})] \; .$$

Lemma 7: Using the definitions of R_o, R_w y R_g, follows

$$(B_o - R_{so}B_g)R_o + B_wR_w + B_gR_g \;=\; \phi c_t\frac{\partial P_o}{\partial t} \; , \qquad (15B)$$

with $c_t \;=\; c_f\;\beta_S$, $\beta_S \;=\; \alpha_r + \alpha_oS_o + \alpha_wS_w + \alpha_gS_g$, $\alpha_r \;=\; c_r/c_f$.
Proof: Recognizing that the formation volume factor, gas solubilities and porosity are functions of pressure, we use the chain rule to expand the accumulation terms of equations (2A) through (2C), representing in this case by R_o, R_w y R_g (see definition 5),

$$R_o \;=\; \frac{\phi}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} + [\frac{S_o}{B_o}\frac{\partial\phi}{\partial P_o} - \frac{S_o\phi}{{B_o}^2}\frac{\partial B_o}{\partial P_o}]\frac{\partial P_o}{\partial t},$$

$$R_w \;=\; \frac{\phi}{B_w}\frac{\partial S_w}{\partial t} + [\frac{S_w}{B_w}\frac{\partial\phi}{\partial P_o} - \frac{S_w\phi}{{B_w}^2}\frac{\partial B_w}{\partial P_o}]\frac{\partial P_o}{\partial t},$$

$$R_g = \frac{\phi}{B_g}\frac{\partial S_g}{\partial t} + [\frac{S_g}{B_g}\frac{\partial \phi}{\partial P_o} - \frac{S_g\phi}{{B_g}^2}\frac{\partial B_g}{\partial P_o}]\frac{\partial P_o}{\partial t}$$
$$+\frac{\phi R_{so}}{B_o}\frac{\partial S_o}{\partial t} + [\frac{S_o R_{so}}{B_o}\frac{\partial \phi}{\partial P_o} + \frac{\partial \phi S_o}{B_o}\frac{\partial R_{so}}{\partial P_o} - \frac{\phi S_o R_{so}}{{B_o}^2}\frac{\partial B_o}{\partial P_o}]\frac{\partial P_o}{\partial t}.$$

The equality $S_o + S_w + S_g = 1$ is now used to remove $\frac{\partial S_g}{\partial t}$ from the equations for R_g, i.e. $\frac{\partial S_g}{\partial t} = -\frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\partial S_w}{\partial t}$.
Substituting the last equation into equation for R_g and simplifying yields

$$R_g = (\frac{\phi R_{so}}{B_o} - \frac{\phi}{B_g})\frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\phi}{B_g}\frac{\partial S_w}{\partial t}$$
$$+[\frac{S_g}{B_g}\frac{\partial \phi}{\partial P_o} - \frac{S_g\phi}{{B_g}^2}\frac{\partial B_g}{\partial P_o} + \frac{S_o R_{so}}{B_o}\frac{\partial \phi}{\partial P_o} + \frac{\partial \phi S_o}{B_o}\frac{\partial R_{so}}{\partial P_o} - \frac{\phi S_o R_{so}}{{B_o}^2}\frac{\partial B_o}{\partial P_o}]\frac{\partial P_o}{\partial t} .$$

Multiplying R_o by $(B_o - R_{so}B_g)$, R_w by B_w, and R_g by B_g, and adding the results gives

$$(B_o - R_{so}B_g)R_o + B_w R_w + B_g R_g =$$
$$= [(S_g+S_w+S_o)\frac{\partial \phi}{\partial P_o} - \frac{\phi S_g}{B_g}\frac{\partial B_g}{\partial P_o} + \phi S_o(\frac{B_g}{B_o}\frac{\partial R_{so}}{\partial P_o} - \frac{1}{B_o}\frac{\partial B_o}{\partial P_o}) - \phi S_w\frac{1}{B_w}\frac{\partial B_w}{\partial P_o}]\frac{\partial P_o}{\partial t} .$$

Employing the definitions for the oil, water, gas, rock and total compressibilities from equations (2I) through (2M) gives

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_w L_w + B_g L_g = \phi c_t \frac{\partial P_o}{\partial t} . \ \diamond$$

Definition 6: Let define the total rate q_t by

$$q_t = \frac{B_o q_o}{\rho_{osc}} + \frac{B_w q_w}{\rho_{wsc}} + B_g(\frac{q_g}{\rho_{gsc}} - \frac{R_{so}q_o}{\rho_{osc}}) . \tag{16}$$

Theorem 1: The systems of equations (2) is equivalent to the system

$$\frac{\partial}{\partial x}u_t + c_f A K_x^{-1} u_t^2 + c_f B u_t + c_f D - q_t = c_f E \frac{\partial P_o}{\partial t} \tag{17A}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}P_o = \frac{1}{\lambda_t}K_x^{-1}u_t + T \tag{17B}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_o}u_o] - \frac{q_o}{\rho_{osc}} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\frac{S_o}{B_o}) \tag{17C}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{B_w}u_w] - \frac{q_w}{\rho_{wsc}} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \frac{S_w}{B_w}) \qquad (17D)$$

$$S_o + S_w + S_g = 1, \qquad (17E)$$

with q_t given in definition 6, T in (13B),

$$A = \frac{1}{\lambda_t^2}\beta_\lambda \ , \quad B = \frac{K_x^{-1}}{\lambda_t}\beta_C + T\frac{\beta_\lambda}{\lambda_t} \ , \quad D = T\beta_C \ , \quad E = \phi\beta_S \ .$$

Proof: Multiplying equation (2A) by $(B_o - R_{so}B_g)$, equation (2B) by B_w, and equations (2C) by B_g, adding the results and doing some algebra gives

$$(B_o - R_{so}B_g)L_o + B_wL_w + B_gL_g - (B_o - R_{so}B_g)\frac{q_o}{\rho_{osc}} - B_w\frac{q_w}{\rho_{wsc}} - B_g\frac{q_g}{\rho_{gsc}} =$$

$$(B_o - R_{so}B_g)R_o + B_wR_w + B_gR_g$$

employing definitions 1 and 5.
Using equations (15A-B) and (16) the last equation becomes

$$\frac{\partial}{\partial x}u_t + \frac{1}{\lambda_t^2}c_f\beta_\lambda K_x^{-1}u_t^2 + [\frac{K_x^{-1}}{\lambda_t}c_f\beta_C + \frac{T}{\lambda_t}c_f\beta_\lambda]u_t + Tc_f\beta_C - q_t = \phi c_f\beta_S\frac{\partial P_o}{\partial t} \ .$$

Defining

$$A = \frac{1}{\lambda_t^2}\beta_\lambda \ , \quad B = \frac{K_x^{-1}}{\lambda_t}\beta_C + T\frac{\beta_\lambda}{\lambda_t} \ , \quad D = T\beta_C \ , \quad E = \phi\beta_S$$

finally the last equation becomes (17A), that is to say

$$\frac{\partial}{\partial x}u_t + c_fAK_x^{-1}u_t^2 + c_fBu_t + c_fD - q_t = c_fE\frac{\partial P_o}{\partial t} \ ,$$

which is complemented with equation (13A), in other words equation (17B)

$$\frac{\partial}{\partial x}P_o = \frac{1}{\lambda_t}K_x^{-1}u_t + T \ .$$

Equations (17C-D) follow from sustitution of equations (3A-B) and (5A-B) into (2A-B), and equation (17E) corresponds to (2D). $\diamond$

Observation: The system (17) is complemented with equations (10) to (12) in lemma 4, which relate u_t with the phase velocities u_o, u_w and u_g.
System (17) represents a way to decouple the original system (2) in such a way that equations (17A-B) could be used to calculate P_o and u_t alone, and get S_o and S_w from equations (17C-D) and fianlly S_g from (17E). This idea is based on the well-known IMPES formulation for the black oil equations (see [1-3]).

The solution precedure to system (17) will be discussed in subsequent sections.

3 Solving the fluid flow equations

The proposed approach to solve the system (17A-B) is to express the total flux as an asymptotic expansion of ascending powers of the total fluid compressibility called here ϵ. Assuming $\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$, u_t can be written as

$$u_t \;=\; u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2, \qquad (18A)$$

with

$$u_0 \;=\; \lambda_t K_x(\frac{\partial P_0}{\partial x} - T), \quad u_1 \;=\; \lambda_t K_x \frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad u_2 \;=\; \lambda_t K_x \frac{\partial P_2}{\partial x}, \qquad (18B)$$

where P_0, P_1 and P_2 are pressures associated to the velocities u_0, u_1 and u_2 respectively. It can be done because the total flow velocity u_t depends on the total fluid compressibility c_f, being c_f linear on x for weakly compressible flow in porous media.
It follows from equation (17B), (18A) and (18B) that

$$\lambda_t K_x(\frac{\partial P_o}{\partial x} - T) = \lambda_t K_x(\frac{\partial P_0}{\partial x} - T) + \epsilon \lambda_t K_x \frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \lambda_t K_x \frac{\partial P_2}{\partial x},$$

that is,

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} \;=\; \frac{\partial P_0}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial P_2}{\partial x} \;. \qquad (19A)$$

Finally, it can be assumed without loss of generality that

$$P_o \;=\; P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 \;. \qquad (19B)$$

Replacing equations (17B), (19A) and (19B) in (17A)

$$\frac{\partial}{\partial x}[\lambda_t K_x(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - T)] + \epsilon A K_x^{-1}[\lambda_t K_x(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - T)]^2$$

$$+\epsilon B \lambda_t K_x(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial P_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - T) + \epsilon D - q_t \;=\; \epsilon E \frac{\partial (P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2)}{\partial t} \;.$$

Gathering terms according to powers of epsilon, i.e. ϵ^0, ϵ^1 and ϵ^2, and Using the definitions of u_0, u_1 and u_2 given by (18B), follows the set of equations

$$u_0 - \lambda_t K_x \frac{\partial P_0}{\partial x} \;=\; -\lambda_t K_x T \;, \qquad (20A)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \;=\; q_t \;, \qquad (20B)$$

$$u_1 - \lambda_t K_x \frac{\partial P_1}{\partial x} \;=\; 0\;, \tag{20C}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \;=\; -AK_x^{-1}u_0^2 - Bu_0 - D + E\frac{\partial P_0}{\partial t}\;, \tag{20D}$$

$$u_2 - \lambda_t K_x \frac{\partial P_2}{\partial x} \;=\; 0\;, \tag{20E}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} \;=\; -2AK_x^{-1}u_1u_0 - Bu_1 + E\frac{\partial P_1}{\partial t}\;, \tag{20F}$$

where P_o and u_t are given by

$$P_o \;=\; P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2\;,$$

$$u_t \;=\; u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2\;,$$

with the boundary conditions of zero flux across the boundary, i.e. $u_i = u_t = 0$ for $i = 0, 1, 2$, and zero pressure gradient in the boundary, that is,

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} = \frac{\partial P_o}{\partial x} = 0 \quad \text{for} \quad i = 0, 1, 2\;.$$

From u_t the phase velocities u_o and u_w can be computed using equations (10), (11) and (12). Now the phase saturations are estimated from equations (17C) to (17E).

4 Discretizing the fluid flow equations

The basic idea of any approximation method is to replace the original problem by another problem that is easier to solve and whose solution is, in some sense, close to the solution of the original problem.
The usual approach for discretizing the fluid flow equations entail block centered finite differences with upstream weighting. The upstream weighting is used in the industry because it suppresses nonphysical oscillations in the finite difference solution. The time stepping may be either explicit or implicit.
Each set of two equation in (20) can be seen as

$$\frac{1}{\lambda_t}K_x^{-1}u - \frac{\partial p}{\partial x} \;=\; f\;, \tag{21A}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; g\;. \tag{21B}$$

where p stands P_0, P_1 or P_2, and u stands u_0, u_1 or u_2, and g includes the discretization in time of $\partial p/\partial t$ corresponding to equations (20D) and (20F).

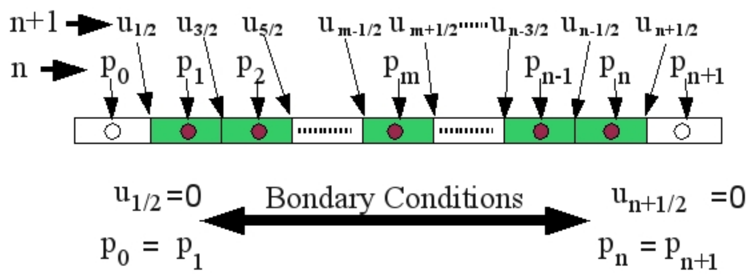

Figure 1: Discretizing the spatial domain (the reservoir) por u and p.

For the proposed equations (21A) and (21B) with boundary conditions of zero flux across the boundary, the methodology to develop will be cell-centered finite difference for the first order spatial operators and implicit forward difference for discretisation in time.
Given N, let $\{x_i\}_{1\leq i\leq N}$ be an uniform subdivision of the spatial domain (the reservoir), with mesh length Δx along the direction x. Let denote $x_{i-1/2} = (x_i - x_{i-1})/2$, $p_i = p(x_i)$ for $1 \leq i \leq N$, $u_{i-1/2} = u(x_{i-1/2})$ for $1 \leq i \leq N-1$ (see Fig.1).
The following are the finite difference used for the first order operators

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_{i+1/2} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq N-1\ , \tag{22A}$$

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{i} = \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} \quad \text{for} \quad 1 \leq i \leq N\ . \tag{22B}$$

The boundary conditions impose

$$u_{1/2} = 0, \quad u_{N+1/2} = 0, \quad p_1 = p_0, \quad p_{n+1} = p_N\ . \tag{23}$$

The discretized system associated to (21) is therefore as follows

$$\frac{1}{\lambda_t K_x}\ u_{i+1/2} - \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} = f(x_{i+1/2})\ , \tag{24A}$$

$$\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} = g(x_i)\ , \tag{24B}$$

for $1 \leq i \leq N$, with the above boundary conditions.
Finally, from (24), the following system of linear equations arises

$$\begin{pmatrix} D & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \tag{25}$$

This is a saddle point formulation. Here D is a diagonal matrix of dimension $N-1$ by $N-1$, B is a matrix of dimension $N-1$ by N and given by

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Here B^t is the transpose of B; U is a vector of dimension $(N-1)$; P is a vector of dimension N; F is a vector of dimension $(N-1)$; and G is a vector of dimension N. By construction B^t is full rank.
Rewriting equation (25) we get the system

$$Du + BP \;=\; F \tag{26A}$$

$$B^t U \;=\; G \tag{26B}$$

The next step is to solve the system (25). Let suppose that exist $\hat{P}$ such that $P = B^t\hat{P}$, and from (26A) the following expression is obtained

$$\hat{P} \;=\; (BB^t)^{-1}(F - DU).$$

Multilpying both sides by B^t and defining $B^+ = B^t(BB^t)^{-1}$, the pseudoinverse of B, it follows that

$$P \;=\; B^+(F - DU).$$

Let suppose that

$$P \;=\; B^+(F - DU) + v \;, \tag{27}$$

for an arbitrary vector v of dimension N.
Substituting equation (27) in (26A) and using the fact that $BB^+ = I$, it follows $Bv = 0$, i.e. v belongs to the null space of B, namely $null(B)$.
An important property of pseudoinverse is that it gives simple expressions for the orthogonal projections onto the four fundamental subspaces of B

$$\begin{aligned} P_{rank(B)} &= BB^+ = I \;, \\ P_{rank(B^t)} &= B^+B \;, \\ P_{null(B^t)} &= I - BB^+ = 0 \;, \\ P_{null(B)} &= I - B^+B \;. \end{aligned}$$

Given $\tilde{P}$, let

$$v = P_{null(B)}\tilde{P} \;. \tag{28}$$

From equation (26B), i.e. $B^tU = G$, multipling by B both sides and using the fact that $(B^t)^+ = (BB^t)^{-1}B$, it follows that

$$U \;=\; (B^t)^+G \;. \tag{29}$$

Replacing (29) in (27) then

$$P \;=\; B^{+}(F - D(B^{t})^{+}G) + v \;, \quad v \in null(B). \tag{30}$$

Finally equations (28), (29) and (30) represent the solution to the discretized equation (26) of the problem (21).

4.1 Calculating saturations

The other equations to be discretized are the phase saturations. After using the same approximation for the first order operators given at the begining of section 4, it follows the vectorial equations for the oil and water saturations

$$S_o \;=\; (V_b \frac{\Delta t}{h} B^t \frac{u_o}{B_o} - \Delta t\; q_o + V_b \phi \frac{S_o}{B_o}) \frac{B_o}{V_b \phi} \tag{31A}$$

$$S_w \;=\; (V_b \frac{\Delta t}{h} B^t \frac{u_w}{B_w} - \Delta t\; q_w + V_b \phi \frac{S_w}{B_w}) \frac{B_w}{V_b \phi} \tag{31B}$$

with V_b a vector of dimension N with entries the volume of each cell, S_o a vector of dimension N with entries $(S_o)_i = S_o(x_i)$, u_o and u_w vectors of dimension $N-1$ with entries of type $u_{i-1/2}$, B_o and B_w vectors of dimension N with entries of type $(B_o)_i = B_o(x_i)$, q_o and q_w vectors of dimension N with entries of type $(q_o)_i = q_o(x_i)$, ϕ a vector of dimension N with entries $\phi_i = \phi(x_i)$, and B a matrix of dimension $(N-1) \times N$ defined before.
The gas saturation follows from equation (2D)

$$S_g \;=\; 1 - S_o - S_w \;, \tag{31C}$$

5 Algorithm for solving the fluid flow equations

For each time step:

1. Solve the three systems of differential equations given by (21) through the methodology for linear systems of type (25).
2. Compute the total velocity $u_t = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2$ and pressure $P_o = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2$.
3. Compute the phase velocities u_o, u_w and u_g according to (10), (11) and (12).
4. Compute the new oil, water and gas saturations, i.e. S_o, S_w and S_g, according to (31).

It is important to note that the matrix B in (25) is fixed along the whole simulation. It provides to the methodology a great advantage over the traditional methods for the solution of the discretized system associated to the fluid flow equations (2). It can be shown that the number of floating point operations associated to find the solution of the linear system can be reduced significantly for each time step. It represents a significant reduction in the number of floating point operations performed to solve the linear system of equations (25) (it will be part of a coming article in the same subject).

6 Conclusions

1. A new methodology to build the solution of the black oil formulation of the fluid flow equations is presented. It includes solubility of gas, gravity and capillary pressures.

2. The use of first order operators (gradient and divergence) leads to simpler approximation schemes.

3. The factorization of the matrix BB^t is carried out only once along the simulation.

4. The number of floating point operations in the solution of the linear system can be reduced significantly, compared with the tradicional IMPES method for the same black oil fluid flow equations.

References

[1] Aziz, K., and Settari, A.: *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Science, London, Applied Science Publishers Ltd., 1979.

[2] Franchi, J.R., Harpole, K.J., Bujnowski, S.W.: *BOAST: A three dimensional, three phase black oil applied simulation tool.* Vol. 1 y 2, Department of Energy, Washington, U.S., 1982.

[3] Mattax, C.: *Reservoir Simulation*, Society of Petroleum Engineers, Richardson, 1990.

[4] Helming, R.: *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurphase*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[5] Holmes, M.H.: *Introduction to Perturbation Methodos*, Sringer-Verlag NY, 1995.

[6] Bramley, R.: "An Orthogonal Projection Algorithm for linear Stokes Problems". Tech. report 1190 CSRD, University of Illinois Urbana-Champaign, IL, 1992.

[7] Golub, G.H., Van Loan, C.F.:*Matrix Computation*, The Johns Hopkins University Press, 1991.

[8] Buitrago, S.: *Técnicas Secuenciales y Paralelas para la Solución de los Sistemas Lineales en la Simulación de Yacimientos. Proc* First International Congress On Numerical Methods in Engineering, (ISBN 980-00-0667-2), UCV, Caracas, Venezuela, March 1993.

[9] Kuhn J. C.: *A New Method for the Fast Estimation Reservoir Performance*, SPE 39743, *Proc* Asia Pacific Conference on Integreted Modeling for Asset Management, Kuala Lumpur,Malaysia, March 23-24, 1998.

Saúl Buitrago
Universidad Simón Bolívar,
Departamento de Cómputo Científico y Estadística, Venezuela
Universidad Católica Andrés Bello, Facultad de Ingeniería, Venezuela
e-mail: sssbuitrago@yahoo.es

Raúl Manzanilla
Universidad Simón Bolívar,
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Venezuela
e-mail: rmanzanilla@usb.ve

SDP Approach for Solving LQ Control Problem Subject to Implicit System

Muhafzan

Abstract. This paper deals with the linear quadratic (LQ) control problem subject to implicit systems for which the semidefinite programming (SDP) approach is used to solve it. We propose a new sufficient condition in terms of SDP for existence of the optimal state-control pair of the considered problem. The numerical examples are given to illustrate the results.

Resumen. Este artículo trata sobre el problema de control lineal cuadrático (LQ) sujeto a sistemas implícitos, los cuales se resuelven usando el método de programación semidefinida (SDP). Proponemos una nueva condición suficiente en términos de SDP para la existencia de un par estado-control óptimo del problema considerado. Se dan ejemplos numéricos para ilustrar los resultados.

1 Introduction

The LQ (linear quadratic) control problem subject to implicit systems is one of the most important classes of optimal control problems, in both theory and application. In general, it is a problem to find a controller that minimizes the linear quadratic objective function governing by the implicit systems, either continuous or discrete.

It is well known that the implicit systems have attracted the attention of many researcher in the past years due to the fact that in some cases, the implicit systems describe better the behavior of physical systems than that of standard systems. They can preserve the structure of physical systems and can include non dynamic constraint and impulsive element. This kind of systems have many important applications, e.g., in biological phenomena, in economics as Leontif dynamic model, in electrical and in mechanical model, see [4, 12]. Therefore, it is fair to say that implicit systems give a more complete class of dynamical models than conventional state-space systems. Likewise, the LQ control problem subject to the implicit systems has a great potential for the system modelling.

A great number of results on solving LQ control problem subject to implicit systems have been appeared in literatures, see [3, 5, 7, 8, 10]. However, almost all of these results consider the assumption of the regularity of the implicit system and the positive definiteness of control weighting matrix in the quadratic cost functional. To the best of the author's knowledge, not much work has been done with the nonregular implicit system as a constraint and the control weighting matrix in the quadratic cost being positive semidefinite. In this last case, i.e., the quadratic cost being positive semidefinite, the existing LQ problem theories always involve the impulse distributions, see [5, 10]. Thus it does not provide any answer to a basic question such as when does the LQ control problem subject to implicit system possess an optimal solution in the form of a conventional control, in particular, one that does not involve impulse distribution. However, this issue has discussed in [7], in which they transform the LQ control problem subject to implicit system into a standard LQ control problem in which both are equivalent. Nonetheless, they still remains an open problem, that is, the new standard LQ control problem may be singular and this is not answered yet in [7].

In this paper, we reconsider the problem in [7], and in particular, the open problem, i.e. the singular version of the new standard LQ control problem, is solved. Here, we do not assume that the implicit systems is regular, thus our work is more general than some previous results, see [3, 5, 8, 10]. The method in [7] is still maintained to transform the original problem into the equivalent singular LQ control problem.

In addition, the semidefinite programming (SDP) approach is used to solving this singular LQ problem. A new sufficient condition in terms of SDP for existence of the optimal state-control pair of such problem is proposed. It is well-known that SDP has been one of the most exciting and active research areas in optimization recently. This tremendous activity is spurred by the discovery of important applications in various areas, mainly, in control theory; see [2, 11, 13].

This paper is organized as follows. Section 2 considers brief account of the problem statement. Section 3 presents the process of transformation from the original LQ control problem into an equivalent LQ problem. In Section 4, main result to solve the LQ control problem subject to implicit systems is presented. Numerical examples are given to illustrate the results in Section 5. Section 6 concludes the paper.

Notation. Throughout this paper, the superscript "T" stands for the transpose, $\varnothing$ denotes the empty set, I_n is the identity matrix of n-dimension, $\mathbb{R}^n$ denotes the n-dimensional Euclidean space, $\mathbb{R}^{m\times n}$ is the set of all $m\times n$ real matrices, $\mathbb{C}_{\mathrm{p}}^{+}[\mathbb{R}^n]$ denotes the n-dimensional piecewise continuous functions space with domain in $[0,\infty]$, $\mathbb{S}_{+}^{p}$ denotes set of all p-dimensional symmetric positive semidefinite matrices, and $\mathbb{C}$ denotes set of complex number.

2 Problem Statement

Let us consider the following continuous time implicit system

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\ t \geq 0,\ Ex(0) = x_0 \\ y &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ denotes the state vector, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ denotes the control (input) vector and $y(t) \in \mathbb{R}^q$ denotes the output vector. The matrices $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}, C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times r}$ are constant, with $\mathrm{rank}E \equiv p < n$. This system is denoted by (E, A, B, C, D). The system (E, A, B, C, D) is said to be regular if $\det(sE - A) \neq 0$ for almost all $s \in \mathbb{C}$. Otherwise, it is called nonregular if $\det(sE - A) = 0$ for each $s \in \mathbb{C}$ or if $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ with $m \neq n$. In particular, when $m \neq n$, it is called a rectangular implicit system [6].

It is well known that the solution of (2.1) exists and unique if it is regular. Otherwise, it is possible to have many solutions, or no solution at all.

Next, for a given admissible initial state $x_0 \in \mathbb{R}^n$, we consider the following associated objective function (cost functional):

$$J(u(.), x_0) = \int_0^\infty y^T(t)y(t)dt. \tag{2.2}$$

In general, the problem of determining the stabilizing feedback control $u(t) \in \mathbb{R}^r$ which minimizes the cost functional (2.2) and satisfies the dynamic system (2.1) for an admissible initial state $x_0 \in \mathbb{R}^n$, is often called as LQ control problem subject to implicit system. If $D^T D$ is positive semidefinite, it is called a singular LQ control problem subject to implicit system. We denote, for simplicity, this LQ control problem as Ω. Next, we define the set of admissible control-state pairs of problem Ω by:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathrm{ad}} \equiv \{(u(.), x(.)) \mid u(.) \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^+[\mathbb{R}^r] \text{ and } & x(.) \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^+[\mathbb{R}^n] \\ & \text{satisfy(2.1) and } J(u(.), x_0) < \infty\}. \end{aligned}$$

The optimization problem under consideration is to find the pair $(u^*, x^*) \in \mathbb{A}_{\mathrm{ad}}$ for a given admissible initial condition $x_0 \in \mathbb{R}^n$, such that

$$J(u^*, x_0) = \underset{(u(.),x(.))\in\mathbb{A}_{\mathrm{ad}}}{\text{minimize}}\ J(u(.), x_0), \tag{2.3}$$

under the assumption that (2.1) is solvable, impulse controllable and $D^T D$ is positive semidefinite.

Definition 1 *[7] Two systems (E, A, B, C, D) and $(\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$ are termed restricted system equivalent (r.s.e.), denoted by $(E, A, B, C, D) \sim (\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$, if there exists nonsingular matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ such that their associated system matrices are related by $MEN = \bar{E}$, $MAN = \bar{A}, MB = \bar{B}$ and $CN = \bar{C}$.*

Remark 1 The operations of r.s.e. correspond to the constant nonsingular transformations of (2.1) itself and of the basis in the space of internal variables x. The behavior of x in the original system may thus be simply recovered from the behavior of any system *r.s.e.* to it. These operations therefore constitute an eminently safe set of transformations that are unlikely to destroy any important properties of the system. Furthermore, such operations suffice to display the detailed structure of the original system.

Definition 2 *[7] Two optimal control problems are said to be equivalent if there exist a bijection between the two sets of admissible control - state pairs of the problems, and the quadratic cost value of any image is equal to that of corresponding preimage.*

Obviously, definition 2 conforms to the reflexivity, symmetry, and transitivity of an equivalent relation, thus the two equivalent optimal control problems will have the same solvability, uniqueness of solution and optimal cost. Thus solving one can be replaced by solving the other.

3 Transformation into an Equivalent LQ problem

Let us utilize the Singular Value Decomposition(SVD) theorem [9] for the matrix E. Since rank$E = p < n$, there exists the nonsingular matrices $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ such that

$$MEN = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

It follows that we have

$$MAN = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, MB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, CN = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix},$$

and

$$N^{-1}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

where $A_{11}\in \mathbb{R}^{p\times p}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}$, $A_{21}\in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$, $A_{22}\in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, $B_1\in \mathbb{R}^{p\times r}$, $B_2\in \mathbb{R}^{(n-p)\times r}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{q\times(n-p)}$, $x_1\in \mathbb{R}^p$ and $x_2\in \mathbb{R}^{n-p}$. Therefore, for a given admissible initial state $x_0 \in \mathbb{R}^n$, the system (2.1) is *r.s.e.* to the system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t),\ x_1(0) = x_{10} \\ 0 &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $x_{10} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} Mx_0$.

Theorem 1 *[7] The implicit system* (2.1) *is impulse controllable if and only if the matrix* $\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$ *has full row rank.*

Using the expression (3.1), the objective function (2.2) can be changed into

$$J_1(u(.),x_{10}) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_2 & C_1^T D \\ C_2^T C_1 & C_2^T C_2 & C_2^T D \\ D^T C_1 & D^T C_2 & D^T D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt.$$

Likewise, we have the new LQ control problem which minimizes the objective function $J_1(u(.),x_{10})$ subject to the dynamic system (3.1), and denote this LQ control problem as Ω_1. Further, we define the set of admissible control-state pairs of the problem Ω_1 by

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1_{\text{ad}} \equiv \{(u(.),(x_1(.),x_2(.))) \mid u(.) \in \mathbb{C}^+_{\text{p}}[\mathbb{R}^r],\ x_1(.) \in \mathbb{C}^+_{\text{p}}[\mathbb{R}^p] \\ \text{and } x_2(.) \in C^+_{\text{p}}[\mathbb{R}^{n-p}] \text{ satisfy(3.1) and } J_1(u(.),x_{10}) < \infty\}\,. \end{aligned}$$

By virtue of definition 2, it is easily seen that the LQ control problem Ω_1 is equivalent to Ω.

Furthermore, under assumption that the implicit system (2.1) is impulse controllable implies that rank$\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix} = n-p$. Hence, the solution of the second equation of (3.1) can be stated as

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = -\hat{A}^+ A_{21} x_1(t) + W v(t), \tag{3.2}$$

for some $v(t) \in \mathbb{R}^r$ and for some full column rank matrix $W \in \mathbb{R}^{(n-p+r)\times r}$ with $W \in \ker \begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$, and

$$\hat{A}^+ = \begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}^T \right]^{-1}$$

is the generalized inverse of the matrix $\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$.

Using expression (3.2), we can further create the following transformation

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \hline x_2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -\hat{A}^+ A_{21} & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

By substituting (3.3) into Ω_1, we obtain a new LQ control problem as follows:

$$\begin{aligned} &\underset{(v,x_1)}{\text{minimize}} \quad J_2(v(.),x_{10}) \\ &\text{subject to} \ \ \dot{x}_1(t) = \bar{A}x_1(t) + \bar{B}v(t),\ x_1(0) = x_{10}) \\ &\qquad\qquad\quad y(t) = \bar{C}x_1(t) + \bar{D}v(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

where

$$J_2(v(.), x_{10}) = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt \qquad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_{11} - \begin{pmatrix} A_{12} & B_1 \end{pmatrix} \hat{A}^+ A_{21}, \\ \bar{B} &= \begin{pmatrix} A_{12} & B_1 \end{pmatrix} W, \\ \bar{C} &= C_1 - \begin{pmatrix} C_2 & D \end{pmatrix} \hat{A}^+ A_{21}, \\ \bar{D} &= \begin{pmatrix} C_2 & D \end{pmatrix} W, \\ Q_{11} &= \bar{C}^T \bar{C}, Q_{12} = \bar{C}^T \bar{D} \quad \text{and} \quad Q_{22} = \bar{D}^T \bar{D}, \end{aligned}$$

and denote this LQ control problem as Ω_2. Further, we define the set of admissible control-state pairs of problem Ω_2 by

$$\mathbb{A}_{\text{ad}}^2 \equiv \{(v(.), x_1(.)) \mid v(.) \in \mathbb{C}_{\text{p}}^+[\mathbb{R}^r] \text{ and } x_1(.) \in \mathbb{C}_{\text{p}}^+[\mathbb{R}^p] \\ \text{satisfy(3.4) and } J_2(v(.), x_{10}) < \infty\}.$$

It is obvious that the system (3.4) is a standard state space system with the state x_1, the control v and the output y, so Ω_2 is a standard LQ control problem.

It is easy to show that the transformation defined by (3.3) is a bijection from $\mathbb{A}_{\text{ad}}^2$ to $\mathbb{A}_{\text{ad}}^1$, and thus the problem Ω_2 is equivalent to the problem Ω_1. It follows that Ω_2 is equivalent to the problem Ω as well. Therefore, in order to solve the problem Ω, it suffices to consider the problem Ω_2 only.

4 Solving the LQ Control Problem

It is well known that the solution of Ω_2 hinges on the behavior of input weighting matrix Q_{22} in the cost functional (3.5), whether it is positive definite or positive semidefinite.

In the case where Q_{22} is positive definite, one can use the classical theory of LQ control that asserts that Ω has a unique optimal control-state pair if the pair $(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T, \bar{A} - \bar{B}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T)$ is detectable and the pair $(\bar{A}, \bar{B})$ is asymptotically stabilizable [1]. In this case, the optimal control v^* is given by

$$v^* = -Lx_1^* \qquad (4.1)$$

where the state x_1^* is the solution of differential equation

$$\dot{x}_1(t) = (\bar{A} - \bar{B}L)x_1(t), \quad x_1(0) = x_{10} \qquad (4.2)$$

with $L = Q_{22}^{-1}(Q_{12}^T + \bar{B}^T P)$ and P is the unique positive semidefinite solution of the following algebraic Riccati equation:

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} + Q_{11} - (P\bar{B} + Q_{12})Q_{22}^{-1}(P\bar{B} + Q_{12})^T = 0, \qquad (4.3)$$

where every eigenvalue λ of $\bar{A} - \bar{B}L$ satisfies Re$\lambda < 0$. Thus, in this case the optimal control-state pair of the problem Ω is given by

$$\begin{pmatrix} x^* \\ u^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ \Lambda_1 - W_1 Q_{22}^{-1}(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \\ \hdashline \Lambda_2 - W_2 Q_{22}^{-1}(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \end{pmatrix} x_1^* \tag{4.4}$$

where

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} \equiv -\hat{A}A_{21}, \quad \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \equiv W,$$

with $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$, $\Lambda_2 \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $W_1 \in \mathbb{R}^{(n-p)\times r}$, $W_2 \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

On the other hand, when the matrix Q_{22} is positive semidefinite ($Q_{22} \geq 0$), the algebraic Riccati equation (4.3) seems to be meaningless, and therefore this result can no longer be used to handle the singular LQ control problem Ω.

A natural extension is to generalize the algebraic Riccati equation (4.3) by replacing the matrix Q_{22} with the matrix Q_{22}^+, such that the equation (4.3) is replaced by

$$\mathcal{F}(P) \equiv \bar{A}^T P + P\bar{A} + Q_{11} - (P\bar{B} + Q_{12})Q_{22}^+(P\bar{B} + Q_{12})^T = 0 \tag{4.5}$$

where Q_{22}^+ stands for the generalized inverse of Q_{22}. Corresponding to this generalized algebraic Riccati equation, let us consider an affine transformation of the matrix P as follows:

$$\mathcal{L}(P) \equiv \begin{pmatrix} Q_{22} & (P\bar{B} + Q_{12})^T \\ P\bar{B} + Q_{12} & Q_{11} + \bar{A}^T P + P\bar{A} \end{pmatrix},$$

where $\mathcal{L} : \mathbb{S}_+^p \to \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$. By using the extended Schur's Lemma [11], we have the following lemma which shows that $\mathcal{F}(P) \geq 0$ and $\mathcal{L}(P) \geq 0$ are closely related.

Lemma 1 *$\mathcal{L}(P) \geq 0$ if and only if $\mathcal{F}(P) \geq 0$ and $(I_r - Q_{22}Q_{22}^+)(P\bar{B} + Q_{12})^T = 0$.*

Now, let us consider the following primal SDP:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{maximize} & \langle I_p, P\rangle \\[1ex] \text{subject to} & P \in \mathcal{P} \end{array}} \tag{P}$$

where

$$\mathcal{P} \equiv \left\{ P \in \mathbb{S}_+^p \mid \mathcal{L}(P) \geq 0 \right\}$$

is the set of feasible solution of primal SDP problem (P). It is easy to show that $\mathcal{P}$ is a convex set, and it may be empty which in particular implies that there is no solution to the primal SDP. Moreover, it is easy to show that the objective function of the problem (P) is convex. Since the objective function and $\mathcal{P}$ satisfy the convexity properties then the above primal SDP is a convex optimization problem.

Corresponding to the above primal SDP, we have the following dual problem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{minimize} & \langle Q_{22}, Z_b\rangle + 2\left\langle Q_{12}^T, Z_u\right\rangle + \langle Q_{11}, Z_p\rangle \\ \text{subject to} & Z_u^T \bar{B}^T + \bar{B} Z_u + Z_p \bar{A}^T + \bar{A} Z_p + I_p = 0 \\ & Z \equiv \begin{bmatrix} Z_b & Z_u \\ Z_u^T & Z_p \end{bmatrix} \geq 0. \end{array}} \tag{D}$$

where Z denotes the dual variable associated with the primal constraint $\mathcal{L}(P) \geq 0$ with Z_b, Z_u and Z_p being a block partitioning of Z of appropriate dimensions.

Remark 2 Semidefinite programming are known to be special forms of conic optimization problems, for which there exists a well-developed duality theory, see, e. g.,[2], [11], [13] for the exhaustive theory of SDP. Key points of the theory can be highlighted as follows.
1. The weak duality always holds, i.e., any feasible solution to the primal problem always possesses an objective value that is greater than the dual objective value of any dual feasible solution. contrast, the strong duality needs not always hold.
2. A sufficient condition for the strong duality is that there exist a pair of complementary optimal solution, i.e., both the primal and dual SDP problems have attainable optimal solutions, and that these solutions are complementary to each other. This means that the optimal solution P^* and the dual optimal solution Z^* both exists and satisfy $\mathcal{L}(P^*)Z^* = 0$.
3. If both (P) and (D) satisfy the strict feasibility, namely, there exists primal and dual feasible solution P_0 and Z_0 such that $\mathcal{L}(P_0) > 0$ and $Z_0 > 0$, then the complementary solutions exist.

In the following we present the condition for stability of the singular LQ control problem Ω_2.

Theorem 2 *The singular* LQ *control problem* Ω_2 *has a stabilizing feedback control if and only if the dual problem* (D) *is strictly feasible.*

Proof. ($\Rightarrow$) First assume that the system (3.4) is stabilizable by some feedback control $v(t) = Lx_1(t)$. Then all the eigenvalues of the matrix $\bar{A} + \bar{B}L$ have negative real parts. Consequently, using the Lyapunov's theorem [2], there exists positive definite matrix Y such that

$$(\bar{A} + \bar{B}L)Y + Y(\bar{A} + \bar{B}L)^T = -I_p.$$

By setting $Z_p = Y$ and $Z_u = LZ_p$, then this relation can be rewritten as

$$Z_u^T \bar{B}^T + \bar{B}Z_u + Z_p\bar{A}^T + \bar{A}Z_p + I_p = 0.$$

Now choose

$$Z_b = \epsilon I_r + Z_u(Z_p)^{-1}Z_u^T.$$

Then by Schur's lemma, Z is strictly feasible to (D).
($\Leftarrow$) If the dual problem (D) is strictly feasible, then $Z_p > 0$ by Schur's lemma. Putting

$$L = Z_u(Z_p)^{-1},$$

then Z satisfying the equality constraint of (D) yields

$$(\bar{A} + \bar{B}L)Z_p + Z_p(\bar{A} + \bar{B}L)^T = -I_p.$$

By constructing a quadratic Lyapunov function $x_1^T Z_p x_1$, it is easily verified that the system in (3.4) is stabilizable. ■

Theorem 3 *If* (P) *and* (D) *satisfy the complementary slackness condition, then the optimal solution of* (P) *satisfies the generalized algebraic Riccati equation* $\mathcal{F}(P) = 0$.

Proof. Let P^* and Z^* denote the optimal solution of (P) and (D), respectively. Since P^* is optimal then it is also feasible and satisfies $\mathcal{L}(P^*) \geq 0$. By lemma 1, we have

$$(I_r - Q_{22}Q_{22}^+)(P^*\bar{B} + Q_{12})^T = 0.$$

Thus, the following decomposition is true:

$$\mathcal{L}(P^*) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ (P^*\bar{B} + Q_{12})Q_{22}^+ & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}(P^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \\ 0 & I_p \end{pmatrix}.$$

From the relation $\mathcal{L}(P^*)Z^* = 0$, we have

$$\mathcal{L}(P^*)Z^* = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= Q_{22}(Z_b^* + Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T(Z_u^*)^T) \\ \mathcal{L}_{12} &= Q_{22}(Z_u^* + Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T Z_p^*) \\ \mathcal{L}_{21} &= \mathcal{F}(P^*)(Z_u^*)^T \\ \mathcal{L}_{22} &= \mathcal{F}(P^*)Z_p^*. \end{aligned}$$

Therefore

$$\mathcal{F}(P^*)(Z_u^*)^T = 0 \text{ and } \mathcal{F}(P^*)Z_p^* = 0,$$

and hence

$$Z_u^*\mathcal{F}(P^*) = 0 \text{ and } Z_p^*\mathcal{F}(P^*) = 0.$$

Since Z^* is dual feasible then it also satisfies

$$Z_u^T\bar{B}^T + \bar{B}Z_u + Z_p\bar{A}^T + \bar{A}Z_p + I_p = 0.$$

Multiplying $\mathcal{F}(P^*)$ on both sides of the above equation, i.e.,

$$\mathcal{F}(P^*)(Z_u^T\bar{B}^T + \bar{B}Z_u + Z_p\bar{A}^T + \bar{A}Z_p + I_p)\mathcal{F}(P^*),$$

yields $\mathcal{F}(P^*)^2 = 0$, and implies $\mathcal{F}(P^*) = 0$. ■

Now, let us consider the subset $\mathcal{P}_{\text{bound}}$ of $\mathcal{P}$ as follows:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{bound}} \equiv \left\{P \in \mathbb{S}_+^p \mid \mathcal{L}(P) \geq 0 \text{ and } \mathcal{F}(P) = 0\right\}.$$

Note that $\mathcal{P}_{\mathbf{bound}}$ may be empty, which in particular implies that there is no solution to the generalized algebraic Riccati equation (4.5).

In the following, we present our main results, where the LQ control problem is explicitly constructed in terms of the solution to the primal and dual SDP.

Theorem 4 *If* $\mathcal{P}_{\mathbf{bound}} \neq \varnothing$ *and*

$$v^*(t) = -Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1(t) \tag{4.6}$$

is a stabilizing control for some $P^* \in \mathcal{P}_{\mathbf{bound}}$, *where* $x_1(t)$ *satisfies the differential equation*

$$\dot{x}_1(t) = (\bar{A} - \bar{B}_2Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T)x_1(t),\ x_1(0) = x_{10},$$

then (P) *and* (D) *satisfy the complementary slackness property . Moreover,* $v^*(t)$ *is optimal control for* LQ *control problem* Ω_2.

Proof. Let $P^* \in \mathcal{P}_{\mathbf{bound}}$ and $L = -Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T$. Since the control $v^*(t) = Lx_1(t)$ is stabilizing, then Lyapunov equation

$$(\bar{A} + \bar{B}L)Y + Y(\bar{A} + \bar{B}L)^T + I_p = 0$$

has a positive definite solution, let it be $Y^* > 0$. Let

$$Z_p^* = Y^*,\ Z_u^* = LY^*, Z_b^* = LY^*L^T.$$

By this construction, we can easily verify that

$$\begin{pmatrix} Z_b^* & Z_u^* \\ (Z_u^*)^T & Z_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & L \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_p^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ L^T & I_p \end{pmatrix} \geq 0,$$

and

$$I_p + (Z_u^*)^T \bar{B}^T + \bar{B} Z_u^* + Z_p^* \bar{A}^T + \bar{A} Z_p^* = 0.$$

Therefore,

$$Z^* = \begin{pmatrix} Z_b^* & Z_u^* \\ (Z_u^*)^T & Z_p^* \end{pmatrix}$$

is a feasible solution of (D). Since $\mathcal{L}(P) \geq 0$, by lemma 1, we have

$$(I_r - Q_{22} Q_{22}^+)(P\bar{B} + Q_{12})^T = 0.$$

It follows that the following identity

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P) &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ (P\bar{B} + Q_{12}) Q_{22}^+ & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}(P) \end{pmatrix} \times \\ &\qquad \begin{pmatrix} I_r & Q_{22}^+ (P\bar{B} + Q_{12})^T \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

is valid. Moreover, we can verify that

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P^*) Z^* &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -L^T & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}(P^*) \end{pmatrix} \times \\ &\qquad \begin{pmatrix} I_r & -L \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_b^* & Z_u^* \\ (Z_u^*)^T & Z_p^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -L^T & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{22}(Z_b^* - L(Z_u^*)^T) & Q_{22}(Z_u^* - L Z_p^*) \\ \mathcal{F}(P^*)(Z_u^*)^T & \mathcal{F}(P^*) Z_p^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

that is the problem (P) and (D) satisfy the complementary slackness property . Now, we prove that

$$v^*(t) = -Q_{22}^+ (P^* \bar{B} + Q_{12})^T x_1(t)$$

is the optimal control for LQ problem Ω_2. Firstly, consider any $P \in \mathcal{P}$ and any admissible stabilizing control $v(.) \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^+[\mathbb{R}^r]$. We have,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1^T(t) P x_1(t)) &= (\bar{A} x_1(t) + \bar{B} v(t))^T P x_1(t) + x_1^T(t) P (\bar{A} x_1(t) + \bar{B} v(t)) \\ &= x_1^T(t)(\bar{A}^T P + P\bar{A}) x_1(t) + 2 v^T(t) \bar{B}^T P x_1(t). \end{aligned}$$

Integrating over $[0, \infty)$ and making use of the fact that

$$\lim_{t \to 0} x_1^T(t) P x_1(t) = \infty,$$

we have

$$0 = x_{10}^T P x_{10} + \int_0^\infty \left[x_1^T(t)\left(\bar{A}^T P + PA\right)x_1(t) + 2v^T(t)\bar{B}^T P x_1(t)\right] dt.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
J_2(v(.), x_{10}) &= \int_0^\infty \left[x_1^T(t) Q_{11} x_1(t) + 2v^T(t) Q_{12}^T x_1(t) + v^T(t) Q_{22} v(t)\right] dt \\
&= x_{10}^T P x_{10} + \int_0^\infty \Big[x_1^T(t)\left(\bar{A}^T P + PA + Q_{11}\right)x_1(t) + \\
&\qquad 2v^T(t)\left(P\bar{B} + Q_{12}\right)^T x_1(t) + v^T(t) Q_{22} v(t)\Big] dt \\
&= x_{10}^T P x_{10} + \int_0^\infty \Big[\Big(v(t) + Q_{22}^+\left(P\bar{B} + Q_{12}\right)^T x_1(t)\Big)^T Q_{22} \times \\
&\qquad \Big(v(t) + Q_{22}^+\left(P\bar{B} + Q_{12}\right)^T x_1(t)\Big) + x_1^T(t)\mathcal{F}(P) x_1(t)\Big] dt.
\end{aligned}$$

Since $P \in \mathcal{P}$, we have $\mathcal{F}(P) \geq 0$. This means that

$$J_2(v(.), x_{10}) \geq x_{10}^T P x_{10}, \tag{4.7}$$

for each $P \in \mathcal{P}$ and each admissible stabilizing control $v(.) \in \mathbb{C}_{\mathrm{p}}^+[\mathbb{R}^r]$. On the other hand, under the feedback control

$$v^*(t) = -Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1(t),$$

and if we take into account $P^* \in \mathcal{P}_{\mathbf{bound}}$ then we have

$$\begin{aligned}
0 &\le J_2(v^*(.), x_{10}) \\
&= \int_0^\infty [x_1^T(t)Q_{11}x_1(t) + 2{v^*}^T(t)Q_{12}^T x_1(t) + {v^*}^T(t)Q_{22}v^*(t)]\ dt \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t [x_1^T(\tau)Q_{11}x_1(\tau) + 2{v^*}^T(\tau)Q_{12}^T x_1(\tau) + {v^*}^T(\tau)Q_{22}v^*(\tau)]d\tau \\
&= \lim_{t\to\infty} \{\ x_{10}^T P^* x_{10} - x_1^T(t)P^*x_1(t) + \\
&\qquad \int_0^t [x_1^T(\tau)(\bar{A}^T P^* + P^*A + Q_{11})x_1(\tau) + \\
&\qquad\qquad 2{v^*}^T(\tau)(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1(\tau) + {v^*}^T(\tau)Q_{22}v^*(\tau)]\ d\tau\} \\
&\le x_{10}^T P^* x_{10} + \lim_{t\to\infty} \int_0^t [(v^*(\tau) + Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1(\tau))^T Q_{22} \times \\
&\qquad (v^*(\tau) + Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1(\tau)) + x_1^T(\tau)\mathcal{F}(P^*)x_1(\tau)]d\tau \\
&= x_{10}^T P^* x_{10}.
\end{aligned}$$

It follows that

$$J_2(v^*(.), x_{10}) \le x_{10}^T P^* x_{10}. \tag{4.8}$$

The facts (4.7) and (4.8) lead us to conclude that the LQ control problem Ω_2 has an attainable optimal feedback control which is given by (4.6) with the cost is $x_{10}^T P^* x_{10}$. ■

The significance of theorem 4 is that, one can solve LQ control problem for standard state space system by simply solving a corresponding SDP problem. Consequently, since there exists the equivalent relationship between the LQ control problem subject to implicit system and the standard LQ control problem, one can also solve the LQ control problem subject to implicit system via such corresponding SDP approach.

By reconsidering the transformation (3.3), it follows that

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ u^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -\hat{A}^+ A_{21} & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ -Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \end{pmatrix} x_1^* \\
&= \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \Lambda_1 & W_1 \\ \Lambda_2 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ -Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \end{pmatrix} x_1^* \\
&= \begin{pmatrix} I_p \\ \Lambda_1 - W_1 Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \\ \Lambda_2 - W_2 Q_{22}^+(P^*\bar{B} + Q_{12})^T \end{pmatrix} x_1^*.
\end{aligned}$$

Ultimately, the optimal control-state pair (u^*, x^*) of Ω is given by

$$\begin{aligned} x^* &= N \begin{pmatrix} I_p \\ \Lambda_1 - W_1 Q_{22}^+ (P^* \bar{B} + Q_{12})^T \end{pmatrix} x_1^*, \\ u^* &= \left(\Lambda_2 - W_2 Q_{22}^+ (P^* \bar{B} + Q_{12})^T\right) x_1^* \end{aligned}$$

We end this section by presenting the sufficient condition for the existence of the optimal control of the LQ control problem subject to implicit system.

Corollary 1 *Assume that the implicit system* (2.1) *is impulse controllable and the* LQ *control problem* Ω *is equivalent to* Ω_2 *where matrix* Q_{22} *is positive semidefinite. If* $\mathcal{P}_{\mathbf{bound}} \neq \varnothing$ *and*

$$v^*(t) = -Q_{22}^+ (P^* \bar{B} + Q_{12})^T x_1(t)$$

is a stabilizing control for some $P^* \in \mathcal{P}_{\mathbf{bound}}$, *where* $x_1(t)$ *satisfies the differential equation*

$$\dot{x}_1(t) = (\bar{A} - \bar{B}_2 Q_{22}^+ (P^* \bar{B} + Q_{12})^T) x_1(t), \qquad x_1(0) = x_{10},$$

then

$$u^*(t) = \left(\Lambda_2 - W_2 Q_{22}^+ (P^* \bar{B} + Q_{12})^T\right) x_1(t)$$

is optimal control for LQ *control problem* Ω.

5 Numerical Examples

Example 1 *The following is an example of the LQ control problem subject to the nonregular descriptor system, where the matrices* E, A, B, C *and* D *are as follows:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

with the initial state is $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

By taking the matrices $M = I_4$ and

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

it is easy to check that the matrix $\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$ has full row rank, thus the non-regular implicit system is impulse controllable. By choosing $W \in \ker \begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$, for example,

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

the problem Ω can be equivalently changed into the following standard LQ control problem:

$$\begin{aligned} \underset{(v,x_1)}{\text{minimize}} \int_0^\infty & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt \\ \text{subject to } \dot{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} v(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v(t) \end{aligned}$$

with initial condition $x_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, where $x_1, v \in \mathbb{R}^2$,

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

To identify a positive semidefinite feasible solution P^* to the primal SDP that satisfies the generalized Riccati equation $\mathcal{F}(P^*) = 0$, we first consider the constraint

$$(I_2 - Q_{22}Q_{22}^+)(P^*\bar{B} + Q_{12})^T = 0$$

as stipulated by lemma 2, i.e.

$$\begin{aligned} &\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\right] \times \\ &\qquad \left[\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} -p+q & -q+r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

This gives rise

$$P^* = \begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix}$$

for some p. By substituting P^* into the generalized algebraic Riccati equation (4.5), we have

$$\begin{pmatrix} -4p+0.5 & -4p+0.5 \\ -4p+0.5 & -4p+0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and solving p, gives to $p = 0.125$. It follows that

$$\bar{A} - \bar{B}Q_{22}^{+}(P^*\bar{B} + Q_{12})^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

which has eigenvalues of -2 and -1, and these are stable. Hence the control

$$v^*(t) = -Q_{22}^{+}(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1^*(t),$$

where $x_1^*(t)$ is the solution of the following differential equation

$$\dot{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_1(t),\ x_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

is stabilizing. It is easy to verify that

$$x_1^*(t) = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-t} \\ -2e^{-2t} + 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Thus, according to the theorem 5, the control $v^*(t)$ must be optimal to the LQ control problem Ω_2. Thereby, according to the corollary 6, the optimal state-control are as follows:

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} - 3e^{-t} \\ -2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix},\ u^*(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

with the optimal cost $J_{\text{opt}} = 0.5$. The trajectories for the optimal state-control of Ω are given in the figures 1.a and 1.b below.

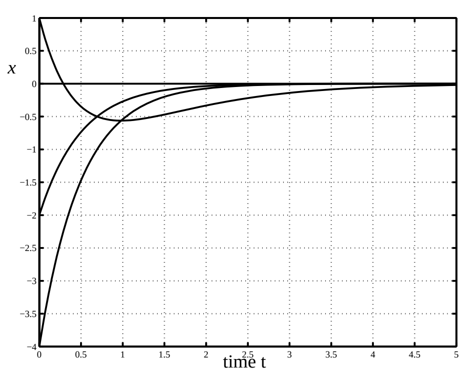

Figure 1.a. State Trajectories

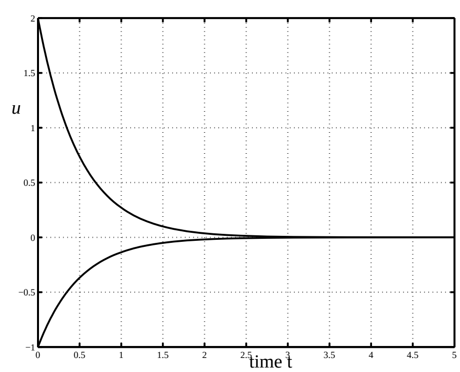

Figure 1.b. Control Trajectories

Example 2 *The following is an example of the LQ control problem subject to the regular implicit system, where the matrices E and B are the same as in example 1, with*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

and the initial state $x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

By taking the matrices M and N as in example 1, it is easy to check that the matrix $\begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$ has full row rank, thus the regular implicit system is impulse controllable. By choosing $W \in \ker \begin{pmatrix} A_{22} & B_2 \end{pmatrix}$, for example,

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

the problem Ω can be equivalently changed into the following standard LQ control problem:

$$\begin{aligned} \underset{(v,x_1)}{\text{minimize}} & \int_0^\infty \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt \\ \text{subject to } & \dot{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} v(t) \\ & y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v(t) \end{aligned}$$

with initial condition $x_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, where $x_1, v \in \mathbb{R}^2$,

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, Q_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; Q_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

To identify a positive semidefinite feasible solution P^* to the primal SDP that satisfies the generalized Riccati equation $\mathcal{F}(P^*) = 0$, we first consider the constraint

$$(I_2 - Q_{22}Q_{22}^+)(P^*\bar{B} + Q_{12})^T = 0$$

as stipulated by lemma 2, so that we have

$$\begin{pmatrix} 2p - 2q & 2p - 2q \\ -p + q & -q + r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

This is satisfied only by $p = q = r$, i.e.,

$$P^* = \begin{pmatrix} p & p \\ p & p \end{pmatrix}.$$

In fact, this matrix P^* satisfies the generalized algebraic Riccati equation (4.5). It follows that

$$\bar{A} - \bar{B}Q_{22}^{+}(P^*\bar{B} + Q_{12})^T = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

which has eigenvalues of -3 and -2, and these are stable. Hence the control

$$v^*(t) = -Q_{22}^{+}(P^*\bar{B} + Q_{12})^T x_1^*(t),$$

where $x_1^*(t)$ is the solution of the following differential equation

$$\dot{x}_1(t) = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x_1(t),\ x_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

is stabilizing. It is easy to verify that

$$x_1^*(t) = \begin{pmatrix} 8e^{-3t} - 6e^{-2t} \\ -8e^{-3t} + 9e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Thus, according to the theorem 5, the control $v^*(t)$ must be optimal to the LQ control problem Ω_2. Thereby, according to the corollary 6, the optimal state-control of the LQ control problem Ω are as follows:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \begin{pmatrix} 8e^{-3t} - 6e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \\ -16e^{-3t} + 6e^{-2t} \\ 8e^{-3t} + 6e^{-2t} \end{pmatrix}, \\ u^*(t) &= \begin{pmatrix} 8e^{-3t} \\ -16e^{-3t} + 6e^{-2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

with the optimal cost $J_{\text{opt}} = 0$. Moreover, the optimal control can be synthesized as

$$u^* = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x_1^* + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x_2^*.$$

The trajectories for the optimal state-control are given below.

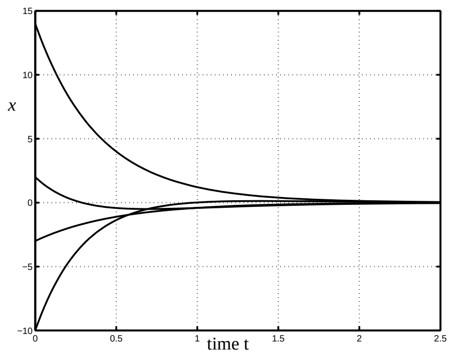

Figure 2.a. State Trajectories

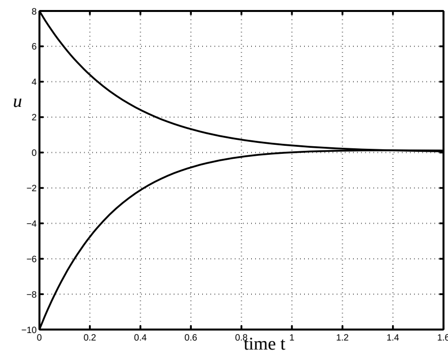

Figure 2.b. Control Trajectories

6 Conclusion

We have solved the LQ control problem subject to implicit system using the SDP approach. We have also proposed a new sufficient condition in terms of a semidefinite programming (SDP) for existence of the optimal state-control pair of the considered problem. The results show that the optimal control-state pair is free of the impulse distribution, i.e. it is smooth functions.

References

[1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control*: *Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, New Jersey, 1990.

[2] V. Balakrishnan and L. Vandenberghe, Semidefinite Programming Duality and Linear Time-Invariant Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48, 30-4, 2003.

[3] D. J. Bender and A. J. Laub, The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 32(8): 672-688. 1987.

[4] L. Dai, Singular Control Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 118, Springer, Berlin, 1989.

[5] T. Geerts, Linear Quadratic Control With and Without Stability Subject to General Implicit Continuous Time Systems: Coordinate-Free Interpretations of the Optimal Cost in Terms of Dissipation Inequality and Linear Matrix Inequality, *Linear Algebra and Its Applications*, 203-204: 607-658, 1994.

[6] J. Y. Ishihara and M. H. Terra, Impulse Controllability and Observability of Rectangular Descriptor Systems, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 46: 991-994, 2001.

[7] Z. Jiandong, M. Shuping, and C. Zhaolin, Singular LQ Problem for Descriptor System, *Proceeding of the 38*$^{\text{th}}$ *Conference on Decision and Control*, 4098-4099, 1999.

[8] T. Katayama and K. Minamino, Linear Quadratic Regulator and Spectral Factorization for Continuous Time Descriptor System, *Proceeding of the* 31$^{\text{th}}$ *IEEE Conference on Decision* & *Control*, 967-972, 1992.

[9] V. C. Klema and A. J. Laub, The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 25(2):164-176, 1980.

[10] V. Mehrmann, Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions to Singular Linear Quadratic Optimal Control problems, *Linear Algebra and Its Applications*, 121: 291-331, 1989.

[11] M.A. Rami and X.Y. Zhou, Linear Matrix Inequalities, Riccati Equations, and Indefinite Stochastic Linear Quadratic Controls, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(6):1131-1143, 2000.

[12] M. S. Silva and T. P. de Lima, Looking for Nonnegative Solutions of a Leontif Dynamic Model, *Linear Algebra and Its applications*, 364: 281-316, 2003.

[13] L. Vandenberghe and S. Boyd, Applications of Semidefinite Programming, *Applied Numerical Mathematics*, 29: 283-299, 1999.

Muhafzan
Department of Mathematics, Andalas University,
Kampus UNAND Limau Manis, Padang, Indonesia, 2516

Operador de Gram Asociado al Operador de Schrödinger con Potencial Puntual Singular

Vladimir Strauss y Javier Villamizar

Resumen. En este trabajo es calculado el operador de Gram asociado a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\Delta f + \alpha\delta^{(k)} f$ en el espacio de Sobolev $W_2^{k+1}(\mathbb{R})$, para $k = 1, 2$. Se encuentran autovalores negativos del operador de Gram correspondiente a cada caso a través de la fórmula de Krein del resolvente para perturbaciones regulares de rango dos y tres.

Abstract. In this paper we compute the Gram operator associated with the bilinear form generated by $A_\alpha f = -\Delta f + \alpha\delta^{(k)} f$ in the Sobolev space, $W_2^{k+1}(\mathbb{R})$, for $k = 1, 2$. We found negative eigenvalues for the Gram operator in each case through the Klein's resolvent formula for regular perturbations of rank two and three.

Introducción

Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal autoadjunto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Consideremos formalmente el operador perturbado $A_T = A+T$, donde T es otro operador lineal tal que $T\big|_{\mathcal{D}(A)} \neq 0$, definido en el espacio $\mathcal{H}$. Si $\overline{\mathrm{Ker}(T)} = \mathcal{H}$ se dice que la perturbación A_T es una perturbación singular del operador A. Si el operador T es de rango finito, es decir, $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$, decimos que la perturbación A_T es una perturbación de rango finito.

En física es de gran interés estudiar el operador de Schrödinger $H = -\Delta + V$ como el operador diferencial $-\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$, definido en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, perturbado con algún operador V, llamado potencial. Desde un punto de vista físico aparecen operadores de Schrödinger con potenciales del tipo $\alpha\delta$, donde α es una constante y δ es la función generalizada de Dirac. Hay varios enfoques dados a este operador. Por ejemplo ver [1][2] y las referencias que pueden conseguirse en esas monografÌas.

En este trabajo se estudian los operadores del tipo $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta^{(k)}$, donde $\delta^{(k)}$ es la k-ésima derivada de la función delta de Dirac. En particular, se analiza el problema de existencia de autovalores negativos asociados al operador A_α.

Los casos que son analizados son $k = 1$ y $k = 2$. Para ello se considera la forma bilineal que genera $A_\alpha f = -\frac{d^2 f}{dt^2} + \alpha\delta^{(k)} f$ y el operador de Gram asociado a ella en el espacio de Sobolev W_2^{k+1}. En la primera sección es hallado el operador de Gram asociado a la forma bilineal generada por $A_\alpha f$ para el caso $k = 1$. En la segunda sección se presenta una fórmula para el resolvente de perturbaciones (regulares) de rango dos. Usando esta fórmula, en la siguiente sección se buscan los autovalores negativos del operador de Gram asociado a $A_\alpha f$, con $k = 1$. En las siguientes tres secciones se realizan los mismos cálculos y en el mismo orden de las secciones uno, dos y tres para el caso $k = 2$.

1. Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta'$ en el espacio de Sobolev $W_2^2(\mathbb{R})$

Consideremos formalmente la expresión $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta'$, y el funcional que ésta define

$$\begin{aligned}\langle A_\alpha f, g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left(-f''(t) + \alpha\delta'(t)f(t)\right) g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)dt + \alpha \int_{\mathbb{R}} \delta'(t)f(t)g(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\, dt + \alpha\left(-f'(0)g(0) - f(0)g'(0)\right) = \langle Gf, g\rangle_{W_2^2}\end{aligned}$$

donde W_2^2 representa el espacio de Sobolev en $\mathbb{R}$ y G es el operador de Gram asociado a $A_\alpha f$ en W_2^2. El primer objetivo es hallar una expresión explícita para G. Para ello consigamos funciones de W_2^2, φ y ψ, tales que podamos representar los funcionales δ y δ' en términos del producto interno en W_2^2, es decir,

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle \varphi, g\rangle_{W_2^2} \\ -g'(0) &= \langle \psi, g\rangle_{W_2^2} \end{aligned}$$

donde $g \in W_2^2$ (ver [4, p.253], Teorema de Riesz). Integrando por partes dos veces tenemos

$$\begin{aligned}\langle \varphi, g\rangle_{W_2^2} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi''(t)g''(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + (\varphi''(0^-) - \varphi''(0^+))g'(0) \\ &\qquad -(\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+))g(0) + \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(IV)}(t)g(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t) + \varphi^{(IV)}(t))g(t)dt \\ &\qquad +(\varphi''(0^-) - \varphi''(0^+))g'(0) - (\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+))g(0)\end{aligned}$$

luego $\langle \varphi, g\rangle_{W_2^2} = g(0)$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi^{(IV)} &= 0 & (1)\\ \varphi''(0^-) - \varphi''(0^+) &= 0 & (2)\\ \varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+) &= -1 & (3) \end{aligned}$$

Similarmente podemos deducir que $\langle \psi, g\rangle_{W_2^2} = -g'(0)$ si $\psi + \psi^{(IV)} = 0$, $\psi''(0^-) - \psi''(0^+) = -1$ y $\psi'''(0^-) - \psi'''(0^+) = 0$. Una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial (1) puede ser definida con las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \cos(ct)e^{ct}\\ \phi_2(t) &= \sin(ct)e^{ct}\\ \phi_3(t) &= \cos(ct)e^{-ct}\\ \phi_4(t) &= \sin(ct)e^{-ct} \end{aligned}$$

donde $c = 1/\sqrt{2}$. Consideremos φ definido por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t) & \text{si } t < 0\\ \\ \xi\phi_3(t) + \eta\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

entonces

$$\varphi'(t) = \begin{cases} (c\alpha + c\beta)\phi_1(t) + (c\beta - c\alpha)\phi_2(t) & \text{si } t < 0\\ \\ (-c\xi + c\eta)\phi_3(t) + (-c\xi - c\eta)\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varphi''(t) = \begin{cases} (2c^2\beta)\phi_1(t) + (-2c^2\alpha)\phi_2(t) & \text{si } t < 0\\ \\ (-2c^2\eta)\phi_3(t) + (2c^2\xi)\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varphi'''(t) = \begin{cases} (-2c^3\alpha + 2c^3\beta)\phi_1(t) + (-2c^3\alpha - 2c^3\beta)\phi_2(t) & \text{si } t < 0\\ \\ (2c^3\xi + 2c^3\eta)\phi_3(t) + (-2c^3\xi + 2c^3\eta)\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Dado que φ y φ' deben ser continuas en $t = 0$, entonces $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t)$ y $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi'(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi'(t)$, y de las condiciones de salto para la segunda y tercera derivada dadas por (2) y (3) podemos deducir fácilmente las siguientes ecuaciones para α, β, ξ y η:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ \xi\\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1/2c^3 \end{pmatrix}$$

Igualmente se obtienen las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para obtener el funcional δ' en términos de ψ. Así tenemos finalmente las expresiones para φ y ψ

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t)e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} + \frac{-1}{\sqrt{8}}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t)e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t < 0 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t)e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t < 0 \\ \\ \frac{-1}{2}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ahora podemos escribir en términos del producto interno en W_2^2 la expresión para δ'.

$$\begin{aligned} \langle \delta' f, g\rangle_{L^2} &= -(f'(0)g(0) + f(0)g'(0)) \\ &= -f'(0)\langle \varphi, g\rangle_{W_2^2} + f(0)\langle \psi, g\rangle_{W_2^2} \\ &= \left\langle \langle \psi, f\rangle_{W_2^2}\varphi + \langle \varphi, f\rangle_{W_2^2}\psi, g\right\rangle_{W_2^2} \\ &= \langle Tf, g\rangle_{W_2^2} \end{aligned}$$

donde T es el operador de rango dos sobre el espacio W_2^2 definido por

$$T := \langle \psi, \cdot\rangle_{W_2^2}\varphi + \langle \varphi, \cdot\rangle_{W_2^2}\psi$$

Así tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} (-f''(t) + \alpha\delta'(t)f(t))\,g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\,dt + \alpha\langle Tf, g\rangle_{W_2^2}$$

Resta expresar $\int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\,dt$ en términos del producto interno en W_2^2 para tener la expresión completa del operador de Gram. Queremos buscar entonces

h tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\,dt &= \langle h, g\rangle_{W_2^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(t)g(t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} h''(t)g''(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (h(t) + h^{IV}(t))g(t)\,dt \\
&\quad +g'(0)(h''(0^-) - h''(0^+)) \\
&\quad\quad -g(0)(h'''(0^-) - h'''(0^+))
\end{aligned}$$

Entonces h debe satisfacer $h(t)+h^{IV}(t) = -f''(t)$, $h''(0^-) = h''(0^+)$ y $h'''(0^-) = h'''(0^+)$. Sea $L := \frac{d^4}{dt^4} + 1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} (Lh)(t)g(t)\,dt \implies h = L^{-1}(-f'')$$

donde L^{-1} es la convolución con la función de Green asociada a L, que ya hemos calculado previamente , es decir, φ. De esta manera tenemos la expresión completa para el operador G

$$G := A + \alpha\left(\langle\psi,\cdot\rangle_{W_2^2}\,\varphi + \langle\varphi,\cdot\rangle_{W_2^2}\,\psi\right)$$

donde A es un operador integral (convolución con la función φ).

2. Perturbaciones de Rango dos. Fórmula del Resolvente

El operador obtenido en la sección anterior es una perturbación regular de rango dos del operador integral A, es decir, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_\alpha)$ y $\dim\mathcal{R}(T) = 2$. En [2] perturbaciones de rango uno son ampliamente estudiadas. Estos modelos se consideran solubles en el sentido en que se puede dar una expresión explícita del resolvente del operador perturbado, ver [1][3]. Para el caso de perturbaciones regulares de rango uno una fórmula para el resolvente es bien conocida, ver [2]. Nuestro propósito ahora es dar una fórmula análoga para el tipo de perturbaciones que hemos obtenido.

Teorema 2.1 (Fórmula de Krein. Perturbaciones regulares de rango dos). *Sea A un operador autoadjunto actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sean φ y ψ vectores cualesquiera de $\mathcal{H}$. Entonces el resolvente del operador original A y de su perturbación de rango dos $A_\alpha = A + \alpha\,(\,\langle\psi,\cdot\rangle\,\varphi + \langle\varphi,\cdot\rangle\,\psi\,)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, están relacionados por la siguiente fórmula*

$$(A_\alpha - \lambda)^{-1} - (A-\lambda)^{-1} = -\alpha G(\psi,\cdot)(A-\lambda)^{-1}\varphi - \alpha F(\varphi,\cdot)(A-\lambda)^{-1}\psi$$

donde λ es cualquiera, $\Im\lambda \neq 0$ y

$$
\begin{aligned}
F(\varphi,\cdot) &= -\frac{-B\,(\varphi,\cdot) - B\,(\varphi,\cdot)\,\alpha B\,(\psi,\varphi) + B\,(\psi,\cdot)\,\alpha B\,(\varphi,\varphi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1} \\
G(\psi,\cdot) &= \frac{B\,(\psi,\cdot) + \alpha\,B\,(\varphi,\psi)\,B\,(\psi,\cdot) - B\,(\varphi,h)\,\alpha\,B\,(\psi,\psi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1}
\end{aligned}
$$

y la forma bilineal $B(f,g)$ est definida por $B(f,g) := \left\langle f, (A-\lambda)^{-1} g \right\rangle$

Demostración. El objetivo es calcular el resolvente del operador A_α, para ello necesitamos conseguir f en función de h tal que

$$h = (A_\alpha - \lambda) f$$

Desarrollando la expresión que tenemos para A_α queda

$$
\begin{aligned}
h &= (A-\lambda)f + \alpha T f \\
h &= (A-\lambda)f + \alpha\,\langle \psi, f\rangle\,\varphi + \alpha\,\langle \varphi, f\rangle\,\psi \qquad (4)
\end{aligned}
$$

aplicando $(A-\lambda)^{-1}$ a ambos lados de (4) y despejando f tenemos

$$f = (A-\lambda)^{-1}h - \alpha\,\langle \psi, f\rangle\,(A-\lambda)^{-1}\varphi - \alpha\,\langle \varphi, f\rangle\,(A-\lambda)^{-1}\psi \qquad (5)$$

Definamos la forma sesquilineal $B(\varphi,\psi) := \left\langle \varphi, (A-\lambda)^{-1}\psi \right\rangle$. Ahora hacemos el producto interno de f con φ y ψ

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi, f\rangle &= B(\varphi,h) - \alpha\,\langle \psi, f\rangle\,B(\varphi,\varphi) - \alpha\,\langle \varphi, f\rangle\,B(\varphi,\psi) \\
\langle \psi, f\rangle &= B(\psi,h) - \alpha\,\langle \psi, f\rangle\,B(\psi,\varphi) - \alpha\,\langle \varphi, f\rangle\,B(\psi,\psi)
\end{aligned}
$$

y resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha B(\varphi,\psi) & \alpha B(\varphi,\varphi) \\ \alpha B(\psi,\psi) & 1+\alpha B(\psi,\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi, f\rangle \\ \langle \psi, f\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\varphi,h) \\ B(\psi,h) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi, f\rangle &= -\frac{-B\,(\varphi,h) - B\,(\varphi,h)\,\alpha B\,(\psi,\varphi) + B\,(\psi,h)\,\alpha B\,(\varphi,\varphi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1} \\
\langle \psi, f\rangle &= \frac{B\,(\psi,h) + \alpha\,B\,(\varphi,\psi)\,B\,(\psi,h) - B\,(\varphi,h)\,\alpha\,B\,(\psi,\psi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1}
\end{aligned}
$$

sustituyendo estas dos expresiones en (5) obtenemos la fórmula para el resolvente de A_α □

Usando esta fórmula podemos conseguir los polos del resolvente de G, es decir, conseguir λ tal que el determinante de la matriz 2×2 que aparece en (6) sea igual a cero. Estamos interesados particularmente en los autovalores negativos.

3. Autovalores del Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta'$ en $W_2^2(\mathbb{R})$

Para poder calcular explícitamente el resolvente de

$$G := A + \alpha \left(\langle \psi, \cdot \rangle_{W_2^2} \varphi + \langle \varphi, \cdot \rangle_{W_2^2} \psi \right)$$

es necesario obtener los valores de $B(f,g)$ que aparecen en la matriz de coeficientes del sistema (6), para $f, g = \varphi$ y ψ.

Hemos definido $B(f,g) := \langle f, (A-\lambda)^{-1} g \rangle$. Donde, en particular,

$$(A-\lambda) g(t) = \varphi * g - \lambda g(t)$$

y $\varphi * g = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t-s) g(s)\, ds$. Consideremos el operador $S := FAF^{-1}$, donde F es la transformada de Fourier y F^{-1} su inversa. Así $(A-\lambda)^{-1} = F^{-1}(S-\lambda)^{-1}F$, con $(S-\lambda)^{-1} h = \dfrac{h}{\hat{\varphi} - \lambda}$. Luego $(A-\lambda)^{-1} h = F^{-1} \dfrac{\hat{h}}{\hat{\varphi}-\lambda}$, donde $\hat{h} = Fh$. Siguiendo este esquema de trabajo obtenemos, para $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned}
B(\varphi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda-\lambda w^4}\, dw = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{(1-\lambda)^{3/4} \sqrt[4]{-\lambda}} \\
B(\psi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw}{1-\lambda-\lambda w^4}\, dw = 0 \\
B(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw}{1-\lambda-\lambda w^4}\, dw = 0 \\
B(\psi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2}{1-\lambda-\lambda w^4}\, dw = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\lambda}\,(-\lambda)^{3/4}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas cantidades en la matriz 2×2 del sistema de ecuaciones (6) que aparece en la prueba del teorema (2.1) tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4\, \frac{\alpha\sqrt{2}}{(1-\lambda)^{3/4} \sqrt[4]{-\lambda}} \\ -1/4\, \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\lambda}(-\lambda)^{3/4}} & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/4\, \frac{\alpha\sqrt{2}}{(1-\lambda)^{3/4} \sqrt[4]{-\lambda}} \\ -1/4\, \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\lambda}(-\lambda)^{3/4}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \frac{-8\,\lambda + 8\,\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda\,(-1+\lambda)} \qquad (7)$$

el cual es cero para λ ($\lambda < 0$)

$$\lambda = 1/2 - 1/4\sqrt{4 - 2\,\alpha^2}$$

Valores reales de α no dan valores de λ negativos, ni siquiera reales, luego α debe ser imaginario. De hecho, si α es calculado de la ecuación (7) en función de λ, de manera que tengamos determinante igual a cero, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\sqrt{2\,\lambda - 2\,\lambda^2} \\ \alpha_2 &= -2\sqrt{2\,\lambda - 2\,\lambda^2} \end{aligned}$$

lo cual ilustra la afirmación: para tener autovalores $\lambda < 0$ del operador de Gram asociado a $A_\alpha f = \dfrac{d^2 f}{dt^2} + \alpha\delta' f$, entonces la constante α debe ser un número imaginario.

4. Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta''$ en el espacio de Sobolev $W_2^3(\mathbb{R})$

Siguiendo este método podemos obtener el operador de Gram sobre el espacio de Sobolev W_2^3 asociado a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\frac{d^2}{dt^2} f + \alpha\delta'' f$, que resulta ser un operador integral perturbado con un operador autoadjunto de rango tres. En efecto, Consideremos formalmente la expresión $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta''$ y la forma sesquilineal que define

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha f, g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} (-f''(t) + \alpha\delta''(t) f(t))\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} -f''(t) g(t) dt + \alpha \int_{\mathbb{R}} \delta''(t) f(t) g(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -f''(t) g(t)\, dt + \alpha\,(f''(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g''(0)) = \langle Gf, g\rangle_{W_2^3} \end{aligned}$$

donde G es el operador de Gram asociado a A_α en W_2^3. Hallemos las funciones φ, ψ, $\chi \in W_2^3$ tales que podamos representar los funcionales δ, δ' y δ'' en términos del producto en W_2^3, es decir,

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle \varphi, g\rangle_{W_2^3} && (8) \\ -g'(0) &= \langle \psi, g\rangle_{W_2^3} && (9) \\ g''(0) &= \langle \chi, g\rangle_{W_2^3} && (10) \end{aligned}$$

donde $g \in W_2^3$. Integrando por partes tres veces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, g \rangle_{W_2^3} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi'''(t)g'''(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + (\varphi'''(0^-) - \varphi''(0^+))g''(0) \\
&\qquad -(\varphi^{(IV)}(0^-) - \varphi^{(IV)}(0^+))g'(0) \\
&\qquad +(\varphi^{(V)}(0^-) - \varphi^{(V)}(0^+))g(0) - \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(VI)}(t)g(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t) - \varphi^{(VI)}(t))g(t)dt + (\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+))g''(0) \\
&\qquad -(\varphi^{(IV)}(0^-) - \varphi^{(IV)}(0^+))g'(0) \\
&\qquad +(\varphi^{(V)}(0^-) - \varphi^{(V)}(0^+))g(0)
\end{aligned}$$

Luego tenemos (8), (9) y (10) si se satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi^{(VI)} &= 0 \\
\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+) &= 0 \\
\varphi^{(IV)}(0^-) - \varphi^{(IV)}(0^+) &= 0 \\
\varphi^{(V)}(0^-) - \varphi^{(V)}(0^+) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi - \psi^{(VI)} &= 0 \\
\psi'''(0^-) - \psi'''(0^+) &= 0 \\
\psi^{(IV)}(0^-) - \psi^{(IV)}(0^+) &= 1 \\
\psi^{(V)}(0^-) - \psi^{(V)}(0^+) &= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\chi - \chi^{(VI)} &= 0 \\
\chi'''(0^-) - \chi'''(0^+) &= 1 \\
\chi^{(IV)}(0^-) - \chi^{(IV)}(0^+) &= 0 \\
\chi^{(V)}(0^-) - \chi^{(V)}(0^+) &= 0
\end{aligned}$$

respectivamente. Una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial obtenida viene dada por

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= e^t\\
\phi_2(t) &= \cos(ct)e^{t/2}\\
\phi_3(t) &= \sin(ct)e^{t/2}\\
\phi_4(t) &= e^{-t}\\
\phi_5(t) &= \cos(ct)e^{-t/2}\\
\phi_6(t) &= \sin(ct)e^{-t/2}
\end{aligned}$$

donde $c = \sqrt{3}/2$. Consideremos

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t) + \gamma\phi_3(t) & \text{si } t < 0 \\ \xi\phi_4(t) + \eta\phi_5(t) + \mu\phi_6(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Podemos deducir de las condiciones de salto y continuidad de la tercera, cuarta y quinta derivada las siguientes ecuaciones para α, β, γ, ξ, η y μ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 1 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1 & -1/2 & 1/2\sqrt{3} & -1 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2\sqrt{3} & -1 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} & 1 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

así obtenemos φ,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/6\phi_1(t) + 1/6\phi_2(t) - \sqrt{3}/6\phi_3(t) & \text{si } t < 0 \\ 1/6\phi_4(t) + 1/6\phi_5(t) + \sqrt{3}/6\phi_6(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

similarmente obtenemos ψ y χ

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/6\phi_1(t) - 1/6\phi_2(t) - \sqrt{3}/6\phi_3(t) & \text{si } t < 0 \\ -1/6\phi_4(t) + 1/6\phi_5(t) - \sqrt{3}/6\phi_6(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi(t) = \begin{cases} 1/6\phi_1(t) - 1/3\phi_2(t) & \text{si } t < 0 \\ 1/6\phi_4(t) - 1/3\phi_5(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Con estas funciones podemos reescribir

$$\begin{aligned}\langle \delta'' f, g\rangle_{L^2} &= f''(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g''(0)\\ &= \Big\langle \langle \chi, f\rangle_{W_2^3} \varphi + 2\langle \psi, f\rangle_{W_2^3} \psi + \langle \varphi, f\rangle_{W_2^3} \chi\,,\, g\Big\rangle_{W_2^3}\\ &= \langle Tf, g\rangle_{W_2^3}\end{aligned}$$

donde T es el operador de rango tres sobre el espacio W_2^3 definido por

$$T := \langle \chi, \cdot\rangle_{W_2^3} \varphi + 2\langle \psi, \cdot\rangle_{W_2^3} \psi + \langle \varphi, \cdot\rangle_{W_2^3} \chi$$

finalmente tenemos

$$G = A + \alpha T$$

donde A es un operador integral (como antes, de convolución con la función φ), y T es un operador de rango tres.

5. Perturbaciones de Rango Tres. Fórmula del Resolvente

El operador obtenido en la sección anterior es una perturbación regular de rango tres. Este modelo es soluble y la fórmula para el resolvente de este operador puede ser calculada fácilmente

Teorema 5.1 (Fórmula de Krein. Perturbaciones regulares de rango tres). *Sea A un operador autoadjunto actuando sobre un espacio de Hilbert H y sean φ, ψ y χ vectores cualesquiera del espacio de Hilbert, $\varphi, \psi, \chi \in H$. Entonces el resolvente del operador original A y de su perturbación de rango tres $A_\alpha = A + \alpha\left(\langle \chi, \cdot\rangle \varphi + 2\langle \psi, \cdot\rangle \psi + \langle \varphi, \cdot\rangle \chi\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, estan relacionados por la siguiente fórmula*

$$\begin{aligned}(A_\alpha - \lambda)^{-1}h - (A-\lambda)^{-1}h = -\alpha H(\chi, h)(A-\lambda)^{-1}\varphi\\ - 2\alpha G(\psi, h)(A-\lambda)^{-1}\psi - \alpha F(\varphi, h)(A-\lambda)^{-1}\chi\end{aligned}$$

donde $F(\varphi, h)$, $G(\psi, h)$ y $H(\chi, h)$ son las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha\, B(\varphi, \chi) & 2\,\alpha\, B(\varphi, \psi) & \alpha\, B(\varphi, \varphi)\\ \alpha\, B(\psi, \chi) & 1 + 2\,\alpha\, B(\psi, \psi) & \alpha\, B(\psi, \varphi)\\ \alpha\, B(\chi, \chi) & 2\,\alpha\, B(\chi, \psi) & 1 + \alpha\, B(\chi, \varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F(\varphi, h)\\ G(\psi, h)\\ H(\chi, h)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\varphi, h)\\ B(\psi, h)\\ B(\chi, h)\end{pmatrix} \tag{11}$$

$B(f, g) := \left\langle f, (A-\lambda)^{-1} g\right\rangle$, y λ es cualquiera, $\Im\lambda \neq 0$.

Demostración. La prueba es exactamente igual a la anterior para perturbaciones de rango dos. $\square$

Usando esta fórmula buscamos los polos negativos del resolvente de G, es decir, $\lambda < 0$ tal que el determinante de la matriz 3×3 que aparece en (11) sea igual a cero.

6. Autovalores del Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta''$ en $W_2^3(\mathbb{R})$

Para poder calcular explícitamente el resolvente de $G = A + \alpha(\langle \chi, \cdot \rangle \varphi + 2\langle \psi, \cdot \rangle \psi + \langle \varphi, \cdot \rangle \chi)$ de nuevo es necesario obtener los valores de $B(f,g)$ que aparecen en la matriz de coeficientes del sistema (11), para $f, g = \varphi, \psi, \chi$. Siguiendo el mismo esquema que usamos en el caso anterior tenemos, para $\lambda < 0$,

$$
\begin{aligned}
B(\varphi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-\lambda)^{5/6}\sqrt[6]{-\lambda}}\\
B(\psi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-iw}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\chi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\\
B(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-iw}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\psi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\\
B(\chi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw^3}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\varphi,\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\\
B(\psi,\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\chi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw^3}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\chi,\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2\hat{\chi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^4}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[6]{1-\lambda}\,(-\lambda)^{5/6}}
\end{aligned}
$$

si sustituimos estas cantidades en la matriz de coeficientes que aparece en el teorema (5.1) obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1-1/6\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}} & 0 & 1/3\,\frac{\alpha}{(1-\lambda)^{5/6}\sqrt[6]{-\lambda}} \\ 0 & 1-1/3\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}} & 0 \\ 1/3\,\frac{\alpha}{\sqrt[6]{1-\lambda}(-\lambda)^{5/6}} & 0 & 1-1/6\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\left(1-1/3\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\right)\left(-1/12\,\frac{-12\,\lambda^2+12\,\lambda+\alpha^2+4\,\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}\alpha}{\lambda\,(-1+\lambda)}\right)$$

Si hallamos $\lambda < 0$ tal que este determinante sea igual a cero obtenemos tres expresiones

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1/2-1/6\,\sqrt{9+4\,\alpha^2} \\ \lambda_2 &= 1/2-1/6\,\sqrt{9+\alpha^2} \\ \lambda_3 &= 1/2-1/2\,\sqrt{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

Concluimos entonces que asociados a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\frac{d^2 f}{dt^2} + \alpha\delta'' f$ podemos conseguir tres cuadrados negativos, mientras que no existen cuadrados negativos asociados a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\frac{d^2 f}{dt^2} + \alpha\delta' f$.

Referencias

[1] Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H., Solvable Models in Quantum Mechanics, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag inc., New York, 1988.

[2] Albeverio S., Kurasov P., Singular Perturbations of Differential Operators, Cambridge University Press, 2000, London Mathematical Society Lecture Note Series **271**.

[3] Kurasov P., *Singular and Super Singular Perturbations: Hilbert Space Methods*, Dept. of Mathematics, Lund Inst. of Technology, Preprint NR.16, 2003.

[4] Kato T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1980.

Vladimir Strauss y Javier Villamizar
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Venezuela
e-mail: str@usb.ve, jvilla@ma.usb.ve

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

La correspondencia entre Beppo Levi y Mischa Cotlar. Las primeras publicaciones de Cotlar.

Lucio R. Berrone

Resumen. En 1940 y desde Buenos Aires Mischa Cotlar entabló relación epistolar con Beppo Levi, director del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral con sede en Rosario. La rica interacción entre los dos matemáticos se prolongó por muchos años. Exponemos aquí los resultados del estudio del epistolario correspondiente a los dos primeros períodos. El intercambio desembocó en sendas publicaciones de Cotlar en uno de los periódicos editados por Levi.

Abstract. In 1940 from Buenos Aires Mischa Cotlar engaged in correspondence with Beppo Levi, director of the Institute of Mathematics in the Faculty of Mathematics at the Universidad Nacional del Litoral based in Rosario. The rich interaction between the two mathematicians lasts for many years. We report here the results of correspondence for the first two periods. The exchange led to publications of Cotlar in a journal published by Levi.

1 Introducción: el contacto entre dos matemáticos del viejo mundo

Dos son los trabajos de Mischa Cotlar (1913-2006) que en los años 1940 y 1942, respectivamente, aparecieron en las "Publicaciones del Instituto de Matemática" de la Universidad Nacional del Litoral. Estos son presentados como [2] y [3] en la lista de referencias. Los artículos se cuentan entre los primeros de este matemático nacido en una población de Ucrania y emigrado junto con su familia a Uruguay[1] en 1928. La familia de Cotlar había conseguido establecerse en Montevideo, y en 1935 Mischa había cruzado el Río de la Plata hasta Buenos Aires, ciudad en donde podía desarrollar en mejores condiciones sus intereses

[1]Un esbozo biográfico de Cotlar puede leerse en [5]. A las suscintas notas biográficas [12] se accede a través de Internet.

matemáticos[2]. El creador y editor de las *Publicaciones* era el matemático italiano Beppo Levi (1875-1961), quien había desembarcado en el puerto de Buenos Aires hacia finales de1939 para hacerse cargo de la dirección del Instituto de Matemática[3], en la por entonces Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral con sede en la ciudad de Rosario, próspero puerto fluvial situado al sur de la provincia de Santa Fe.

Beppo Levi[4] había llegado a Rosario con 64 años de edad y, como otros de su generación y procedencia, era un hombre con una visión integral de la Ciencia. Y no sólo de la suya, la Matemática, aún cuando conformara esta la sustancia principal de sus reflexiones. Su formación inicial, regularmente adquirida en la Università di Torino (Italia), se había beneficiado con las enseñanzas de matemáticos como Giuseppe Peano, Corrado Segre y Vito Volterra. Había luego tenido lúcida participación en muchos desarrollos de la geometría algebraica de su época, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. Había ganado una definida comprensión de los procesos intelectivos que sustentan las construcciones básicas del Análisis y había sido capaz de extraer de ellos consecuencias generales sobre el alcance y sentido general de la teoría matemática. No se había mantenido ajeno al debate que alrededor de las cuestiones de fundamentos se había desatado hacia fines del siglo XIX, ni tampoco a las ideas de la nueva Física nacida en las primeras décadas del XX. En Rosario, Levi inicia enseguida una activa y múltiple labor. Dicta seminarios avanzados de Matemática, edita las "Publicaciones" y también el boletín "Matematicae Notae", de aparición periódica desde 1941. Todo esto, desde luego, sustentado por un marco institucional adecuado, generoso[5].

La formación de Cotlar fue, en cambio, de sesgo azaroso. La lectura de [5] y otros escritos contenidos en el mismo volumen aportan un conocimiento de su desarrollo. Aquí señalaremos solamente que en 1940, Mischa sumaba 26 años de edad y llevaba unos cinco años de residencia en Buenos Aires. Había publicado en los periódicos de la Facultad de Ingeniería de Montevideo y de la Sociedad Científica Argentina algunos trabajos de contenido muy general y especulativo. Los títulos de estos primeros trabajos (*Aritmética Abstracta, Teoría de Anágenos)* son verdaderamente significativos. Su *Théorie d' Anagènes* la había anticipado en un congreso internacional celebrado en Bordeaux, Francia. El con-

[2]Contratado por la universidad para impulsar el desarrollo de la matemática superior, el matemático español J. Rey Pastor (1888-1962) había arribado a Buenos Aires en 1921. El traslado de Cotlar buscaba una aproximación al entorno de Rey Pastor y su escuela en Buenos Aires. En Montevideo, Mischa se había relacionado con el círculo de personas vinculadas a los matemáticos Rafael Laguardia y José Luis Massera.

[3]La inauguración oficial del Instituto se produjo luego de la llegada de Levi, en mayo de 1940.

[4]S. Coen (Bolonia) es biógrafo y editor de las obras completas de Levi. [11] es una biografía de Levi escrita por una de sus hijas. [22] es una reseña de la obra científica de Levi escrita por Luis Antonio Santaló.

[5]Al respecto, véase [20].

tacto con el recién llegado Profesor Levi se inicia por la intermediación del profesor Juan Carlos Vignaux. Por cierto, había sido Vignaux el destinatario de la carta de recomendación que portaba Cotlar cuando su traslado a Buenos Aires. Ambos habían luego compartido intereses matemáticos. En 1936, el artículo *Sobre las derivadas areolares simétricas de funciones de una variable compleja dual* había aparecido con sus firmas en los Anales de la Sociedad Científica Argentina. Vignaux, puntualicemos además, era aquel matemático argentino a quién Levi se había dirigido en 1938, luego de la promulgación de las leyes raciales en la Italia fascista, para "consultarle sobre sus posibilidades" ([11], pág. 43) de emigración al país.

Si el interés del trabajo presente fuera el de recordar las condiciones históricas y sociales que por aquellos años signaban las vidas tanto de Levi como de Cotlar, debiéramos emplear, entre otras, palabras como "exilio" y "emigración" tal vez atemperadas por el hecho de que Argentina y otros países del cono sur eran entonces tierra prometida para muchas personas en el mundo y sus universidades venían abonando el cultivo de las ciencias (cfr. [21]). Por otra parte, una equilibrada visión de conjunto de los primeros trabajos de Cotlar ha sido proporcionada ya por John Horváth en el artículo [6]; y como he podido leer la correspondencia que establecieran Cotlar y Levi en torno a las dos publicaciones mencionadas, me ha parecido de interés ofrecer, en las secciones siguientes, una síntesis de aquel intercambio epistolar.

El grupo de cartas que ha llegado a mis manos no es completo. Existen evidentes discontinuidades, vacíos postales en él. Se echan sobre todo en falta muchas de las cartas escritas por Levi. No obstante, la parte conservada me ha parecido alcanzar para la elaboración de un relato posible del intercambio de ideas. Además de devolver cierta ilusión de necesidad, la reconstrucción pondrá de relieve la importancia de las ideas matemáticas que sustanciaron el intercambio. Cuando tal reconstrucción ocurre, como en el caso del cuerpo de cartas que condujera al trabajo [3], dentro del contexto que ha sido llamado "de descubrimiento", el resultado final estará con mayor razón impregnado de cierto grado de subjetividad y limitado por los conocimientos de quien oficia el papel de reconstructor. La inclusión sólo parcial en dicho contexto de la correspondencia del año 1940 la hace quizá menos susceptible a esta ley. En cuanto a la exposición del material, el habitual orden cronológico seguramente facilitará estudios venideros.

1.1 Correspondencia del año 1940

La relación epistolar entre Beppo Levi y Mischa Cotlar comienza, como se dijo en la Introducción, en el año 1940, cuando el profesor Juan Carlos Vignaux envía a Levi un manuscrito de Cotlar titulado *Generalización de la Integral de*

Lebesgue. Levi se interesa rápidamente en él y en una carta fechada el 3 de septiembre de aquel año le ofrece publicarlo en las *Publicaciones* . Con fecha 10 de septiembre, Cotlar responde con entusiasmo al ofrecimiento de Levi, y ello da origen a un intercambio centrado tanto en el aspecto matemático como en el tipográfico[6] del trabajo que se extendió hasta finales de aquel año.

En su trabajo, Cotlar desarrolla una generalización de la medida y la integral de Lebesgue para conjuntos y funciones no-medibles en la dirección que a continuación describimos. Si $A \subseteq R^n$, un punto $x \in R^n$ se dice de densidad de A cuando

$$\lim_{r \to 0} \frac{|A \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} = 1,$$

donde $B_r(x)$ es la bola de rario r centrada en x. Un clásico teorema de Lebesgue (ver [8]) asegura que si $A \subseteq R^n$ es medible y $|A| > 0$, entonces casi todo punto de A es de densidad de A. Cotlar prueba que si $C \subseteq R^n$, entonces resulta medible el conjunto de los puntos de C que son de densidad de C, de donde obtiene que todo conjunto no medible C puede descomponerse en la forma

$$C = C_0 \cup N, \tag{1}$$

donde C_0 es el conjunto de los puntos de densidad de C y $N = C \setminus C_0$ es llamado *núcleo* de C. De manera más general, Cotlar denomina núcleo a todo conjunto $N \subseteq R^n$ tal que casi todos sus puntos no son de densidad del mismo, resultando que todo $C \subseteq R^n$ se descompone de manera única como $C_0 \cup N$, donde C_0 es medible y N es un núcleo. En particular, si N es un núcleo, el complementario N' de N se descompone en la forma $N' = N_0' \cup \overline{N}$, donde el núcleo $\overline{N}$ es llamado *núcleo conjugado* de N. El conjunto $N \cup \overline{N}$ resulta medible, y Cotlar asigna entonces a cada núcleo una *seudo-medida*:

$$\mu(N) = \frac{1}{2} \left| N \cup \overline{N} \right|.$$

En virtud de la descomposición (1), a cada $C \subseteq R^n$ corresponde la seudo-medida

$$\mu(C) = |C_0| + \mu(N).$$

La medida μ no resulta numerablemente aditiva en el sentido usual, inconveniente que Cotlar supera considerando una apropiada restricción de la noción de conjuntos disjuntos. De hecho, Cotlar llama *no-rampantes* a dos núcleos N_1 y N_2, cuando satisfacen las condiciones

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset, \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 = \emptyset.$$

[6] Una de las tareas del editor de aquella época era la de adecuar a las posibilidades tipográficas de la imprenta el simbolismo especial usado por el autor.

Dos conjuntos A y B se dicen *no-rampantes* cuando son disjuntos y sus núcleos son no-rampantes. Cotlar prueba entonces que la seudo-medida de una unión numerable de conjuntos no-rampantes de a pares es igual a la suma de las seudo-medidas de cada uno de los conjuntos. Apoyándose en este resultado y efectuando pertinentes modificaciones en el desarrollo habitual de la teoría de la integral de Lebesgue, Cotlar contruye una teoría de la integración respecto de la seudo-medida μ extendiendo entonces la integral de Lebesgue a una clase más amplia de funciones: las funciones *seudo-medibles*.

La cuestión quizá de mayor relevancia discutida por Levi y Cotlar en la correspondencia de aquel año se refiere a la posibilidad de construir conjuntos no medibles sin el uso del axioma de elección. La importancia del tema amerita el que transcribamos algunos párrafos. Es en la carta que hemos mencionado arriba donde Levi hace observar que la noción de función seudo-medible es, en realidad, bastante restrictiva. El 3 de septiembre, Cotlar replica diciendo que la construcción de conjuntos no medibles proporcionaría ejemplos no triviales de funciones seudo-medibles:

> *"...las consideraciones que Ud. hace, indican que la condición de seudo-integrabilidad impone limitaciones fuertes. Tratando de construir ejemplos de funciones seudo-medibles no elementales, me encontré con la dificultad de que conocía muy pocos ejemplos de conjuntos no medibles, y menos todavía métodos para construirlos; si Ud. quisiera orientarme al respecto le quedaría muy agradecido."*

En una carta fechada el 9 de octubre, Beppo Levi acota:

> *"Me parece que la dificultad está propiamente en esto: que las operaciones provechosas para el Análisis hasta ahora llevan necesariamente a funciones medibles, porque al cabo se reducen siempre a las operaciones elementales, más la operación de límite. Por esto, yo no sé que pueda tentarse la definición de conjuntos no medibles sino con la aplicación del postulado de Zermelo."*

Respecto del punto de vista de Levi, Cotlar responde con la siguiente objeción:

> *"Ud. me dijo (y esto me hizo pensar) que no se podrá demostrar la existencia de conjuntos no medibles, a menos que se haga uso del postulado de la libre elección, porque todos los ejemplos del Análisis consisten en el paso al límite combinado con las operaciones elementales, y los límites de conjuntos medibles son también medibles. Pero los mismos razonamientos sirven para los conjuntos borelianos, sin embargo he aquí una demostración de que existen conjuntos medibles L y no Borel ..."*

Lo que sigue en la carta es un argumento de cardinalidad que efectivamente prueba la existencia de conjuntos medibles Lebesgue que no lo son en el sentido de Borel. A esta objeción, Beppo Levi contesta de manera concluyente:

> *"La existencia de conjuntos no medibles L me parece fuera de toda duda, sea por razones lógicas, que la idea de conjunto es tan amplia y en ella no entre la noción de medibilidad, que no hay que pensar que la clase de "conjuntos no medibles" sea vacía. Sea también porque yo mismo en mis cartas anteriores le hablé de conjuntos conocidos y por cierto no medibles[7]. El problema me parece otro: el que estos conjuntos sean definibles en el dominio deductivo de los números reales o tan solo de las funciones. Y si yo uso una pequeña insistencia sobre este "dominio deductivo" (a lo que estaría muy dispuesto a admitir por parte de Ud. la contestación de que le parece inútil hablar de eso) es solo porque en efecto no me parece de poner una condición que Ud. pueda despreciar, sino que la palabra sirve solo para fijar la atención sobre una condición esencial del razonamiento. En efecto, cuando Ud. habla del mínimo conjunto medible que contiene un núcleo, tiene que tener un modo de determinar este mínimo conjunto medible; y de medirlo también; y estas operaciones solo puede hacerlas si sus conjuntos están definidos en términos referibles a los números reales."*

Aparece en el párrafo el concepto de *Dominio deductivo*, noción "metamatemática" que Levi introduce en el artículo [9] (véase también [10]) y resume sus personales reflexiones sobre los fundamentos del Análisis y que busca volcar la contrucción de nuevas teorías matemáticas en el molde del Análisis clásico.

En las cartas siguientes el centro de atención se desplaza a cuestiones de forma del trabajo de Cotlar. Beppo Levi encuentra demostraciones más sencillas para algunos de los resultados y hace varias observaciones sobre el estilo en que Cotlar ha redactado su trabajo. Sobre todo se ocupa de hacerlo apto para ser tipografiado. A fines de diciembre del 40, en una de las últimas cartas de ese año, Mischa Cotlar insiste en su punto de vista:

> *"Con todo, tengo el pleno convencimiento (intuitivo) de que pueden darse ejemplos de conjuntos no medibles sin acudir al principio de elección. Además me parece que en ciertos casos puede ser demostrado el postulado de Zermelo...";*

y más adelante

> *"...no veo porqué los ejemplos de conjuntos no medibles deben darse por el método de la libre elección y no en base de la definición*

[7] *Levi se refiere al conjunto de Vitali.*

> *misma de conjunto medible utilizando uno de los tantos algoritmos del Análisis; por ejemplo imponiendo condiciones al desarrrollo en fracción continua".*

La cuestión de la posibilidad de la construcción de conjuntos no medibles sin utilizar el axioma de elección tardará todavía unos veinte años en ser dirimida. Los trabajos de Jan Mycielski y Stanislaw Świerczkowski [19] junto a los de Robert Martin Solovay [23], muestran que puede construirse un conjunto no medible Lebesgue sólo con el auxilio del axioma de elección y que un principio de selección numerable no es suficiente para ello.

En su respuesta del 10 de septiembre, M. Cotlar hace la siguiente observación respecto del concepto de núcleo:

> *"El concepto de núcleo, como el de ideal de Kummer, o el de punto impropio, etc. es un caso particular del concepto de la cortadura de Dedekind abstracta, que yo llamo "anágeno". Los conjuntos medibles de Lebesgue pueden obtenerse como anágenos respecto a los rectángulos o cuadrados; análogamente, los núcleos son los anágenos respecto de los conjuntos medibles";*

llamando así la atención de Levi sobre su idea de *anágeno* [8] desarrollada en el trabajo [1] aparecido el año anterior en los Anales de la Sociedad Científica Argentina [9]. Propiamente, la idea de Cotlar consiste en sumergir un conjunto parcialmente ordenado A en un reticulado completo constituido por "cortaduras" de A , mediante una abstración similar a la que permitió a Dedekind completar la recta racional. Señalamos que en esta dirección de pensamiento había sido precedido por Holbrook Mann MacNeille, quien en su tesis doctoral [14] de 1935 (cfr. también [15] y [16]) desarrolla las mismas ideas.

1.2 Correspondencia de los años 1941-42

Con el trabajo [2] todavía en imprenta, en una carta fechada el 6 de febrero de 1941 Cotlar remite a Levi algunos resultados sobre un problema que ha estado estudiando *'desde hace un tiempo'*. Se trata

> *"...de una propiedad de las funciones holomorfas que tienen la particularidad de transformar el contorno del dominio (en el cual*

[8] Etimológicamente 'sin origen'. En [1], Cotlar explica: "Los nuevos entes creados por los métodos constructivos corresponden a conjuntos de entes primitivos que podemos llamar "sin origen", ya que el número irracional es una cortadura sin el menor (mayor) elemento, el ideal no principal es un anillo sin divisor común, el punto impropio es un conjunto de determinadas rectas sin punto común, etc."

[9] Por recomendación de Maurice Fréchet, Cotlar iba a publicar este trabajo en Fundamenta Mathematicae, proyecto que se vió impedido por el comienzo de la 2da. guerra.

están definidas) en una curva simple de Jordan, de modo que el dominio transformado resulte un dominio "Riemann" (es decir, de quien puede hacerse la representación conforme sobre un círculo) , y también de las funciones que son límites de aquellas."

Cotlar llama funciones de clase R_0 a las primeras y funciones de clase R_1 a las últimas. Con esta carta comienza no sólo el intercambio alrededor de una cuestión matemática distinta, sino también una nueva etapa de la correspondencia entre Cotlar y Levi. A diferencia de la anterior, en la cual somete a la crítica incisiva del matemático italiano un cuerpo completo de resultados Cotlar va, a lo largo del año 41, madurando sus ideas bajo la escrupulosa mirada de Beppo Levi. El artículo [3], aparecido en las Publicaciones del Instituto de Matemática en 1942, será el producto de esta interacción.

Como era conocido desde los trabajos de Paul Montel realizados durante la segunda década del pasado siglo, la familia $\mathcal{E}$ de funciones univalentes (*slicht*) de funciones holomorfas en el círculo unitario $D(0;1)$ tales que $f(0) = 0$, goza de propiedades especiales (cfr. [17, 18]). Entre las más remarcables se cuentan las siguientes:

1. $\mathcal{E}$ es una familia quasi-normal de orden 1.
2. Toda función f de $\mathcal{E}$ cubre un círculo cuyo radio solo depende de $|f'(0)|$.
3. Sobre la circunferencia $|z| = r < 1$ toda función de $\mathcal{E}$ cumple la desigualdad
$$|f(z)| \leq |f'(0)| \frac{r}{(1-r)^2}.$$
4. Si $f \in \mathcal{E}$ es continua sobre el contorno $|z| = 1$, entonces su serie de Taylor converge uniformemente en todos los puntos de dicho contorno.

El propósito de Cotlar es el de extender estas propiedades a la clase de funciones holomorfas que son univalentes sobre un arco del contorno de $D(0;1)$. El 16 de marzo, escribe

"En los teoremas clásicos que aseguran la normalidad de la familia (o en las generalizaciones del teorema de Stieltjes) se exige en la hipótesis condiciones que deben verificarse en <u>todo</u> el interior del dominio D, y por esto pueden llamarse hipótesis del <u>interior</u> [...]. Ahora, en el teorema que discutimos se exigen condiciones que deben verificarse sobre una <u>curva</u> Γ que limita a D; esta curva puede ser interior o no a un dominio de holomorfismo de la función, sólo interesa que la hipótesis <u>exige</u> que $f_n(z)$ sea holomorfa al interior de Γ y continua sobre ella, y claro que verifica ciertas condiciones; por esto puede decirse que se trata de condiciones de <u>contorno</u>."[10]

[10]Los subrayados de la citaciones corresponden siempre a los originales.

El teorema al que hace aquí referencia es una versión mejorada del resultado fundamental expuesto en la nota del 6 de febrero y puede leerse en una carta anterior (20 de marzo):

> *"Diremos que una función $f(\xi)$ es univalente en el conjunto E, cuando para dos puntos diferentes a y b de E es $f(a) \neq f(b)$. Ahora, si las funciones $f(z)$ de una familia son univalentes en un conjunto E del contorno, de medida > 0, entonces la acotación de las $|f(z)|$ en un círculo interior al dominio (arbitrariamente pequeño) es suficiente para asegurar la normalidad en todo el dominio que contiene dicho círculo. Tengo que confesar que todavía me falta completar algunos puntos de la demostración..."*

Más adelante, en la misma carta del 16 de marzo, Cotlar encuentra todavía obstáculos *"mucho más serios de lo que esperaba"* para resolver los problemas que se le han planteado. El 25 de abril, escribe:

> *"No le he escrito hasta ahora porque me di cuenta que las últimas demostraciones que estaba por enviarle podrían ser muy simplificadas y volví a rehacerlas..."*

Junto con esta carta, Cotlar envía a Levi una nota que contiene sus últimos resultados:

> *"Le envío los resultados concretos redactados así como los comprendo ahora, o sea como una extensión de los resultados de las funciones univalentes o multivalentes. En efecto, la función univalente puede definirse como una función de la clase R_0 que es univalente sobre todo el contorno Γ. En cambio, nosotros trabajamos con funciones de la clase R_0 pero univalentes tan solo sobre un pequeño arco del contorno. Estas funciones constituyen evidentemente una clase mucho más amplia que las univalentes y cuya forma analítica es aquella que Ud. me había indicado. El resultado concreto a que pude llegar se reduce entonces a que estas funciones conservan las propiedades principales de la teoría de las funciones univalentes."*

En la misma carta, Cotlar señala la posibilidad de aplicar sus teoremas a la teoría de iteración de funciones, desarrollada por Gaston Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1878-1929) a principios del pasado siglo. En realidad, expresa no tener todavía *"nada concreto de este lado"* y pide orientación al profesor Levi[11]. El 12 de junio, remite una nueva nota conteniendo sus avances en el tema. En ella hace constar las dificultades con las que ha tropezado:

[11]Sobre el desarrollo posterior de la teoría de iteración de funciones holomorfas en el círculo unitario puede consultarse la monografía de Doering y Mañé [4].

> *"Estoy adelantando muy lentamente, sobre todo por no manejar la teoría de fracciones iteradas, de la cual tenía conocimiento muy somero. Me vi en la necesidad de estudiar sistemáticamente la memoria de Fatou. Pero tengo muy poco tiempo para estudiar y menos para pensar* [12]*.Con todo, en lo que le envío hay dos resultados que me parecen ser verdaderamente importantes y que, si no es decir mucho, prometen fecundas aplicaciones. Uno de ellos profundiza un teorema de Hurwitz de que toda función límite de funciones univalentes es univalente o constante. Mi resultado es este. Si $f(z)$ es límite de funciones $f_n(z)$ univalentes sobre un arco $\overline{AB}$, y si para dos puntos z_1 y z_2 es $f(z_1) = f(z_2)$, entonces desde un n se verifica $f_n(z_1) = f_n(z_2)$. En particular, si $\overline{AB}$ es todo el contorno, las f_n son univalentes y también tendrá que serlo $f(z)$..."*

Pocos días después, Cotlar escribe nuevamente diciendo que ha detectado un error en los resultados que le ha enviado el 12 de junio, pero en una breve esquela, fechada el 25 de junio, anuncia que ya ha corregido *"bien todo lo que estaba mal y ya está arreglado todo"*. Durante las vacaciones del receso invernal, Mischa lee una memoria ([13]) de John Edensor Littlewood (1885-1977) en donde se expone el concepto subordinación de funciones. Los resultados de Littlewood permiten a Cotlar dar a los suyos gran generalidad. Puede decirse que recién en este momento Cotlar consigue dar forma definitiva a sus teoremas: con algunos agregados que comentaremos más adelante, ellos constituirán el corazón del trabajo [3]. En una carta llena de entusiasmo fechada el 30 de Julio, Cotlar comunica su hallazgo a Levi. Esta carta fundamental merece, creemos, transcribirse casi en su totalidad.

> *"He tenido unos días de vacaciones, y creo haberlos aprovechado bien, avanzando bastante en el trabajo. Por lo menos lo he llevado a una forma definitiva y lo he terminado en lo que al trabajo en si se refiere, pero todavía pueden hacerse muchas aplicaciones cuyo estudio dejo para más adelante. Leyendo a Julia* [13] *me llamó la atención una memoria importante de Littlewood que continúa con gran éxito las investigaciones empezadas por Lindelöf sobre el teorema de Schwarz y que sistematiza varias teorías de la teoría de funciones. Al leer esta memoria mis ideas se aclararon y por fin dí con lo que estaba buscando tanto tiempo. Combinando los resultados*

[12] En la introducción se mencionó aquella carta (presumiblemente firmada por Rafael Laguardia, por entonces el matemático de mayor relieve en Uruguay) que Mischa presentó a Vignaux luego de su llegada a Buenos Aires. Vignaux enseguida lo había recomendado para dar clases privadas de Matemática [5]. De ese modo proveía a su sustento Mischa cuando escribía estas líneas a Levi.

[13] En la segunda parte de su libro [7] (pág. 103), Julia hace una revisión de la memoria de Littlewood. Es a través de este libro que Cotlar toma contacto con dicha memoria.

mios con los de Littlewood, he podido dar en un instante una gran generalidad al trabajo extendiendo todos los resultados hallados, se puede decir, a casi cualquier función holomorfa. En una palabra, fue un verdadero hallazgo para mi esta memoria, además me di cuenta de que lo que estaba haciendo todo este tiempo era una solución recíproca del método de Littlewood; Ud. verá en la introducción los detalles. Los resultados de Littlewood me permitieron simplificar muchísimo todas las demostraciones y reducir las dimensiones del trabajo por lo menos a la mitad; creo que cuanto más sencillas son las cosas, más se está sobre el camino acertado. Ud. perdonará este entusiasmo excesivo, seguramente es cosa de los primeros días; pero me da la impresión que he obtenido algunos resultados interesantes. En resumen helos aquí:

Sea f una función holomorfa cualquiera en el dominio D limitado por la curva de Jordan Γ; designaremos con $\overline{D}$ el dominio transformado de D por f, y con $\overline{\Gamma}$ la frontera de $\overline{D}$. Diremos que un arco AB del contorno (o un conjunto E del mismo) es un arco propio si: 1) la función está definida y es continua sobre dicho arco y 2) el arco $\overline{AB}$ transformado por la función puede unirse con una línea continua al infinito sin encontrar puntos de $\overline{D}$. Finalmente, al decir que la función es univalente sobre AB suponemos que este arco es propio. Si f es univalente sobre dicho arco y si l es la longitud del mismo, se tiene: 1) Existe un círculo con centro en el origen (suponemos $D =$círculo) cuyo radio depende de l pero no de la función, tal que el número de ceros de f en este círculo no excede a $[2\pi/l]$. 2) Más general, el número de ceros en el círculo $|z| < r$ no excede a $\pi/arctan(\frac{1-r}{1+r}tan(\frac{l}{2}))$. 3) Si $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ son los primeros $\nu = [2\pi/l]$ coeficientes del desarrollo de f, se tiene $|f(z)| \leq 2^{(\nu+2)!}\nu^{(\nu+2)!}(|a_1|+\cdots+|a_\nu|)\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$, en particular si $\nu = 1$ se obtienen los resultados de las funciones univalentes. 4) Se tiene $|f(z)| \leq (|f(\xi_\nu)|+64\delta_\nu\,|f'(\xi_\nu)|\,\frac{|z|}{(1-|z|)^2})2^{(\nu+2)!}\nu^{(\nu+2)!}$, donde el punto ξ_ν depende tan solo de ν, lo mismo que el factor constante δ_ν. De aquí resulta que conociendo la posición y longitud del arco de univalencia AB, se puede delimitar las regiones en las cuales no hay ceros dobles de la función o ceros de la derivada. La mayoría de las desigualdades de la teoría de las funciones univalentes se extienden a este caso con la única diferencia de un factor proporcional a $[2\pi/l]$ y de una traslación análoga a la traslación de la propiedad 4 (si en la propiedad 4 es $\nu = 1$, entonces es $\xi_\nu = 0$ y se obtiene el teorema de Bieberbach [14]). Finalmente se extienden casi todas las

[14] Cotlar hace referencia a la acotación de $|f(z)|$ que hemos indicado en 3.

desigualdades de Littlewood, como Ud. verá en la introducción.

A mi parecer lo que hay de interesante en todo esto es lo siguiente: se ha demostrado en la teoría clásica que la función queda perfectamente conocida por sus valores sobre un arco del contorno; mientras que aquí resulta que la sola longitud de un arco de univalencia (y no los valores de la función sobre el mismo) dan un conocimiento de la limitación del número y de la distribución de los ceros, así como también de su módulo y de las funciones convexas del módulo."

Comparemos ahora los resultados que Mischa expone en la carta precedente con la forma final que asumieron en el trabajo [3]:

"Si AB es un arco de univalencia de longitud l y ν es la parte entera de $2\pi{:}l$ se demuestran los siguientes resultados: 1) Toda familia $f(z)$ compuesta de funciones univalentes sobre AB es una familia quasi-normal en todo círculo $|z| < r < 1$ y de orden que depende solo de ν y de r. Si las funciones son acotadas en un $\nu + 1$ puntos de un círculo interior a D ellas son acotadas en D. 2) Toda función univalente sobre AB cubre (y a lo sumo ν veces) un círculo con centro en el origen, cuyo radio depende tan solo de las primeras ν derivadas $|f'(0)|, \ldots, |f^{\nu}(0)|$. 3) Si $f(z)$ es univalente en AB, en todo círculo $|z| < r < 1$ el número de ceros no excede a un número que depende de l y de r, a saber:

$$\frac{\pi}{2\arctan(\frac{1-r}{1+r}tan(\frac{l}{4}))}.$$

4) Si $f(z)$ es univalente sobre AB se tiene la limitación

$$|f(z)| \leq K(l)(|f'(0)| + \cdots + |f^{\nu}(0)|)\frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

donde $K(l)$ depende sólo de l ($K(2\pi) = 1$). 5) Si f es univalente sobre AB, existe una región Δ de D contigua a AB y que depende sólo de l, tal que en Δ la función es univalente y no se anula. 6) Si AB es un arco propio de una $f(z)$ continua, la serie de Taylor converge en todo punto de AB salvo a lo sumo en un conjunto no denso de AB. Estos resultados se extienden todavía para el caso en que se reemplaza el arco de univalencia por un conjunto de medida $l > 0$. En particular, para $l = 2\pi$ se obtienen las propiedades de las funciones univalentes ordinarias."

El estudio de las propiedades de convergencia en el contorno de la serie de Taylor de una función univalente sobre un arco AB es el último que emprende

Cotlar: recién a mediados de diciembre lo comunica a Beppo Levi. En una esquela de salutación por el fin de año, escribe:

> *"…como estos días tendré un par de días de vaciones espero terminar aquel teorema que le hablé y así ya redactar definitivamente el trabajo y contestarle. Estoy casi seguro que el teorema va a salir bien, faltan algunos detalles no más, y en tal caso sería verdaderamente una contribución importante a los teoremas tauberianos y las series de Fourier."*

El 14 de febrero Mischa ha completado su trabajo:

> *"…acabo de pasar en limpio el trabajo y lo adjunto con esta. Creo que ahora ya está listo; lo he modificado totalmente, teniendo siempre en vista las indicaciones contenidas en sus cartas…"*

Lamentablemente, de las cartas que Beppo Levi dirigió a Mischa Cotlar en esta época, pocas han llegado a mis manos. Aunque escasas, son ricas en comentarios e indicaciones. A continuación rescato las que he creido más importantes. La primera respuesta de Levi que se ha conservado —una carta fechada el 7 de marzo de 1941— transluce cierta incomprensión de los conceptos y del objetivo de los teoremas que Cotlar le ha remitido en sus apuntes. De este modo, las objeciones que allí plantea Levi —principalmente relacionadas con la corrección del uso que hace Cotlar en sus argumentos del principio de simetría— no nos han parecido muy ajustadas. Distinto caracter tienen las objeciones que Levi formula más tarde. En la demostración de su teorema que asegura la normalidad de una familia de funciones univalentes sobre un arco propio AB, uniformemente acotada sobre un círculo arbitrariamente pequeño interior a D, Cotlar necesita probar que cierta sucesión convergente de funciones de la familia no converge hacia una constante. Con ese fin, introduce cierta sucesión de transformaciones "de Riemman" del círculo unitario sobre un triángulo determinado $A_0B_0C_0$. En una carta con fecha del 7 de noviembre, Levi observa

> *"Todas las veces que ocurrió de encontrarme en una demostración que me pareció utilizar artificios que ocultaran el sentido íntimo de las propiedades que había que considerar, siempre he buscado de comprender hasta cuál punto el artificio fuese necesario y cuál fuese su significado. Una demostración engorrosa tiene siempre dentro de si el peligro que dentro del artificio se pase algo que no está completamente bien. En este caso, yo no comprendo la función que tiene la transformación del dominio en el triángulo y esto me hace obscuro todo el razonamiento…".*

La contestación de Mischa no se hace esperar: en una carta fechada el 10 de noviembre explica

"...En eso no hay nada de artificial, y la razón de esta elección de un triángulo es la misma (aunque dentro de [un] orden de ideas algo distinto) por la cual en la definición de la función modular se representa el círculo sobre un triángulo y no sobre otra figura cualquiera (casualmente, al encontrarme con la dificultad en la demostración me acordé de la función de Schwarz y esto me dió la idea de la demostración). En dos palabras se podría decir que la razón de ello está en que el número de vértices del triángulo es el mismo que el número de puntos que puede prefijarse sobre el contorno en la representación conforme. Mas si me permite voy a explicarme con más detalle... ".

.

La explicación que sigue convence a Beppo Levi, quien en una carta del 5 de marzo de 1942 dice

"Aprovecho para comunicarle una observación que no tiene importancia fundamental, sino solo de detallle. Se trata del procedimiento con el cual Ud. demuestra que ninguna sucesión de funciones sigma [15] *univalente sobre un arco de longitud inferiormente acotada puede tener límite constante. Mientras en la primera redacción el artificio de pasar del dominio de definición de la $f(z)$ al dominio triangular me parecía obscuro, me parece ahora del todo justificado y por lo tanto una idea admirable...".*

Como había sucedido con el trabajo [2], la forma final del trabajo [3] debe a Levi toda índole de mejoras: desde observaciones sobre la conveniencia tipográfica del uso de cierto símbolo matemático en lugar de otro dibujado con la pluma en el papel de renglones, hasta incisivas indicaciones que simplificaban algunas demostraciones y mejoraban el estilo de la "redacción". El siguiente párrafo, transcripto de una carta de Levi del 3 de diciembre de 1941, ilustra una clase de aporte bastante diferente de los señalados:

"Debo decirle, sin embargo, que me parece la redacción un poco cansadora y me permito señalarle un poco el porqué. No hay duda que yo soy un poco viejo y ciertas cosas yo no las veo muy modernamente. Una de estas ya se la señalé en otras oportunidades: no creo absolutamente que el matemático tenga derecho de decir: "yo estudio y publico una serie de deducciones sobre hipótesis que me pongo porque me gustan". Tampoco quiere esto decir que los problemas matemáticos deben ser problemas propuestos por razones

[15] Levi hace referencia a lo que Cotlar llama funciones de Schwarz; i.e., aquellas funciones que satisfacen las hipótesis del lema de Schwarz.

prácticas; pero hay que darles por lo menos un interés especulativo o artístico. Aplicado al trabajo suyo, me parece que acrecentaría mucho el interés empezar con algunas consideraciones introductorias para mostrar cómo puede presentarse el problema de arcos de univalencia...".

La atmósfera platónica del grupo Bourbaki comenzaba a pesar sobre el mundo matemático y Levi se daba cuenta de ello.

Agradecimientos: expreso mi agradecimiento al *Instituto de Matemática Aplicada San Luis* (IMASL) y a la *Universidad Nacional de San Luis* (UNSL). La conclusión de este trabajo, iniciado muchos años atrás, ocurrió en el hospitalario marco provisto por estas instituciones. El cuerpo de correspondencia objeto del trabajo me fue presentado por Carlos D. Galles. Allanó mi labor el buen desempeño de M. Garro, bibliotecaria en la biblioteca "Esteban Agüero" de la UNSL.

Referencias

[1] M. Cotlar. *Estructuras de Anágenos.* Anales de la Soc. Científica Argentina, T. CXXVII, (1939), 328-347 y 432-461.

[2] M. Cotlar. *Sobre Conjuntos No Medibles y Generalización de la Integral de Lebesgue.* Publ. del Inst. de Matemática Vol. II $N°8$. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1940).

[3] M. Cotlar. *Funciones Univalentes sobre un Conjunto de Puntos del Contorno de un Dominio de Holomorfismo.* Publ. del Inst. de Matemática Vol. IV N°2. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1942).

[4] C. I. Doering, R. Mañé, *The Dynamics of Inner Functions*, Ensaios Matematicos, Vol. 3, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Jameiro, 1991.

[5] D. G. Goldstein, *Mischa Cotlar: A Biography*, in *Analysis and Partial Differential Equations. A Collection of Papers Dedicated to Mischa Cotlar*, (C. Sadosky, Ed.), Marcel Dekker, Inc., (1990), xv-xviii.

[6] J. Horváth, *The early papers of Mischa Cotlar (1936-1955)*, in *Analysis and Partial Differential Equations. A Collection of Papers Dedicated to Mischa Cotlar*, (C. Sadosky, Ed.), Marcel Dekker, Inc., (1990), 689-714.

[7] G. Julia. *Principes Géométriques d'Analyse.* Gauthier Villars, Paris, I Partie (1930), II Partie (1932).

[8] H. Lebesgue. *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives.* Paris, (1904).

[9] B. Levi, *La nozione di "dominio deduttivo" e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi.* Fund. Mat. XXII, (1934), 63-74.

[10] B. Levi, *La Noción de "Dominio Deductivo" como Elemento de Orientación en las Cuestiones de Fundamento de las Teorías Matemáticas.* Publ. del Inst. de Matemática Vol. II $N°9$. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1940).

[11] L. Levi, *Beppo Levi. Italia y Argentina en la vida de un matemático,* Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2000.

[12] E. Lima, L. Recht, *Mischa Cotlar. Notas Biográficas y Bibliografía.* Asoc. Mat. Venezolana, Boletín, Vol. 1 Nro. 1, (1994), 75-83.

[13] J. E. Littlewood. *On the inequalities in the theory of functions.* Proc. London Math. Soc., Serie II, Vol. 23.

[14] H.M. MacNeille. *Extensions of partially ordered sets.* Math. Soc. 42, (1937), 416-460.

[15] H.M. MacNeille. *Extensions of partially ordered sets.* Proc. Nat. Ac. of Sciences, Vol. 22, (1936), 45-50.

[16] H.M. MacNeille. *Partially ordered sets.* Trans. Am. Math. Soc. 42, (1937), 416-460.

[17] P. Montel, *Leçons sur les Familles Normales de Fonctions Analytiques.* Gauthier-Villars, Paris, (1927).

[18] P. Montel, *Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes.* Gauthier-Villars, Paris, (1933).

[19] J. Mycielski - S. Świerczkowski. *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness.* Fund. Mat. LIV.1, (1964), 67-71.

[20] C. Pla, *Antecedentes de la Creación del Instituto,* en Publ. del Inst. de Matemática Vol. II $N°5$. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1940).

[21] C. Pla, *La Matemática en el Litoral. La evolución de las ciencias en la Argentina (1920-1972)*, T. I, Sociedad Científica Argentina, (1972), 148-187.

[22] L. Santaló, *La obra científica de Beppo Levi*, Mathematicae Notae, Año XVIII, Vol. 1, (1962), XXIII-XXVIII.

[23] R.M. Solovay. *A model of Set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.* Annals of Math., 2nd. Series, 92, (1970), 1-56.

Lucio R. Berrone
IMASL, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
Departamento de Matemática, Fac. de Ciencias,
Universidad Nacional de San Luis,
Ejército de los Andes 850, (5700)
San Luis, Argentina.
e-mail: lberrone@unsl.edu.ar

INFORMACIÓN NACIONAL

OBITUARIO

Diomedes Bárcenas
(1949-2009)

Diomedes José Bárcenas Morillo nació en Puerto Santo, Cumaná, Venezuela, en 1949. Después de graduarse de Licenciado en Matemáticas, en 1977, en la Universidad Central de Venezuela (UCV), ingresó al personal docente de la Universidad de Los Andes (ULA). En esta Institución, recibió el título de Magíster en Matemáticas en 1981. Años más tarde se doctoró, en 1998, en la UCV, defendiendo la tesis “Multifunciones medibles y algunas aplicaciones”. Desde entonces su área de investigación en matemáticas fue el Análisis, en particular, el Análisis funcional y la Teoría de operadores.

A lo largo de su meritoria carrera de investigador, Diomedes se destacó como profesor, orientador, promotor y divulgador de las matemáticas. Testimonios de esa labor son: la coordinación del seminario del Grupo de Análisis funcional del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULA; el texto “Rectas y cónicas”, en asociación, con María González; los libros “Semigrupos fuertemente continuos y algunas aplicaciones” y “Semigroups and Control theory”, con su fraterno amigo Hugo Leiva; tutor o cotutor de tesis de Licenciatura, Maestría o Doctorado en matemáticas; la publicación de importantes resultados en su campo; coordinador en algunas de las actividades promovidas por la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas; y docente en la Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

Es menester destacar, además, su extraordinaria dedicación como miembro de la Asociación Matemática Venezolana (AMV): Miembro, en 1994, de la Junta directiva de la AMV, Capítulo Los Andes; colaborador del Boletín de la AMV, como árbitro o autor de publicaciones; participación significativa en las Jornadas Venezolanas de Matemáticas; docente en la Escuela Venezolana de Matemática; y uno de los creadores del programa Talleres de Formación Matemática (TForMa), iniciado en el año 2000, con la finalidad de ofrecer cursos para complementar la formación de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, al cual Diomedes le dedicó un especial cariño y gracias a su empeño, el TForMa se ha venido consolidando y no ha perdido su continuidad.

La comunidad matemática venezolana reconoció los méritos de Diomedes y en retribución lo invitó a pronunciar plenarias en las Jornadas Venezolanas de Matemáticas y, por iniciativa de algunos de sus miembros, fue propuesto al prestigioso, y más importante premio científico de Venezuela, el Premio Polar. Este año, al cumplir sus 60 años, el Departamento de Matemáticas, de la Facultad de Ciencias, de la ULA, organizó un Coloquio matemático para celebrar su onomástico.

Luego de su sentida desaparición, acaecida el 13 de noviembre, el Grupo de Ecuaciones diferenciales del Departamento de Matemáticas, de la Facultad de Ciencias de la ULA, organizó un Coloquio de Ecuaciones diferenciales y Sistemas dinámicos en homenaje a Diomedes. Investigadores de esas áreas, que trabajan en las Universidades del Zulia, Centro Occidental Lisandro Alvarado y de Los Andes se reunieron en Mérida, los días 3 y 4 de diciembre, para recordar a quien, con su trabajo, estimuló la investigación matemática en nuestro país.

Esta necrología estaría incompleta si dejara de mencionar al Diomedes amigo. Conocedor, amante y bailador de los ritmos caribeños que, con su sonrisa y buen humor, alegraba nuestras reuniones sociales. Su ejemplo y empeño siempre estará entre nosotros. Paz a sus restos.

Oswaldo Araujo
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes,
Mérida, Venezuela
e-mail: araujo@ula.ve

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda

La Olimpiada Internacional de Matemáticas,IMO, se celebra anualmente desde el año 1959. En aquella oportunidad Rumanía invitó a seis países de Europa oriental a participar en una competencia de matemáticas pensada como un evento puntual, que se realizaría solo ese año. Los siete países participantes fueron Bulgaria, Checoeslovaquia, la República Democrática Alemana, Hungría, Polonia, Rumanía y la Unión Soviética. Al año siguiente Rumanía repitió la competencia, aunque solo cinco países asistieron. A partir de ahí, Hungría, Checoeslovaquia y Polonia, organizaron la IMO, convirtiéndose en un evento anual que fue creciendo poco a poco hasta llegar a la cifra extraordinaria de 104 países y 565 estudiantes este año 2009 en Bremen, Alemania.

Como parte muy importante de esta Olimpiada estuvo la celebración por los 50 años de la IMO. Fue una muestra de la gran importancia que tiene esta competencia en la comunidad matemática internacional y de su impacto en las generaciones matemáticas por venir. Los organizadores invitaron a un grupo selecto de matemáticos, que en sus años de escuela secundaria fueron ganadores de medallas en la IMO. La lista es impresionante, Béla Bollobás, Timothy Gowers, Lászlo Lovász, Stanislav Smirnov, Terence Tao y Jean-Christophe Yoccoz. Tres medallistas Fields, un premio Wolf, un premio Gödel,tres premios del Instituto Clay, y tres premios Salem, que durante una tarde dieron una serie de conferencias extraordinarias, cuyo único objetivo era motivar al máximo a todos los jóvenes que participaron en la Olimpiada y mostrarles un camino a seguir, las Matemáticas.

Pienso que la comunidad matemática internacional está dando a las Olimpiadas Matemáticas la importancia que merecen, pues son un mecanismo por excelencia para descubrir jóvenes con talento matemático a muy temprana edad. En eso estamos empeñados.

Además de la IMO, asistimos a la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC, y a la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM. Las delegaciones estuvieron conformadas de la siguiente manera:

50ª IMO. Alemania. 10 al 22 de Julio.

Carmela Acevedo, Caracas.

Mauricio Marcano, Porlamar

Laura Vielma, Tutor de Delegación. Academia Washington. Caracas.

Rafael Sánchez Lamoneda, Jefe de Delegación, UCV, Caracas.

XXIV OIM. México del 17 al 27 de Septiembre:

Mauricio Marcano, Porlamar. Mención Honorífica

Carmela Acevedo, Caracas. Mención Honorífica.

Tomás Rodríguez. Porlamar.

Eduardo Sarabia. Tutor de Delegación. UPEL-UCV.Caracas

Henry Martínez, Jefe de Delegación, UPEL-UCAB, Caracas.

XI OMCC. Colombia del 4 al 10 de Octubre:

Carlos Lamas. Medalla de Bronce. Barquisimeto.

Edenys Hernao. Mención Honorífica. Maracaibo

Diego Peña. Altos Mirandinos.

Silvina María de Jesús. Tutor de Delegación. UPEL-UCAB.Caracas

José Heber Nieto, Jefe de Delegación, LUZ. Maracaibo.

Es importante señalar el apoyo recibido por nuestros patrocinadores, la Fundación Empresas Polar, Acumuladores Duncan, Acumuladores Titán, MRW y la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman. También queremos agradecer a las Universidades e Instituciones que nos apoyan para la organización de todas nuestras actividades, UCV, USB,UNIMAR, LUZ, URU, UPEL, UCOLA, UNEXPO, UDO, el IVIC y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. Muchas gracias a todos.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de IMO. Cada examen tiene una duración de cuatro horas y media y el valor de cada problema es de 7 puntos. Los exámenes de la XXIV OIM y la XI OMCC se pueden consultar en la web, http://www.acm.org.ve

50^a Olimpiada Iternacional de Matemáticas

Primer día

Bremen, Alemania, 15 de Julio de 2009

Problema 1

Sea n un entero positivo y sean $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ enteros distintos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, tales que n divide a $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demostrar que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2 Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB, respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP, CQ y PQ, respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M. Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ. Demostrar que $OP = OQ$.

Problema 3

Sea $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsucesiones

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{y} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demostrar que la sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots$ es también una progresión aritmética.

Segundo día

Bremen, Alemania, 16 de Julio de 2009

Problema 4

Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E, respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC. Supongamos que el ángulo $\angle BEK = 45°$. Determinar todos los posibles valores de $\angle CAB$.

Problema 5

Determinar todas las funciones f del conjunto de los enteros positivos en el conjunto de los enteros positivos tales que, para todos los enteros positivos a y b, existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden

$$a, \ f(b) \ \text{ y } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es *no degenerado* si sus vértices no están alineados).

Problema 6

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos distintos y M un conjunto de $n - 1$ enteros positivos que no contiene al número $s = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Un saltamontes se dispone a saltar a lo largo de la recta real. Empieza en el punto 0 y da n saltos hacia la derecha de longitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en algún orden. Demostrar que el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M.

XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primer día

Salvador, Brasil, 23 de Septiembre de 2008

Problema 1

Se distribuyen los números $1, 2, 3, \ldots, 2008^2$ en un tablero de 2008×2008, de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea S la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de S.

Problema 2

Sea ABC un triángulo escaleno y r la bisectriz externa del ángulo $\angle ABC$. Se consideran P y Q los pies de las perpendiculares a la recta r que pasan por A y C, respectivamente. Las rectas CP y AB se intersectan en M y las rectas AQ y BC se intersectan en N. Demuestre que las rectas AC, MN y r tienen un punto en común.

Problema 3

Sean m y n enteros tales que el polinomio $P(x) = x^3 + mx + n$ tiene la siguiente propiedad: Si x e y son enteros y 107 divide a $P(x) - P(y)$, entonces 107 divide a $x - y$. Demuestre que 107 divide a m.

Segundo día

Salvador, Brasil, 24 de Septiembre de 2008

Problema 4

Demuestre que no existen enteros positivos x e y tales que

$$x^{2008} + 2008! = 21^y.$$

Problema 5

Sean ABC un triángulo y X, Y, Z puntos interiores de los lados BC, AC, AB, respectivamente. Sean $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$ los circuncentros correspondientes a los triángulos AZY, BXZ, CYZ. Demuestre que

$$(A^{'}B^{'}C^{'}) \geq \frac{(ABC)}{4}$$

y que la igualdad se cumple si y solo si las rectas $AA^{'}$, $BB^{'}$ $CC^{'}$ tienen un punto en común.

Observación: Para un triángulo cualquiera RST, denotamos su área por (RST).

Problema 6

En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro jugadores cada uno. Se organiza un torneo de *biribol* en el que participan n personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no sin fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de n es posible organizar un torneo con tales características?

Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV
rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

Asociación Matemática Venezolana

XXIII Jornadas Venezolanas de Matemáticas
Homenaje a Diómedes Bárcenas
Universidad Simón Bolívar
Caracas, 20 al 23 de abril de 2010

Segundo Anuncio

Las XXIII Jornadas Venezolanas de Matemáticas, a celebrarse en la Universidad Simón Bolívar, tendrán como sesiones temáticas:

Sesión	Coordinadores
Álgebra y Teoría de Números	Aurora Olivieri (olivieri@usb.ve) Amílcar Pérez (ajperez@usb.ve)
Análisis	S. Marcantognini (stefania@usb.ve) Luis Mármol(lgmarmol@usb.ve)
Ecuaciones Diferenciales Parciales y Física Matemática	Álvaro Restuccia(arestu@usb.ve) Carmen Vanegas(cvanegas@usb.ve)
Grafos y Combinatoria	Oscar Ordaz(oscarardaz55@gmail.com) Domingo Quiroz(dquiroz@usb.ve)
Historia de las matemáticas	Douglas Jimenez(dougjim@gmail.com)
Lógica	Carlos Uzcátegui(uzca@ula.ve) José Mijares (jose.mijarez@ciens.ucv.ve)
Modelos Matemáticos, Análisis Numérico y Aplicaciones	Said Kas-Danouche(sak0525@gmail.com) Brígida Molina(bmolina@kuaimare.ciens.ucv.ve) René Escalente(rescalante@usb.ve)
Probabilidad y Estadística	Adolfo Quiroz(aquiroz@usb.ve) Isabel Llatas(illatas@cesma.usb.ve)
Sistemas Dinámicos (Continuos y Discretos)	Hanzel Lárez(larez@ula.ve) Bladismir Ruiz(bladismir@ula.ve)
Topología y Geometría Diferencial	Jorge Vielma(vielma@ula.ve) Ennis Rosas(ennisrafael@gmail.com)

Los interesados en participar como expositores en cualquiera de las sesiones de las XXIII Jornadas Venezolanas de Matemáticas, deberán enviar por correo electrónico, **hasta el 29 de enero de 2010**, (en formato .tex y .pdf), el resumen de su charla a la coordinación de la adecuada sesión. La decisión sobre la aceptación de las ponencias sometidas será competencia exclusiva de la coordinación de la sesión donde haya sido solicitada la participación. Los proponentes recibirán, mediante comunicación enviada por los correspondientes coordinadores, la notificación de dicha decisión **hasta el 19 de febrero de 2010**. La duración de las charlas ordinarias en cualquier sesión será de **veinte minutos**. Se sugiere el siguiente formato latex para someter los resúmenes:

```
\documentclass[12pt]{amsart}
\renewcommand{\theequation}{\thesection.\arabic{equation}}
\begin{document}
\def\refname{Referencias}
\title{TITULO DEL RESUMEN}
\author{Autor 1, \underline{Autor 2}, Autor 3} %subrayado expositor
\address{INSTITUCION DE ADSCRIPCION Autor 1}
\email{xxxx@universidad.ve} %direccion electronica de autor 1
\address{INSTITUCION DE ADSCRIPCION Autor 2}
\email{xxxx@universidad.ve} %direccion electronica de autor 2
\address{INSTITUCION DE ADSCRIPCION Autor 3}
\email{xxxx@universidad.ve} %direccion electronica de autor 3
\maketitle{}
\section*{Resumen}
CONTENIDO DEL RESUMEN
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem {A1}A. Elbert,
\emph{Some recent results on the zeros of Bessel functions and
orthogonal polynomials.} J. Comp. Appl. Math. {\bf 133} (1-2),
(2001), 65-83.
\end{thebibliography}
\end{document}
```

AGRADECIMIENTO

Nuestra gratitud por la colaboración prestada, en el trabajo editorial del volumen XVI del Boletín de la AMV, a las siguientes personas:

Diomedes Bárcenas, Rómulo Castillo, Vladislav Kravchenko, William Lacruz, Hugo Leiva, Hilda López, Lolo Moran y Wolfgang Tutschke.

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsability of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: http://boletinamv.ma.usb.ve/

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVI, Número 2, Año 2009