Solvabilité d'un problème aux limites semi-linéaire autour de la première valeur propre

A.R. El Amrouss M. Moussaoui

Abstract

This paper deals with the existence of solutions for a semilinear second order differential equation in some new conditions of nonresonance with respect to the first eigenvalue of the associated linear differentiel operator $x \mapsto -x''$.

1 Introduction

Dans cet article on s'intéresse à l'existence des solutions du problème suivant

$$-u'' = f(u) + h(x) \quad \text{dans }]a,b[, \quad u(a) = u(b) = 0 \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Lebesgue intégrable. Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur différentiel $u \mapsto -u''$ sur $H_0^1(a,b)$.

Les résultats d'existence du problème (1) sous la première valeur propre ont fait l'objet de plusieurs travaux. Citons par exemple les références suivantes : A.Hammerstein [5], D.G.DeFigueredo -J.P.Gossez [1], M.L.C.Fernandes-P.Omari-F.Zanolin [4], J.Mawhin [6].

Received by the editors January 1996.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 34B15 - 34C25.
Key words and phrases : Non-résonance - théorie du degré - solutions positives.

Dans [4] Fernandes, Omari et Zanolin ont prouvé un résultat d'existence en supposant que $h \in L^\infty(a,b)$ et que le potentiel associé $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ satisfait la condition

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1 \tag{2}$$

L'inégalité $\liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{f(s)}{s} \leq \liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2}$ suggère la question si on peut étendre le résultat ci-dessus de [4] en remplaçant la condition (2) par :

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 \tag{3}$$

Dans [7], Njoku a montré par un exemple que (3) ne suffit pas pour l'existence des solutions du problème (1).

Dans ce travail, nous étudions sous quelles conditions nous avons non- résonance du problème (1) (c'est à dire solvabilité de (1) pour tout h donné) lorsque la condition (3) est satisfaite sans que la condition (2) le soit. En utilisant la méthode de Leray-Schauder, nous prouvons que le problème (1) admet au moins une solution pour tout $h \in L^\infty$ lorsque

$$(\tilde{f}_\pm) \qquad \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} < \frac{2}{\pi}\lambda_1$$

où $\tilde{f}(s) = \sup_{[0,s]} f$ si $s \geq 0$ et $\tilde{f}(s) = \inf_{[s,0]} f$ si $s \leq 0$.
Ensuite, nous montrons que si f est positive et h de valeur moyenne positive, la condition $(\tilde{f}_\pm)$ impose l'existence d'une solution positive de (1).
Enfin, nous prouvons que la condition $(\tilde{f}_\pm)$ peut être améliorée en

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} < \lambda_1$$

si l'on suppose en outre que f est continue, impaire, $f(s) \to \infty$ quand $s \to \infty$, et

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_2.$$

2 Theorèmes d'existence

Théoreme 2.1 *Supposons $(\tilde{f}_\pm)$. Alors (1) admet au moins une solution pour tout $h \in L^\infty(a,b)$.*

Remarque 1:

1. on vérifie aisément que :

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{s} \leq \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} \leq \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{s}$$

2. Puisque f est continue alors $\tilde{f}$ est aussi continue. On vérifie aisément que

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} = \limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s}$$

et $\tilde{f}$ est croissante.

3. Si f vérifie la condition

$$(E)\begin{cases} \text{Il existe une suite } (s_n)_n \text{ croissante tendant vers } +\infty \\ \text{(resp. décroissante tendant vers } -\infty),\ f(s_n) \leq f(s)\ \forall s \in [0, s_n[\\ \text{(resp. } f(s) \geq f(s_n) \\ \forall s \in]s_n, 0]) \text{ et } \dfrac{f(s_n)}{s_n} \to \liminf_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} \text{ (resp. } \liminf_{s\to-\infty} \dfrac{f(s)}{s}) \end{cases}$$

alors

$$\liminf_{s\to+\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} = \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} \qquad (\text{resp. } \liminf_{s\to-\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} = \liminf_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s})$$

En particulier si f est croissante au voisinage de l'infini alors f satisfait la condition (E).

Corollaire 2.1 *Supposons que f vérifie la condition (E) et*

$$\liminf_{s\to\pm\infty} \frac{f(s)}{s} < \frac{2}{\pi}\lambda_1$$

Alors (1) admet au moins une solution pour tout h dans $L^\infty(a,b)$.

Preuve du théorème 2.1 :
Considérons la famille de problèmes suivants :

$$-u'' = \lambda(f(u) + h(x)) \text{ dans }]a,b[, \quad u(a) = u(b) = 0 \tag{4}$$

avec $\lambda \in]0,1]$.

Lemme 2.1 *Supposons qu'il existe deux constantes $S, T > 0$ telles que* $\max u(.) \neq S$ *et* $\min u(.) \neq -T$ *pour toute solution $u(.)$ de (4) avec λ est dans* $[0.1]$*, alors (1) est solvable .*

La preuve de ce résultat est basée sur la théorie du degré de Leray- Schauder, elle consiste à construire un ouvert borné $\mathcal{O}$ dans $C([a,b])$ avec $0 \in \mathcal{O}$ dont la frontière ne contient aucune solution de (4) avec $\lambda \in]0.1]$.

Pour la preuve de ce lemme voir [4] est ses références.

Le théorème résulte des trois propositions ci-dessous :

Proposition 2.1 *On suppose $(\tilde{f}_\pm)$ et f est borné inférieurement dans $\mathbb{R}^+$ et borné supérieurement dans $\mathbb{R}^-$.*
Alors (1) admet au moins une solution pour tout h dans L^1.

Preuve :
Pour la preuve de cette proposition on distingue quatre cas

i) $\liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$

ii) $\liminf_{s\to\pm\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} \geq \lambda_1$

iii) $\liminf_{s\to+\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$ et $\liminf_{s\to-\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} \geq \lambda_1$

iv) $\liminf_{s\to+\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} \geq \lambda_1$ et $\liminf_{s\to-\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$

pour **i)** le problème est résolu dans [4].

Maintenant nous allons montrer la proposition 2.1 dans le cas **ii)**. Puisque f est borné inférieurement dans $\mathbb{R}^+$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $c < f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
Posons $\hat{f}(s) = f(s) - c$ et $\hat{h}(x) = h(x) + c$
On vérifie aisément que $u(.)$ est une solution de (4) si et seulement si $u(.)$ est solution du problème :

$$-u'' = \lambda(\hat{f}(u) + \hat{h}(x)) \quad \text{dans }]a,b[, \quad u(a) = u(b) = 0$$

Donc sans perte de généralité on peut supposer que $f > 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
Posons $H(x) = \int_a^x h(s)\,ds$ et soit $u(.)$ une solution de (4) dans $C[a,b]$ avec $\lambda \in]0,1], u(.) \in W^{2.1}(a,b)$ résulte de la régularité-L^p.
Notons par

$$x^* = \min\{x \in [a,b] : u(x) = \max u(.)\} \; et \; u^* = u(x^*)$$

$$\alpha = \max\{x \in [a,x^*] : u(x) = 0\}$$

$$\beta = \min\{x \in [x^*,b] : u(x) = 0\}$$

Posons

$$y(.) = u'(.) + \lambda H(.) \tag{5}$$

D'où

$$y'(x) = -\lambda f(u(x)) \tag{6}$$

Or d'après la définition de α et β nous avons $u(.) \geq 0$ sur $[\alpha,\beta]$, et par suite y(.) est strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$.
Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$ on a :

$$-\lambda\tilde{f}(u^*) = -\lambda \sup_{[0,u^*]} f(s) \leq y'(x) \tag{7}$$

après intégration de (7) sur $[\alpha,\beta]$ il vient que :

$$-\lambda\tilde{f}(u^*)(\beta-\alpha) \leq y(\beta) - y(\alpha)$$

Ensuite, il suit :

$$\frac{y(\alpha) - y(\beta)}{\lambda\tilde{f}(u^*)} \leq \beta - \alpha \tag{8}$$

Par suite nous allons minorer la quantité $y(\alpha) - y(\beta)$; pour cela multiplions l'équation (6) par $y(x)$ et intégrons sur $[\alpha, x^*]$, nous obtenons

$$\int_\alpha^{x^*} y'(x)y(x)\,dx - \lambda\int_\alpha^{x^*} y'(x)H(x)\,dx = -\lambda F(u^*)$$

d'où

$$y(x^*)^2 - y(\alpha)^2 - 2\lambda \int_\alpha^{x^*} y'(x)H(x)\,dx = -2\lambda F(u^*) \tag{9}$$

De (5) On vérifie facilement que

$$|y(x^*)| \leq \lambda \|H\|_\infty \tag{10}$$

D'autre part, du fait que y est décroissante sur $[\alpha, x^*]$ et (10) il découle :

$$\int_\alpha^{x^*} y'(x)H(x)\,dx \leq y(\alpha)\|H\|_\infty + \lambda \|H\|_\infty^2 \tag{11}$$

et en vertu de (9), nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda F(u^*) & \leq & y(\alpha)^2 + 2\lambda(y(\alpha)\|H\|_\infty + \lambda\|H\|_\infty^2) \\ & \leq & (y(\alpha) + \lambda\|H\|_\infty)^2 + \lambda^2\|H\|_\infty^2 \end{array}$$

Comme $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ et $u(.) \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$, nous avons $u'(\alpha) \geq 0$ et $u'(\beta) \leq 0$, et il suit

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2\lambda F(u^*)} & \leq & |y(\alpha)| + 2\lambda\|H\|_\infty \\ & \leq & |u'(\alpha)| + 3\lambda\|H\|_\infty \\ & = & u'(\alpha) + 3\lambda\|H\|_\infty \\ & \leq & y(\alpha) + 4\lambda\|H\|_\infty \end{array}$$

D'où il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\sqrt{2\lambda F(u^*)} - \lambda c_1 \leq y(\alpha)$$

De même on montre qu'il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\sqrt{2\lambda F(u^*)} - \lambda c_1 \leq -y(\beta)$$

Finalement nous avons

$$2\sqrt{2\lambda F(u^*)} - 2\lambda c_1 \leq y(\alpha) - y(\beta) \tag{12}$$

De l'inégalité (8) et (9), nous obtenons pour tout $\lambda \in]0.1]$

$$\frac{2\sqrt{2\lambda F(u^*)} - 2\lambda c_1}{\lambda \tilde{f}(u^*)} \leq \beta - \alpha \tag{13}$$

Soit $(s_n)_n$ une suite telle que $s_n \to \infty$, quand $n \to \infty$, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}(s_n)}{s_n} = \rho < \frac{2}{\pi}\lambda_1$$

Supposons qu'il existe $u_n(.)$ une suite de solutions de (4) avec $\lambda = \mu_n \in]0.1]$ telle que $u_n^* = s_n$.

Or d'après (13) nous avons

$$\frac{2\sqrt{2\mu_n F(s_n)} - 2\mu_n c_1}{\mu_n \tilde{f}(s_n)} \leq \beta_n - \alpha_n$$

ou encore

$$\frac{2\sqrt{2F(s_n)} - 2c_1}{\frac{\tilde{f}(s_n)}{s_n}} \leq \beta_n - \alpha_n \tag{14}$$

En faisant tendre n vers ∞, comme $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{2F(s_n)}{s_n^2} \geq \lambda_1 = (\dfrac{\pi}{b-a})^2$ il vient

$$b - a = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1}} < 2\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\rho} \leq \lim_{n\to\infty} \beta_n - \alpha_n$$

Donc pour $n \geq n_0$, $b - a < \beta_n - \alpha_n \leq b - a$, ce qui est absurde.
D'où pour un $N \geq n_0$ on a $\max u(.) \neq s_N = S$ pour toute solution u(.) de (4) avec $\lambda \in]0.1]$.

D'une manière analogue on prouve l'existence d'un T tel que $\min u(.) \neq -T$.
Pour le cas **iii)**, puisque on a f est borné inférieurement dans $\mathbb{R}^+$ et borné supérieurement dans $\mathbb{R}^-$ et $\liminf_{s\to+\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$ alors d'une manière similaire que dans la proposition 2.1 du [4], il existe $S > 0$ tel que $\max u(.) \neq S$ pour toute $u(.)$ solution de (4) avec $\lambda \in [0.1]$, et l'existence d'un T tel que $\min u(.) \neq -T$ découle de **ii)**. De la même manière que dans **iii)**, on prouve la proposition 2.1 dans le cas **iv)**. Finalement, le résultat découle du lemme 2.1. ■

Proposition 2.2 *Supposons $(\tilde{f}_-)$, f est non bornée inférieurement dans $\mathbb{R}^+$ et f est bornée supérieurement dans $\mathbb{R}^-$*
Alors (1) admet au moins une solution pour tout h dans L^∞.

Preuve :
Soit $s_1 > 0$ tel que $f(s_1) \leq -\|h\|_\infty$, et posons $\hat{f}(s) = f(s)$ pour $s \leq s_1$, $\hat{f}(s) = f(s_1)$ pour $s > s_1$.
Considérons le problème :

$$-u'' = \hat{f}(u) + h(x) \text{ dans }]a, b[, \quad u(a) = u(b) = 0 \tag{15}$$

On constate que la fonction $\tilde{\hat{f}}$ (où $\tilde{\hat{f}}(s) = \sup_{[0,s]} \hat{f}$ si $s \geq 0$ et $\tilde{\hat{f}}(s) = \inf_{[s,0]} \hat{f}$ si $s \leq 0$) satisfait aux hypothèses de laproposition 2.1, alors l'existence d'une solution $u(.)$ de (15) découle de la proposition 2.1.
Dans la suite, pour montrer que (1) est solvable, il suffit de montrer que $u(x) \leq s_1$ pour tout x dans [a,b].
Supposons par l'absudre que cette inégalité est non verifiée alors $\max u(.) > s_1$ et $\max u(.) = u(x^*)$ pour $x^* \in]a, b[$, d'où $u'(x^*) = 0$, et ainsi on peut trouver $\varepsilon, \delta > 0$ tels que

$$\hat{f}(u(x)) \leq -\|h\|_\infty - \delta \text{ pour tout } x \in]x^* - \varepsilon, x^*] = I_\varepsilon.$$

Pour chaque $x \in I_\varepsilon$ on peut écrire

$$\begin{aligned} 0 \leq u(x^*) - u(x) &= u'(x^*)(x^* - x) - \textstyle\int_x^{x^*} u''(t)(t - x)\, dt \\ &= \textstyle\int_x^{x^*} [\hat{f}(u(t) + h(t)](t - x)\, dt \\ &\leq -\delta \textstyle\int_x^{x^*} (t - x)\, dt < 0. \end{aligned}$$

d'où une contradiction. Ce qui est achève la preuve. ∎

Proposition 2.3 *Supposons* $(\tilde{f}_+)$ *et* f *est non bornée supérieurement dans* $\mathbb{R}^-$*. Alors (1) admet au moins une solution pour tout* h *dans* L^∞*.*

Preuve
Pour la preuve de cette proposition, on distingue deux cas :

1. si f est bornée inférieurement dans $\mathbb{R}^+$, dans ce cas nous suivons les mêmes lignes que dans la preuve précédente.
2. si f est non bornée inférieurement dans $\mathbb{R}^+$, alors $f(s) < -\|h\|_\infty$ et $f(s) > \|h\|_\infty$ pour certains $s_1 > 0$ et $s_2 < 0$.

Posons $\hat{f}(s) = f(s)$ pour $s_1 < s < s_2$, $\hat{f}(s) = f(s_1)$ pour $s > s_1$, $\hat{f}(s) = f(s_2)$ pour $s < s_2$, et considérons le problème

$$-u'' = (\hat{f}(u) + h(.)) \text{ dans }]a,b[, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Comme dans la preuve de la proposition 2.2, nous montrons aisément que $s_1 \leq u(x) \leq s_2$ dans [a,b], et alors u est une solution de (1).

Théoreme 2.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *continue et* h *dans* $L^\infty[(a,b),\mathbb{R}^+]$ *tel que* $\int h(x)\,dx > 0$*. De plus si on a :*

$$\liminf_{s\to+\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} < \frac{2}{\pi}\lambda_1 \tag{16}$$

Alors (1) admet au moins une solution u positive ($u > 0$ *sur]a,b[).*

Preuve
En suivant les mêmes lignes de la preuve de la proposition 2.2 on prouve l'existence d'une constante $S > 0$ telle que $\max u(.) \neq S$ pour toute $u(.)$ solution de (4).
Or d'après le principe du maximum, toute solution $u(.)$ de (4) est positive, d'où l'existence d'une constante $T > 0$ telle que $\min u(.) \neq -T$. Par suite, l'existence d'une solution du problème (1) découle du lemme 2.1 et $u(.) > 0$ sur]a,b[résulte du principe du maximum. ∎

Théoreme 2.3 *Supposons* f *continue, impaire,* $f(s) \to \infty$ *si* $s \to \infty$*,*

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} < \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_2$$

Alors (1) admet au moins une solution.

Pour la preuve du théorème 2.3 nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2 *Si*

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} < \liminf_{s\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2} \qquad \text{et} \qquad \liminf_{s\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2} > 0,$$

alors

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2} < \limsup_{s\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2}$$

Preuve

Posons $\liminf_{s\to\infty}\frac{\tilde f(s)}{s}=\delta$ et $\liminf_{s\to\infty}\dfrac{2F(s)}{s^2}=\gamma$. Il existe une suite $(s'_n)_n$ telle que $\dfrac{\tilde f(s'_n)}{s'_n}\to\delta$, et puisque $\tilde f$ est continue et $\limsup_{s\to\infty}\dfrac{f(s)}{s}\geq\gamma$ il existe une suite (s_n) telle que $\tilde f(s_n)=\delta_1 s_n$ avec $\delta_1\in]\delta,\gamma[$. D'autre part, soit $(t_n)_n$ telle que $t_n\leq s_n$ et $\gamma t_n=\delta_1 s_n$ et comme $\tilde f$ est croissante il vient :

$$\tilde f(t)\leq\gamma t_n=\delta_1 s_n\quad\forall t\in[t_n,s_n]$$

Or $f(t)\leq\gamma t_n=\delta_1 s_n$ pour tout $t\in[t_n,s_n]$, d'où nous obtenons :

$$\begin{aligned}F(s_n)&=F(t_n)+\textstyle\int_{t_n}^{s_n}f(t)\,dt\\&\leq F(t_n)+\gamma(\frac{\gamma}{\delta_1}-1)t_n^2\end{aligned}$$

par suite il vient

$$\frac{s_n^2F(s_n)}{t_n^2s_n^2}\leq\frac{F(t_n)}{t_n^2}+\gamma(\frac{\gamma}{\delta_1}-1)$$

ou encore

$$\frac{\gamma^2F(s_n)}{\delta_1^2s_n^2}\leq\frac{F(t_n)}{t_n^2}+\gamma(\frac{\gamma}{\delta_1}-1)$$

ainsi

$$\frac{\gamma^3}{2\delta_1^2}-\gamma(\frac{\gamma}{\delta_1}-1)\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{F(t_n)}{t_n^2}$$

Puisque $\dfrac{\gamma^3}{2\delta_1^2}-\gamma(\dfrac{\gamma}{\delta_1}-1)=\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\gamma}{2}(\dfrac{\gamma}{\delta_1}-1)^2$ et comme $\gamma>0$ alors

$$\gamma<\limsup_{s\to\infty}\frac{2F(s)}{s^2}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Preuve du théorème 2.3 :
Puisque f est impaire on a deux cas à distinguer :

1^{er} cas : Si on a $\liminf_{s\to\infty}\dfrac{2F(s)}{s^2}<\lambda_1$, ce cas est résolu dans [4].

$2^{ème}$ cas : Si on a $\liminf_{s\to\infty}\dfrac{2F(s)}{s^2}\geq\lambda_1$, alors d'après le lemme 2.2 et le fait que f est impaire nous avons :

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{2F(s)}{s^2}>\lambda_1 \tag{17}$$

En tenant compte du (18), $\limsup_{s\to\infty}\dfrac{f(s)}{s}<\lambda_2$ et $\mathrm{sign}(s)f(s)\to\infty$, quand $|s|\to\infty$, alors le théorème découle du résultat ci-dessous.

Théoreme 2.4 *Supposons $sign(s)f(s) \to \infty$, quand $|s| \to \infty$,*
$\limsup_{s\to\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} > \lambda_1$, $\limsup_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} \leq \lambda_2$ *et* $\limsup_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} < \lambda_2$
Alors (1) admet au moins une solution pour tout h dans L^1.

(pour plus de détails voir théorème 2.1 [2], ou [3]). ■

Corollaire 2.2 *Supposons que f est continue, impaire et vérifie la condition (E),*

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 \ et \limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_2$$

Alors (1) admet au moins une solution pour tout h dans $L^\infty(a,b)$.

Preuve :
Notons que si $\liminf_{s\to\infty} \dfrac{2F(s)}{s^2} \geq \lambda_1$ et f satisfait à (E) ; alors $f(s) \to \infty$ quand $s \to \infty$. En effet, d'après la remarque 1 on a $\liminf_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} = \liminf_{s\to\infty} \dfrac{\tilde{f}(s)}{s}$ et d'autre part on vérifie facilement que $\liminf_{s\to\infty} \dfrac{\tilde{f}(s)}{s} \geq \liminf_{s\to\infty} \dfrac{F(s)}{s^2}$, d'où $\liminf_{s\to\infty} \dfrac{f(s)}{s} \geq \dfrac{\lambda_1}{2}$. En suivant les mêmes lignes de la preuve du théorème 2.3 le corollaire découle. ■

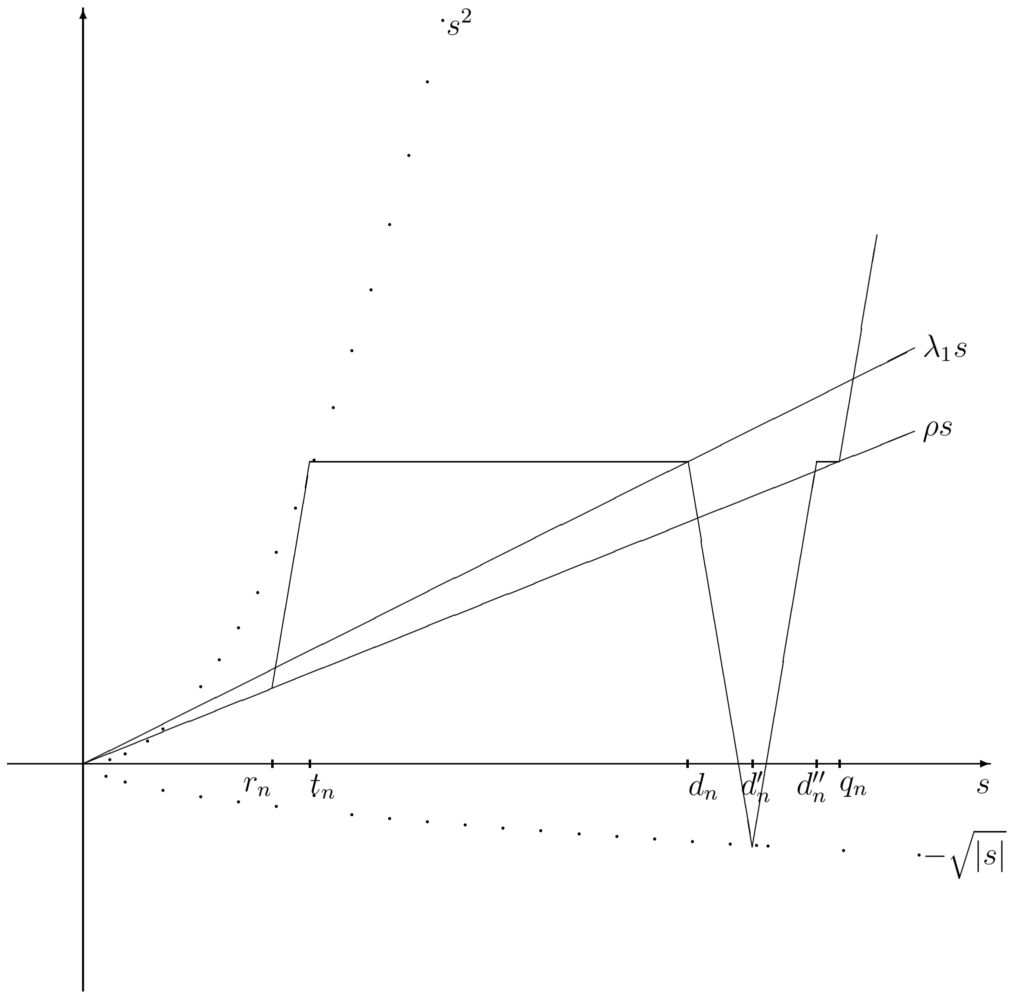
3 Exemple

Nous allons donner un exemple où le théorème 2.1 s'applique et le résultat de [4] ne s'applique pas.

Considérons le problème :

$$-u'' = f(u(x)) + h(x) \quad \text{dans} \quad]0,\pi[, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

Soient r_1, t_1 deux constantes positives et soient $(t_n)_{n\geq1}, (d_n)_{n\geq1}$ et $(q_n)_{n\geq1}$ trois suites croissantes telles que $t_n^2 = d_n = \rho q_n$ avec ρ satisfait à $\dfrac{1}{2} < \rho < \dfrac{2}{\pi}$.
Soit $(r_n)_{n\geq1}$ une suite croissante construite de telle sorte que la droite joignant les points (r_n, r_n) et (t_n, t_n^2) est parallèle à celle joignant les points $(q_n, \rho q_n)$ et (r_{n+1}, r_{n+1}).
Soient $(d'_n)_{n\geq1}$ et $(d"_n)_{n\geq1}$ deux suites telles que $d'_n = d_n + \dfrac{1}{2n^2 d_n}$ et $d''_n = d'_n + \dfrac{1}{2n^2 d_n}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(0)$ sur $\mathbb{R}^-$, $f(0) = 0, f(r_n) = r_n, f(t_n) = t_n^2, f(d_n) = d_n, f(d'_n) = -\sqrt{d'_n}, f(d''_n) = d_n$ et $f(q_n) = \rho q_n$.
On connecte les valeurs aux points $r_n, t_n, d_n, d'_n, d''_n$ et q_n d'une manière linéaire comme le décrit la figure ci - dessous



Après un calcul élementaire on vérifie que :

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2} > 1, \liminf_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$$

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{\tilde{f}(s)}{s} = \rho < \frac{2}{\pi}$$

et

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2} = \limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$$

Nous remercions Mr J.P.Gossez pour diverses remarques liées à notre étude.

Références

[1] D.De Figuerido & J.P.Gossez, Un problème elliptique semi-linéaire sans condition de croissance, *C.R.Acad.Sc.Paris.*(308).(1989)

[2] A.R.El Amrouss, Résonance et nonrésonance dans des problèmes elliptiques semi-linéaires, *thèse de 3 cycle Université Mohamedi, Oujda*(1995).

[3] A.R. El Amrouss & M.Moussaoui, Nonrésonance entre les deux premières valeurs propres d'un problème quasi-linéaire (à paraître).

[4] M.L.C.Fernandes, P.Omari & F.Zanolin, On the solvability of a semilinear two point BVP around the First eigenvalue, *differential and Integral Equations* .2, 63-79.(1989)

[5] A.Hammertein, Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, *Acta math* 54, 171-167.(1930)

[6] J.Mawhin, Nonlinear variational two-point boundary value problems. *In : Proceeding of the conference "Variational Methods" Paris 1988, H.Berestici, J-HCoron, I.Ekeland,ed.,*, 209-219, Basel- Boston 1990.

[7] F.I.Njoku, Some remarks on the solvability of the nonlinear two point boundary value problems. *J.Negerian Math.Soc.,*, 10, 85-98.(1990)

A.R. El Amrouss et M.Moussaoui
Université Mohammed I
Faculté des sciences
Département de mathématiques
et informatique
Oujda, Maroc