Divulgaciones Matemáticas 1(1) (1993), 17–24

Una Caracterización de los Módulos Artinianos

A Characterization of Artinian Modules

Alirio J. Peña P.

Departamento de Matemática. Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia. Maracaibo 4001. Apartado Postal 526. Maracaibo-Venezuela

Resumen

El propósito de esta nota es probar la siguiente caracterización de los módulos artinianos en términos de los módulos finitamente encajados: sean M un R-módulo a izquierda y

$$\Lambda_M = \{N \leq M \quad | \quad \frac{M}{N} \text{ está finitamente encajado}\}.$$

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es artiniano;
2. Λ_M es cerrada bajo intersecciones arbitrarias;
3. Λ_M satisface la condición de cadena descendente.

Además, en general, se tiene que $\bigcap \Lambda_M = (0)$.
Palabras clave: módulo artiniano, módulo finitamente encajado, módulo simple, cápsula inyectiva y zócalo de un módulo.

Abstract

The purpose of this note is to show the following characterization of the artinian modules in terms of the finitely embedded modules: let M be a left R-module and let

$$\Lambda_M = \{N \leq M \quad | \quad \frac{M}{N} \text{ is finitely embedded}\}.$$

Then the following conditions are equivalent:

1. M is artinian;
2. Λ_M is closed under arbitrary intersections;
3. Λ_M satisfies the descending chain conditions.

Moreover, in general, $\bigcap \Lambda_M = (0)$.
Key words: artinian module, finitely embedded module, simple module, injective envelope and socle of a module.

1 Resultados básicos

En este artículo R siempre denotará un anillo asociativo con elemento identidad $1 \neq 0$ (no necesariamente conmutativo), el término *módulo* significará un R-módulo a izquierda unitario y para cada módulo M, pondremos $N \leq M$ para indicar que N es un submódulo de M. En particular, si N es un submódulo esencial de M, escribiremos $N \leq_e M$. Además, el símbolo $M \simeq N$ indicará que M y N son módulos isomorfos, mientras que $E(M)$ y $Soc(M)$ denotarán la cápsula inyectiva y el zócalo de M, respectivamente. Supondremos siempre que $M \leq E(M)$. Para una excelente referencia, el lector interesado puede consultar [1], en donde los módulos finitamente encajados son llamados *finitamente cogenerados*, puesto que si $R - simp$ denota un conjunto de representantes bajo isomorfismos de los módulos simples, entonces $\{E(S) : S \in R - simp\}$ es un conjunto de cogeneradores para la categoría de módulos R-Mod.

Los módulos finitamente encajados fueron introducidos por Vámos en [7] en su deseo de dualizar la noción de módulo finitamente generado. Un módulo M se dice que *está finitamente encajado* si y sólo si $E(M) \simeq E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$, donde $S_1, ..., S_n$ son módulos simples. El módulo cero (0), considerado como una suma directa vacía, está finitamente encajado. Vámos mostró algunas propiedades de tales módulos que justifican el considerarlos como duales de los módulos finitamente generados. Más tarde, V.A. Hiremath [3] ofrece una justificación categórica para una tal consideración, así como otras propiedades.

Vámos mostró que un módulo M está finitamente encajado si y sólo si M tiene zócalo esencial y finitamente generado. De donde, la clase Ω_1 formada por todos los módulos finitamente encajados es una *clase hereditaria* (i.e., cerrada bajo submódulos) y es fácil ver que Ω_1 también es *cerrada bajo extensiones* (i.e., si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ es una sucesión exacta de módulos con M_1 y M_3 en Ω_1, entonces M_2 también está en Ω_1). Así, Ω_1 es cerrada bajo imágenes isomórficas y productos directos finitos. Además, es claro que Ω_1 es una *clase estable* (i.e., cerrada bajo cápsulas inyectivas).

De acuerdo con J.P. Jans [4] esta noción de Vámos equivale a una definición debida a B. Pareigis, la cual exhibimos a continuación.

Teorema 1.1. *Condiciones equivalentes para un módulo M:*

1. *M está finitamente encajado;*
2. *Para cada cadena $\mathscr{G} = \{N_i : i \in I\}$ de submódulos de M tal que $\bigcap \mathscr{G} = (0)$, existe un índice $j \in I$ tal que $N_j = (0)$.*

Prueba: (Debida al autor)
$(1) \Rightarrow (2)$: Si I es un conjunto finito, la implicación es inmediata. Supongamos entonces que I es un conjunto infinito y que $N_i \neq (0)$ para cada $i \in I$. Como $N_i \leq M$, cada N_i está finitamente encajado. Ahora, para cada $i \in I$, sean $E_i = E(N_i)$ y $E = E(M)$. Entonces, $E_i \leq E = E(S_1) \oplus \cdots \oplus E(S_n)$, con $S_1, ..., S_n$ submódulos simples de M y es fácil ver que

$$E_i = \bigoplus_{k \in L_i} E(S_k)$$

donde $L_i = \{k : S_k \leq N_i\}$. Notar que cada L_i es no vacío, pues hemos supuesto que cada $N_i \neq (0)$.

Definamos ahora sobre el conjunto I la siguiente relación: si $i, s \in I$, escribiremos $i \sim s$ si y sólo si $L_i = L_s$. Claramente, $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto I. Además, si $i \leq s$ (siendo $\leq$ el orden total sobre I inducido por la cadena $\mathscr{G}$), entonces

$$i \sim s \Leftrightarrow N_i \leq_e N_s.$$

También, es claro que el conjunto cociente $\frac{I}{\sim}$ es finito. Así, tenemos que

$$\frac{I}{\sim} = \{\bar{i_1}, \bar{i_2}, ..., \bar{i_m}\},$$

siendo $\bar{i}$ la clase de equivalencia de $i \in I$ respecto de $\sim$ y donde podemos suponer que $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Es decir, que

$$N_{i_1} \subset N_{i_2} \subset \cdots \subset N_{i_m}.$$

Ahora, para cada $k : 1 \leq k \leq m$, sean

$$\mathscr{G}_k = \{N_i : i \sim i_k\} \text{ y } M_k = \bigcap \mathscr{G}_k.$$

Entonces, $M_k \leq M_t$ para cada $k \leq t$. De donde,

$$M_1 = \bigcap_{k=1}^{m} M_k = \bigcap \mathscr{G} = (0)$$

y así, (2) es una consecuencia del siguiente resultado, el cual es fácil de probar.

Lema 1.2. *Sea N un módulo finitamente encajado. Si $\{N_i : i \in I\}$ es una familia de submódulos de N tal que $\bigcap_i N_i = (0)$, entonces $N = (0)$.*

Para aplicar este Lema, basta observar que

$$M_1 = \bigcap \{N_i : N_i \leq_e M_{i_1}\} = (0).$$

Así, $N_{i_1} = (0)$, contradiciendo nuestro supuesto de que cada $N_i \neq (0)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supongamos desde ya que $M \neq (0)$ y sea

$$S = Soc(M) = \bigoplus_{k \in K} S_k$$

donde cada S_i es un submódulo simple de M. Por (2) y el Lema de Zorn (versión descendente), $S \neq (0)$ y como (2) es claramente una propiedad hereditaria, todo submódulo no nulo de M contiene un submódulo simple. De donde, tenemos que $S \leq_e M$.

Veamos ahora que el conjunto de índices K es finito (i.e., S está finitamente generado). En efecto, si K fuése infinito, K contendría un subconjunto infinito numerable, digamos $\{k_1, k_2, ...\}$. Así, tendríamos los siguientes submódulos no nulos de M:

$$M_n = \bigoplus_{j \geq n} S_{k_j}$$

para cada $n \geq 1$. Luego, $\{M_n : n \geq 1\}$ sería una cadena (descendente) de submódulos no nulos de M y así, por (2), tendríamos que $\bigcap_{n \geq 1} M_n \neq (0)$, lo cual genera rápidamente una contradicción.

Por tanto, S es un submódulo esencial y finitamente generado de M, lo cual dice que M está finitamente encajado. (Véase la prueba de $(b) \Rightarrow (a)$ en la Proposición 3.19 de [6].) $\square$

A continuación presentamos, sin demostración, los resultados que necesitaremos para probar nuestro teorema principal. Un módulo no nulo M se dice *subdirectamente irreducible* si y sólo si la intersección de todos los submódulos no nulos de M es no nula. Es claro que si M es un tal módulo, entonces $E(M) = E(S)$ para algún submódulo simple S de M y así, $M \in \Omega_1$.

Lema 1.3 ([2]). *Sean M un módulo no nulo, N un submódulo propio de M y $x \in M$ tal que $x \neq N$. Entonces, existe un submódulo L de M tal que $N \leq L$, $x \neq L$ y M/L es subdirectamente irreducible.*

La existencia de L se prueba usando un argumento de tipo Zorn. Ahora, para cada módulo M, pondremos

$$\Omega_M := \{N \leq M : M/N \in \Omega_1\}.$$

Usando el Lema 1.2, es fácil ver que $\bigcap \Omega_M = (0)$.

Proposición 1.4 ([7]). *Condiciones equivalentes para un módulo M:*

1. *M es artiniano;*
2. *$\Omega_M = \{$ submódulos de $M\}$.*

Lema 1.5 ([5]). *Para cada módulo M y $T \leq N \leq M$, se tiene que:*

1. *Ω_M es cerrada bajo intersecciones finitas.*
2. *Si $N \in \Omega_M$ y $x \in M$, entonces $(N : x) := \{r \in R : rx \in N\} \in \Omega_R$.*
3. *Si $T \in \Omega_N$ y $N \in \Omega_M$, entonces $T \in \Omega_M$.*
   Además, si H y N son submódulos de M y $H \cap \Omega_N := \{H \cap T : T \in \Omega_N\}$, entonces
4. *$H \cap \Omega_N \subseteq \Omega_H$, siempre que $H \leq N$ ó que $N \subseteq \Omega_M$.*

2 Demostración del teorema principal

Para cada submódulo N de un módulo M, usaremos la siguiente notación:

$$\Omega_M(N) := \{L \in \Omega_M : N \leq L\}.$$

Notar que $M \in \Omega_M(N)$ y la aplicación $L \longmapsto L/N$ establece una correspondencia biunívoca (que preserva inclusiones) entre los conjuntos $\Omega_M(N)$ y $\Omega_{M/N}$.

Proposición 2.1. *Si $\Omega_M(N)$ satisface la condición de cadena descendente, entonces $N \in \Omega_M$. En particular, si Ω_M satisface esta condición, entonces $M \in \Omega_1$.*

Prueba: Supongamos que $N \notin \Omega_M$. Entonces, $N \neq M$ y así, existe un $x \in M$ tal que $x \notin N$. Luego, por el Lema 1.2, existe un $L_1 \in \Omega_M$ tal que $N \leq L_1$ y $x \notin L_1$. De donde, $M \supset L_1 \supset N$. Ahora, igual que antes, si $x_1 \in L_1$ tal que $x_1 \notin N$, entonces existe un $L_2 \in \Omega_{L_1}$ tal que $N \leq L_2$ y $x_1 \notin L_2$. Luego, por la parte (3) del Lema 1.3, tenemos que

$$L_2 \in \Omega_M \text{ y } M \supset L_2 \supset L_1 \subset N.$$

Continuando de esta manera podríamos construir una cadena estríctamente descendente en $\Omega_M(N)$, lo cual es una contradición. Por tanto, $N \in \Omega_M$.□

Teorema 2.2. *Condiciones equivalentes para un módulo M:*

1. *M es artiniano;*
2. *Ω_M es cerrada bajo intersecciones arbitrarias;*
3. *Ω_M satisface la condición de cadena descendente.*

Prueba:
(1) $\Rightarrow$ (2) : Por la Proposición 1.1.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Supongamos (2) y sea

$$M = L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots$$

una cadena descendente en Ω_M. Entonces, por (2),

$$L = \bigcap_{i \geq 0} L_i \in \Omega_M .$$

De donde tenemos la siguiente cadena descendente de submódulos de M/L:

$$M/L = L_0/L \supseteq L_1/L \supseteq L_2/L \supseteq \cdots ,$$

con $M/L \in \Omega_1$.

Además, como $\bigcap_{i \geq 0} L_i/L = (0)$, por el Teorema 1.1, existe un entero positivo n tal que $L_n = L$ y así, $L_i = L$ para cada $i \geq n$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Por (3) y la Proposición 2.1, $\Omega_M = \{$ submódulos de M $\}$ y así, por la Proposición 1.4, vale (1). $\square$

Observación: El autor en [5] introduce la siguiente generalización de la clase Ω_1 formada por los módulos finitamente encajados. Una clase de módulos Ω se dice una *clase HCE* si y sólo si Ω es hereditaria y cerrada bajo extensiones. Evidentemente, Ω_1 es una clase HCE. Otros ejemplos de clases HCE son las llamadas *clases de Serre* (i.e., clases HCE cerradas bajo imágenes homomórficas), tales como:

$$\Omega_2 = \{ \text{módulos noetherianos} \} \text{ y } \Omega_3 = \{ \text{módulos artinianos} \},$$

entre otras. Una clase HCE Ω se dice *pseudo-estable* si y sólo si Ω contiene la cápsula inyectiva de cada módulo simple (o equivalentemente, si $\Omega_1 \subseteq \Omega$). Es claro que una clase HCE no necesita ser seudo-estable, ni mucho menos ser una clase estable.

Si Ω es una clase HCE, entonces cada módulo M se puede dotar de una topología (lineal) al tomar como base de entornos del cero al conjunto

$$\Omega_M = \{N \leq M : M/N \in \Omega\},$$

la cual llamaremos la Ω-*topología de M*.

Además, si Ω es pseudo-estable y consideramos a R y M con sus respectivas Ω-topologías, entonces se tiene que:

1. R es un anillo topológico.
2. M es un R-módulo topológico.
3. La Ω-topología de M es Hausdorff (pues $\bigcap \Omega_M = (0)$) y disconexa.
4. Cada submódulo de M es cerrado en la Ω-topología de M.
5. Cada homomorfismo de módulos es una función continua.

Agradecimiento

Este trabajo fué realizado mientras el autor era profesor Asistente en el Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas de la Universidad Simón Bolívar de Venezuela, a cuyos miembros el autor agradece enormemente toda la ayuda y buen trato recibido. En especial, el autor desea dejar constancia de la deuda que tiene con los profesores Jorge Viola-Prioli y Claudio Margaglio por todas sus enseñanzas y consejos.

Referencias

[1] Anderson, F.R. and Fuller, K., *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1974.

[2] Choudhury, D.P. and Tewari, K., *Tensor purities, cyclic quasi-projectives and cocyclic copurity*, Comm. Algebra 7 (15) (1979), 1559-1572.

[3] Hiremath, V.A., *Cofinitely generated and cofinitely related modules*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 39 (1-3) (1982), 1-9.

[4] Jans, J.P., *On co-noetherian rings*, J. London Math. Soc. 1 (2) (1969), 588-590.

[5] Peña, A.J., *Clases H.C.E. pseudo-estables y su funtor núcleo generado*, Reporte Técnico No. 91-02, Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Universidad Simón Bolívar, Caracas, 1991.

[6] Sharpe, D.W. and Vámos, P., *Injective modules*, Cambridge at the University Press, Cambridge, 1972.

[7] Vámos, P., *On the dual of the notion of "finitely generated"*, J. London Math. Soc. 43 (1968), 643-646.