

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto

Un *problema* (del griego $\pi\rho\omicron\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$, lanzar adelante) es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada. El concepto de problema es muy amplio y el estudio de las técnicas, métodos y habilidades intelectuales involucradas en su resolución ha sido abordado desde múltiples ángulos por expertos en psicología, heurística, inteligencia artificial y otras disciplinas. En el campo de la matemática, George Polya en su ya clásico libro “How to solve it” fue uno de los primeros en llamar la atención sobre la importancia de los problemas y del entrenamiento metódico para resolverlos. Paul Halmos ha ido más lejos, afirmando que la principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y que por lo tanto en lo que *realmente* consiste la matemática es en problemas y soluciones. Sin duda que los axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones, métodos, fórmulas y teorías son esenciales y la matemática no podría existir sin ellos, pero en la opinión de Halmos no están “en el corazón mismo” de la matemática, como la están los problemas. Por estas razones los problemas forman parte integral de la educación matemática, y existe abundante literatura sobre los mismos. Se han estructurado cursos completos en varias ramas de la matemática basados en problemas, seminarios sobre resolución de problemas, y en las olimpiadas matemáticas nacionales e internacionales, así como otras competencias, se trata de descubrir los jóvenes talentos a través de la resolución de problemas. En muchas revistas matemáticas se publican problemas y soluciones, siendo tal vez la sección correspondiente de “The American Mathematical Monthly” una de las más famosas. Lo mismo haremos en esta publicación. Invitamos a los lectores a enviar problemas para ser propuestos, tratando que sean originales e interesantes. No son adecuados para esta sección ejercicios sencillos ni resultados conocidos, ni tampoco problemas abiertos o que requieran conocimientos muy especializados para abordarlos.

Creemos que los cuatro problemas que incluimos en este número servirán como ejemplo. Asimismo esperamos que nos envíen soluciones a los problemas propuestos, las mejores de las cuales serán publicadas.

Problema 1

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos tal que si $i \neq j$ entonces $|z_i - z_j| > 1$.

- Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n^\alpha$ converge absolutamente para todo real $\alpha > 2$.
- Muestre con un ejemplo que lo anterior no es cierto para $\alpha = 2$.

Problema 2

Sea $a > 2$ un número real y definamos una sucesión así: $x_0 = a$, $x_n = x_{n-1}^2 - 2$ para $n > 0$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Problema 3

Sea n un entero positivo y G un grafo con $2n$ vértices y al menos $n^2 + 1$ aristas.

- Pruebe que G contiene al menos un triángulo.
- ¿Puede afirmarse lo mismo si el grafo contiene $2n$ vértices y n^2 aristas?

Problema 4

Sea f una función continua a valores reales definida en la frontera S del cubo unitario $[0, 1]^n$ en R^n tal que las restricciones a cada cara $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ y $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ sean polinomios para $i = 1, \dots, n$. Pruebe que existe una función polinomial $P : R^n \rightarrow R$ cuya restricción a S es f .