Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1(2007), pp. 23–34

Extensión de familias multiplicativas de isometrías

Extension of multiplicative families of isometries

Ramón Bruzual (rbruzual@euler.ciens.ucv.ve)
Marisela Domínguez (mdomin@euler.ciens.ucv.ve)
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela
Caracas, Venezuela.

Resumen

Se prueba que una familia multiplicativa de isometrías en un espacio de Hilbert, con parámetro en un intervalo de un grupo ordenado y con subespacio generador, se puede extender a un grupo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert más grande. Como corolario se obtiene un resultado conocido, que establece que toda función a valores operadores y definida positiva en un intervalo de un grupo ordenado, se puede extender a una función definida positiva en todo el grupo.
Palabras y frases clave: completamente positiva, definida positiva, grupo ordenado, representación unitaria

Abstract

We prove that a multiplicative family of isometries on a Hilbert space, with parameter on an interval of an ordered group and with generating subspace, can be extended to a group of unitary operators on a larger Hilbert space. As a corollary we obtain the known result that every operator valued positive definite function on an interval of an ordered group, can be extended to a positive definite function on the whole group.
Key words and phrases: completely positive, positive definite, ordered group, unitary representation

Recibido 2006/11/03. Revisado 2007/07/16. Aceptado 2007/09/03
MSC (2000): Primary 47A20; Secondary 47D03, 43A17, 43A35.

1 Introducción

Sea a un número real positivo, M. G. Kreĭn [10] probó que toda función a valores complejos, continua y definida positiva en $(-a, a)$ puede extenderse a una función continua y definida positiva en toda la recta.

El desarrollo de la teoría de operadores y su interrelación con el análisis armónico ha mostrado que éste y otros problemas de interpolación pueden llevarse al contexto de la teoría de operadores, considerando familias multiplicativas de operadores asociadas de manera natural al problema considerado (ver por ejemplo [7], [11], [14], [2], [5], [6])

En este trabajo se prueba que una familia multiplicativa de isometrías en un espacio de Hilbert, con parámetro en un intervalo de un grupo ordenado y con subespacio generador, se puede extender a un grupo de operadores unitarios en un espacio de Hilbert más grande (Teorema 3.8).

Como aplicación se obtiene una generalización del resultado de Kreĭn para funciones a valores operadores, definidas positivas en un intervalo contenido en un grupo ordenado, que fue probada en [4]. Además se considera el problema de la continuidad de la extensión y se prueba que si se parte de una función débilmente continua y definida positiva, entonces toda extensión es débilmente (y por lo tanto fuertemente) continua en todo el grupo (Teorema 4.1).

2 Preliminares.

Definición 2.1. Sean Ω un grupo abeliano, D un subconjunto de Ω y $L(\mathcal{H})$ el espacio de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se dice que una función $F : D \to L(\mathcal{H})$ es *definida positiva* si

$$\sum_{x,y\in\Omega} \langle F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

para toda función $h : D \to \mathcal{H}$, con soporte finito y tal que soporte(h) $-$ soporte$(h) \subset D$.

Sea $(\Gamma, +)$ un grupo abeliano con elemento neutro 0_Γ. Γ es un *grupo ordenado* si existe un conjunto $\Gamma_+ \subset \Gamma$ tal que:

$$\Gamma_+ + \Gamma_+ = \Gamma_+, \qquad \Gamma_+ \bigcap (-\Gamma_+) = \{0_\Gamma\}, \qquad \Gamma_+ \bigcup (-\Gamma_+) = \Gamma.$$

En este caso si $x, y \in \Gamma$ escribimos $x \leq y$ si $\mathrm{y} - \mathrm{x} \in \Gamma_+$, también escribimos $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$, luego $\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq 0_\Gamma\}$. Si no hay confusión posible, usaremos 0 en lugar de 0_Γ. Cuando Γ es un grupo topológico se supone que Γ_+ es cerrado.

Si $a, b \in \Gamma$ y $a < b$,

$$(a, b) = \{x \in \Gamma : a < x < b\}, \qquad [a, b] = \{x \in \Gamma : a \leq x \leq b\}, \qquad \text{etc.}$$

Proposición 2.2. *Sean Γ un grupo ordenado, $a \in \Gamma$, $a > 0$ y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.*

Si la función $F : (-a, a) \to L(\mathcal{H})$ satisface

$$\sum_{x,y \in [0,a)} \langle F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

para toda función con soporte finito $h : [0, a) \to \mathcal{H}$, entonces F es definida positiva en $(-a, a)$.

Demostración. Sea $h : (-a, a) \to \mathcal{H}$ una función con soporte finito. Supóngase que soporte$(h) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, donde $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$. Entonces $0 \leq \gamma_k - \gamma_1$, para $k = 1, \ldots, n$, luego $\gamma_k - \gamma_1 \in [0, a)$ para $k = 1, \ldots, n$.

Sea $h' : [0, a) \to \mathcal{H}$ definida por $h'(\gamma) = h(\gamma + \gamma_1)$, entonces

$$\sum_{x,y \in \Gamma} \langle F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{x,y \in [0,a)} \langle F(x-y)h'(x), h'(y)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

□

3 Familias multiplicativas de isometrías con subespacio generador

Definición 3.1. Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert, sea Γ un grupo abeliano ordenado y sea $a \in \Gamma$ tal que $a > 0$.

Una *familia multiplicativa de isometrías parciales* en $(\mathcal{E}, \Gamma)$ es una familia $(S_\gamma, \mathcal{E}_\gamma)_{\gamma \in [0,a)}$ tal que:

(a) Para cada $\gamma \in [0, a)$ se tiene que $\mathcal{E}_\gamma$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$.

(b) Para cada $\gamma \in [0, a)$, $S_\gamma : \mathcal{E}_\gamma \to \mathcal{E}$ es una isometría lineal y $S_0 = I_{\mathcal{E}}$.

(c) $\mathcal{E}_y \subset \mathcal{E}_x$ si $x, y \in [0, a)$ y $x < y$.

(d) Si $x, y \in [0, a)$ y $x + y \in [0, a)$ entonces $S_y\mathcal{E}_{x+y} \subset \mathcal{E}_x$ y $S_{x+y}h = S_xS_yh$ para todo $h \in \mathcal{E}_{x+y}$.

Para demostrar el resultado principal serań necesarios algunos resultados auxiliares, que se irán probando a continuación.

En lo que sigue $\mathcal{E}$ es un espacio de Hilbert, Γ es un grupo abeliano ordenado y $(S_\gamma, \mathcal{E}_\gamma)_{\gamma\in[0,a)}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales.

Definición 3.2. Un *subespacio generador* para la familia $(S_\gamma, \mathcal{E}_\gamma)_{\gamma\in[0,a)}$ es un subespacio cerrado $\mathfrak{N}$ de $\mathcal{E}$ tal que:

(a) $\mathfrak{N} \subset \bigcap_{\gamma\in[0,a)} \mathcal{E}_\gamma$.

(b) $\mathcal{E}_\lambda = \bigvee_{0\leq\gamma<a-\lambda} S_\gamma \mathfrak{N}$ para todo $\lambda \in [0,a)$.

Proposición 3.3. *Si $x, y, x+y \in [0,a)$ y $f \in \mathfrak{N}$ entonces*

$$S_y f \in \mathcal{E}_x \quad y \quad S_{x+y} f = S_x S_y f.$$

Demostración. Sean $x, y \in [0,a)$ tales que $x+y \in [0,a)$ y sea $f \in \mathfrak{N}$. Como $0 \leq y < a - x$, por la parte (b) de la Definición 3.2, tenemos que $S_y f \in \mathcal{E}_x$, luego $S_{x+y} f = S_x S_y f$. □

Sea $(G,+)$, con elemento neutro e_G el grupo dual de Γ con la topología discreta. Sea $C(G)$ el espacio de las funciones continuas a valores escalares con dominio G.

Sea S el conjunto de todos los polinomios trigonométricos $p : G \to \mathbb{C}$ tales que soporte$(\widehat{p}) \subset (-a,a)$.

Entonces S es un sistema operador (“operator system”), contenido en el álgebra $\mathcal{A} = C(G)$.

Sea $K : (-a,a) \to L(\mathfrak{N})$ definido por

$$K(\gamma) = P_{\mathfrak{N}} S_\gamma|_{\mathfrak{N}}$$

si $\gamma \in [0,a)$ y $K(\gamma) = K(-\gamma)^*$ si $\gamma \in (-a,0]$, donde $P_{\mathfrak{N}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{E}$ sobre $\mathfrak{N}$.

Se define $L : S \to L(\mathfrak{N})$ por

$$L(p) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \widehat{p}(\gamma) K(\gamma).$$

Proposición 3.4. *Se tiene que*

(a) Si $x, y \in [0, a)$ y $f, g \in \mathfrak{N}$ entonces $\langle K(x-y)f, g\rangle_{\mathfrak{N}} = \langle S_x f, S_y g\rangle_{\mathcal{E}}$,

(b) K es una función definida positiva.

Demostración. (a) Sean $f, g \in \mathfrak{N}$ y sean $x, y \in [0, a)$. Si $x \geq y$, entonces

$$\langle K(x-y)f, g\rangle_{\mathfrak{N}} = \langle S_{x-y} f, g\rangle_{\mathcal{E}} = \langle S_x f, S_y g\rangle_{\mathcal{E}}.$$

Si $x \leq y$, entonces

$$\langle K(x-y)f, g\rangle_{\mathfrak{N}} = \langle f, (K(x-y))^* g\rangle_{\mathfrak{N}} = \langle f, K(y-x)g\rangle_{\mathcal{E}} = \langle S_x f, S_y g\rangle_{\mathcal{E}}.$$

(b) Sea $h : [0, a) \to \mathfrak{N}$ una función con soporte finito, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{x,y\in[0,a)} \langle K(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathfrak{N}} &= \sum_{x,y\in[0,a)} \langle S_x h(x), S_y h(y)\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \left\| \sum_{x\in[0,a)} S_x h(x) \right\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

□

Definición 3.5. Sea N un número natural, se dice que un conjunto Q contenido en $\{(k, l) \in \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, N\} : k \leq l\}$ es un cuasitriángulo si

$$l_k = \max\{l : k \leq l \leq N, (k, l) \in Q\} \geq k$$

para cada $1 \leq k \leq N$ y para cada (k', l') con $k \leq k' \leq l' \leq l_k$, se tiene que $(k', l') \in Q$.

En [1] se puede hallar más información acerca de los cuasitriángulos.

Proposición 3.6. *Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$.*
Entonces existe una matriz positiva

$$A = (A_{kl})_{k,l=1}^{n} \in L(\mathfrak{N} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N})$$

tal que

$$A_{kl} = K(\gamma_l - \gamma_k) \quad si \quad \gamma_l - \gamma_k \in [0, a).$$

Demostración. La demostración de este resultado se basa en algunos resultados dados en [1, Section 3]. Sea

$$E = \{(k,l) :\ 1 \leq k \leq l \leq n \ \text{y}\ \gamma_l - \gamma_k \in [0,a)\}.$$

Se probará que E es un cuasitriángulo.

Como $0 \in [0,a)$, se tiene que $(k,k) \in E$ para $1 \leq k \leq n$, luego $l_k \geq k$.

Supóngase que $k \leq k' \leq l' \leq l_k$, donde $1 \leq k \leq n$, entonces

$$0 \leq \gamma_{l'} - \gamma_{k'} \leq \gamma_{l_k} - \gamma_k,$$

como $\gamma_{l_k} - \gamma_k \in [0,a)$ se tiene que $\gamma_{l'} - \gamma_{k'} \in [0,a)$, luego $(k', l') \in [0,a)$.

Como f es definida positiva, toda matriz de la forma $(f(\gamma_{l'} - \gamma_{k'}))_{k \leq k', l' \leq l_k}$ es positiva, así que el resultado sigue de [1, Corolario 3.2].

$\square$

Lema 3.7. *La aplicación L es completamente positiva.*

Demostración. Primero se probará que L es positiva. Sea $p \in S$ un elemento positivo. Se define $\Phi_p : \Gamma \to L(\mathfrak{N})$ por

$$\Phi_p(\gamma) = \widehat{p}(\gamma) K(\gamma).$$

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$. Se mostrará que la matriz a valores operadores $(\Phi_p(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^n$ es positiva.

Sea A como en la Proposición 3.6, entonces la matriz $(\Phi_p(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^n$ es el producto de Schur de las matrices $\left(\widehat{p}(\gamma_l - \gamma_k)\right)_{k,l=1}^n$ y A.

La matriz $\left(\widehat{p}(\gamma_l - \gamma_k)\right)_{k,l=1}^n$ es positiva porque p toma valores positivos, luego la matriz $(\Phi_p(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^n$ es positiva.

Por lo tanto Φ_p es una función definida positiva y

$$\widehat{\Phi_p}(e_G) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi_p(\gamma) = L(p)$$

es positiva.

Ahora se mostrará que L es completamente positiva. Sea N un entero positivo, sea $\mathcal{M}_N$ el espacio de las matrices complejas $N \times N$ y sea $L_N : \mathcal{M}_N(S) \to \mathcal{M}_N(L(\mathfrak{N}))$ la aplicación inducida por L, es decir

$$L_N\left((p_{ij})_{i,j=1}^N\right) = (L(p_{ij}))_{i,j=1}^N$$

(ver [9, pag. 25] para los detalles).

Sea $\varsigma = (p_{ij})_{i,j=1}^{N}$ un elemento positivo de $\mathcal{M}_N(S)$.

Definamos $\Phi_\varsigma : \Gamma \to L\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{N}\right)$ mediante

$$\Phi_\varsigma(\gamma) = \left(\widehat{p_{ij}}(\gamma)\, K(\gamma)\right)_{i,j=1}^{N}.$$

Sea $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tal que $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n$. Como antes se probará que la matriz a valores operadores $(\Phi_\varsigma(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^{n}$ es positiva.

Sea $A = (A_{kl})_{k,l=1}^{n}$ como en la Proposición 3.6. Se tiene que

$$(\Phi_\varsigma(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^{n} = \left(\left(\widehat{p_{ij}}(\gamma_l - \gamma_k)\, K(\gamma_l - \gamma_k)\right)_{i,j=1}^{N}\right)_{k,l=1}^{n}$$

Aplicando el rearreglo canónico, se obtiene la siguiente matriz

$$(\Phi_\varsigma(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^{n} = \left(\left(\widehat{p_{ij}}(\gamma_l - \gamma_k)\, K(\gamma_l - \gamma_k)\right)_{k,l=1}^{n}\right)_{i,j=1}^{N}$$

que es igual a

$$\left(\left(\widehat{p_{ij}}(\gamma_l - \gamma_k)\right)_{k,l=1}^{n}\right)_{i,j=1}^{N} \odot \begin{pmatrix} A & A & \ldots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A & A & \ldots & A \end{pmatrix}$$

donde $\odot$ denota el producto de Schur. Las matrices

$$\left(\left(\widehat{p_{ij}}(\gamma_l - \gamma_k)\right)_{k,l=1}^{n}\right)_{i,j=1}^{N}$$

y

$$\begin{pmatrix} A & A & \ldots & A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A & A & \ldots & A \end{pmatrix} = A \otimes \begin{pmatrix} I & I & \ldots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I & I & \ldots & I \end{pmatrix}$$

son positivas, así que $(\Phi_\varsigma(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^{n}$ es positiva.

Por lo tanto $L_N(\varsigma) = \widehat{\Phi_\varsigma}(e_G) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi_\varsigma(\gamma)$ es positivo.

□

A continuación damos el resultado principal.

Teorema 3.8. *Sea Γ un grupo abeliano ordenado, sea $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert y sea $a \in \Gamma$, $a > 0$. Si $(S_\gamma, \mathcal{E}_\gamma)_{\gamma\in[0,a)}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales con subespacio generador en $(\mathcal{E}, \Gamma)$, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de Γ en $L(\mathcal{F})$ tal que $S_\gamma = U_\gamma|_{\mathcal{E}_\gamma}$ para todo $\gamma \in [0, a)$.*

Demostración. Sea L como en el Lema 3.7. Por el teorema de extensión de Arveson (ver [3, 9]) existe una aplicación completamente positiva $\widetilde{L} : C(G) \to L(\mathfrak{N})$ que extiende a L.

Del teorema de representación de Stinespring (ver [13, 9]), se obtiene que existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$, un homomorfismo unital $\Pi : C(G) \to L(\mathcal{F})$ y un operador acotado $J : \mathfrak{N} \to \mathcal{F}$ tal que

$$\widetilde{L}(g) = J^*\Pi(g)J$$

para todo $g \in C(G)$.

Sea $\mathbf{1} : G \to \mathbb{C}$ definida por $\mathbf{1}(\xi) = 1$, entonces $\mathbf{1}$ es el elemento neutro de $C(G)$.

Como

$$J^*J = J^*\Pi(\mathbf{1})J = \widetilde{L}(\mathbf{1}) = K(0) = I_{\mathfrak{N}}$$

se tiene que J es una isometría.

Para $\gamma \in \Gamma$ sea $\epsilon_\gamma : G \to \mathbb{C}$ definido por $\epsilon_\gamma(\xi) = \xi(\gamma)$, entonces $\epsilon_{0_\Gamma} = \mathbf{1}$ y $\epsilon_{\gamma_1+\gamma_2} = \epsilon_{\gamma_1}\,\epsilon_{\gamma_2}$.

Si se define

$$U_\gamma = \Pi(\epsilon_\gamma)$$

entonces U_γ es una representación unitaria de Γ en $L(\mathcal{F})$.

Para $\gamma \in (-a, a)$ se tiene que

$$K(\gamma) = L(\epsilon_\gamma) = J^*U_\gamma J.$$

Luego $P_{\mathfrak{N}} S_\gamma|_{\mathfrak{N}} = J^*U_\gamma J$, si $\gamma \in [0, a)$.

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in [0, a)$ y $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|S_{\gamma_1} f_1 + \cdots + S_{\gamma_n} f_n\|^2_{\mathcal{E}} &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle S_{\gamma_i} f_i, S_{\gamma_j} f_j\rangle_{\mathcal{E}} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle K(\gamma_i - \gamma_j) f_i, f_j\rangle_{\mathcal{E}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle J^*U_{\gamma_i-\gamma_j} J f_i, f_j\rangle_{\mathcal{E}} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle U_{\gamma_i-\gamma_j} J f_i, J f_j\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \|U_{\gamma_1} J f_1 + \cdots + U_{\gamma_n} J f_n\|^2_{\mathcal{F}}
\end{aligned}$$

En consecuencia la aplicación

$$S_{\gamma_1} f_1 + \cdots + S_{\gamma_n} f_n \mapsto U_{\gamma_1} J f_1 + \cdots + U_{\gamma_n} J f_n$$

define un operador isométrico de $\mathcal{E} = \bigvee_{\gamma \in [0,a)} S_\gamma \mathfrak{N}$ en $\mathcal{F}$, por lo tanto $\mathcal{E}$ puede identificarse con un subespacio de $\mathcal{F}$ y, con esta identificación, $S_\gamma = U_\gamma|_{\mathcal{E}_\gamma}$ para todo $\gamma \in [0, a)$.

□

4 Aplicación: Extensión de funciones definidas positivas en un intervalo

Teorema 4.1. *Sean Γ un grupo abeliano ordenado, $a \in \Gamma$, $a > 0$ y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $k : (-a, a) \to L(\mathcal{H})$ una función definida positiva entonces:*

(a) k tiene una extensión definida positiva a todo el grupo Γ.

(b) Si Γ es un grupo topológico y k es débilmente continua entonces cualquier extensión definida positiva de k es fuertemente continua.

Demostración.
(a) Sea $\mathcal{M}$ el espacio vectorial definido por

$$\mathcal{M} = \{f : [0, a) \to \mathcal{H} : \text{ soporte de } f \text{ es finito}\}.$$

Para $f, g \in \mathcal{M}$ se define

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{x,y \in [0,a)} \langle k(x-y) f(x), g(y)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Es claro que $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{M}}$ es una forma sesquilineal no-negativa en $\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{E}$ el espacio de Hilbert obtenido completando $\mathcal{M}$ después de tomar el cociente natural.

Para $\gamma \in [0, a)$ sea

$$\mathcal{M}_\gamma = \{f \in \mathcal{M} : \text{soporte} f \subset [0, a-\gamma)\}$$

y para $f \in \mathcal{M}_\gamma$ sea

$$(S_\gamma f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \gamma) \\ f(x-\gamma) & \text{si } x \in [\gamma, a). \end{cases}$$

Entonces $S_\gamma : \mathcal{M}_\gamma \to \mathcal{M}$ es un operador isométrico. Sea $\mathcal{E}_\gamma$ la clausura de $\mathcal{M}_\gamma$ en $\mathcal{E}$. Es claro que S_γ puede extenderse a un operador isométrico de $\mathcal{E}_\gamma$ a $\mathcal{E}$, que también denotaremos por S_γ.

Es sencillo probar que la familia $(S_\gamma, \mathcal{E}_\gamma)_{\gamma\in[0,a)}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales.

Para $\gamma_0 \in \Gamma$, sea δ_{γ_0} la función definida por

$$\delta_{\gamma_0}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \gamma_0, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sean $h \in \mathcal{H}$ y $\gamma \in [0, a)$, se tiene que $h\delta_\gamma$ es un elemento de $\mathcal{M}$. Además si $[h\delta_\gamma]$ denota la clase de equivalencia de $h\delta_\gamma$ en $\mathcal{E}$, entonces $[h\delta_0] \in \mathcal{E}_\gamma$ para todo $\gamma \in [0, a)$ y

$$S_\gamma[h\delta_0] = [h\delta_\gamma].$$

Por lo tanto si $\mathfrak{N}$ es la clausura de la variedad lineal $\{[h\delta_0] : h \in \mathcal{H}\}$, entonces $\mathfrak{N}$ es un subespacio generador para la familia $(S_\gamma, \mathcal{E}_\gamma)_{\gamma\in[0,a)}$.

Por el Teorema 3.8 existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{E}$ como un subespacio cerrado y una representación unitaria $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de Γ en $L(\mathcal{F})$ tal que $S_\gamma = U_\gamma|_{\mathcal{E}_\gamma}$ para todo $\gamma \in [0, a)$.

Sean $\gamma, \gamma' \in (-a, a)$, $h, h' \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle k(\gamma - \gamma')h, h'\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle [h\delta_\gamma], [h'\delta_{\gamma'}]\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle U_\gamma[h\delta_0], U_{\gamma'}[h'\delta_0]\rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \langle U_{\gamma-\gamma'}[h\delta_0], [h'\delta_0]\rangle_{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

Si se define $\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ por $\tau h = [h\delta_0]$ entonces

$$\| \tau h \|^2_{\mathcal{F}} = \langle \tau h, \tau h\rangle_{\mathcal{E}} = \langle k(0)h, h\rangle_{\mathcal{H}} \leq \| k(0) \|_{L(\mathcal{H})} \| h \|^2_{\mathcal{H}}$$

así que τ es un operador lineal acotado y para $\gamma \in [-2a, 2a]$

$$k(\gamma) = \tau^* U_\gamma \tau.$$

Definiendo $K(\gamma) = \tau^* U_\gamma \tau$ para $\gamma \in \Gamma$ se obtiene el resultado.

(b) Sea K una extensión definida positiva de k a todo el grupo. Para $h \in \mathcal{H}$ la función a valores escalares

$$\gamma \mapsto \langle K(\gamma)h, h\rangle$$

es definida positiva y, por hipótesis es continua $(-a, a)$.

Como $0 \in (-a, a)$, del resultado correspondiente para funciones a valores escalares (ver [12, pag. 24]) y de la fórmula de polarización se obtiene que K es débilmente continua.

La continuidad fuerte se sigue del hecho general de que la dilatación unitaria minimal de Naimark de una función definida positiva débilmente continua es fuertemente continua.

$\square$

Observación 4.2. La parte (a) de este resultado fue probada:

(i) Por Kreĭn para el caso $\Gamma = \mathbb{R}$ y f a valores escalares y continua ([10]).

(ii) En [8], para $\Gamma = \mathbb{R}$ y f una función débilmente continua a valores operadores.

(iii) En [6], para el caso $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ ó $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n$ con el orden lexicográfico y f una función débilmente continua a valores operadores.

(iv) En [4], para un grupo ordenado general y f una función a valores operadores.

Referencias

[1] Gr. Arsene, Zoia Ceausescu, T. Constantinescu, *Schur analysis of some completion problems.* Linear Algebra Appl. **109** (1988) 1–35. Citado en página(s): 27, 28

[2] R. Arocena, *On the Extension Problem for a class of translation invariant positive forms.* J. Operator Theory **21** (1989), 323–347. Citado en página(s): 24

[3] W. Arveson, *Subalgebras of C^* algebras.* Acta Math. **123** (1969) 141–224. Citado en página(s): 30

[4] M. Bakonyi, *The extension of positive definite operator-valued functions defined on a symmetric interval of an ordered group.* Proc. Am. Math. Soc. **130**, No.5, (2002) 1401–1406. Citado en página(s): 24, 33

[5] R. Bruzual, *Local semigroups of contractions and some applications to Fourier representation theorems.* Integral Equations Operator Theory **10** (1987), 780–801. Citado en página(s): 24

[6] R. Bruzual, M. Domínguez, *Extensions of operator valued positive definite functions and commutant lifting on ordered groups.* J. Funct. Anal. **185** (2001) 456–473. Citado en página(s): 24, 33

[7] A. Devinatz, *On the extensions of positive definite functions.* Acta Math. **102**, (1959), 109–134. Citado en página(s): 24

[8] M. L. Gorbachuck, *Representation of positive definite operator functions.* Ukrainian Math. J. **17** (1965) 29–46. Citado en página(s): 33

[9] V. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, 146. (1986). Citado en página(s): 29, 30

[10] M. G. Kreĭn, *Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **26** (1940) 17–22. Citado en página(s): 24, 33

[11] D. Sarason, *Generalized interpolation in H^∞.* Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967) 179–203. Citado en página(s): 24

[12] Z. Sasvári, *Positive definite and definitizable functions.* Akademie Verlag, 1994. Citado en página(s): 33

[13] W. Stinespring, *Positive functions on C^*-algebras.* Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955) 211-216. Citado en página(s): 30

[14] B. Sz.-Nagy and C. Foias, *Dilatation des commutants d'operateurs.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A, **266** (1968) 493–495. Citado en página(s): 24