Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 2(2007), pp. 235–252

Sobre la propiedad hipercontractiva.

On the hipercontractivity property.

Wilfredo Urbina(wurbina@euler.ciens.ucv.ve)
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UCV.
Apartado 47195, Los Chaguaramos, Caracas 1041-A Venezuela, y
Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico,
Albuquerque, NM, 87131, USA.

Resumen

En este artículo estudiamos la propiedad hipercontractiva desde su aparición en el estudio del semigrupo de Ornstein Uhlenbeck como su posterior extensión a semigrupos Markovianos. Además estudiamos el desarrollo de criterios para determinar si un semigrupo dado tiene dicha propiedad mediante el estudio de desigualdades de curvatura-dimensión y de desigualdades funcionales.
Palabras y frases clave: Medida gaussiana, semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck, propiedad Hipercontractiva, semigrupos markovianos, desigualdad logarítmica de Sobolev, desigualdades funcionales, desigualdades de curvatura-dimensión.

Abstract

In this article we study the Hypercontractivity property since it was found as a property of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup as well as its extension to Markov semigroups. We also study the development of tests in order to determine if a given semigroup has this property by using curvature-dimension inequalities and functional inequalities.
Key words and phrases: Gaussian Measure, Ornstein-Uhlenbeck semigroup, Hypercontractivity property, Markov semigroups, Logarithmic Sobolev inequality, Functional inequalities, Curvature-dimension inequalities.

Recibido 2006/03/17. Revisado 2006/07/21. Aceptado 2006/08/07.
MSC (2000): Primary 42B25, 47D03, 42C10; Secondary 60H99, 42A99.

1 El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.

El **semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck** en $\mathbb{R}^d$ está definido como

$$T_t f(x) \quad = \quad \frac{1}{(1-e^{-2t})^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{e^{-2t}(|x|^2+|y|^2)-2e^{-t}\langle x,y\rangle}{1-e^{-2t}}} f(y)\gamma_d(dy), \qquad (1)$$

donde $\gamma_d(dy) = \frac{e^{-|y|^2}}{\pi^{d}/2}$ es la medida gaussiana en $\mathbb{R}^d$. Esta familia de operadores fue inicialmente estudiada en el caso unidimensional $d = 1$, por B. Muckenhoupt en [15] aunque sin considerar la estructura de semigrupo, sino como una integral de Poisson.

Obsérvese que, la integral en (1) se puede escribir como

$$T_t f(x) \quad = \quad \frac{1}{\pi^{d/2}(1-e^{-2t})^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y-e^{-t}x|^2}{1-e^{-2t}}} f(y)dy. \qquad (2)$$

De esta última expresión es claro entonces que el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es una reparametrización del semigrupo del calor precedida de una dilatación en la variable x, por lo tanto, no es un semigrupo de convolución, ya que antes de convolucionar el núcleo del calor, debidamente re-pa-ra-me-tri-za-do, se toma una dilatación por e^{-t} en la variable x. Es por esta dilatación que ninguno de los métodos utilizados para el estudio de semigrupos clásicos (véase [20]) son en forma inmediata aplicables para este semigrupo. La relación entre el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck y el semigrupo del calor ha sido estudiada con gran detalle por Weissler en [24].

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $u = \frac{y-e^{-t}x}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$, tenemos

$$T_t f(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\sqrt{1-e^{-2t}}u + e^{-t}x)e^{-|u|^2} du. \qquad (3)$$

Mediante esta última expresión se ve que el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck tiene una extensión natural en infinitas dimensiones, debido a que la medida de Gauss, a diferencia de la medida de Lebesgue, puede ser definida en espacios de dimensión infinita (véase P.A. Meyer [14]).

El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es un semigrupo de Markov, de difusiones simétrico, fuertemente L^p-continuo en $L^p(\gamma_d), 1 \leq p \leq \infty$, con generador infinitesimal L, es decir en forma precisa, la familia de operadores $\{T_t : t \geq 0\}$ satisface las siguientes propiedades:

i) **Propiedad de semigrupo**: Para todo $t_1, t_2 \geq 0$,

$$T_{t_1+t_2} = T_{t_1} T_{t_2}.$$

ii) **Propiedad de conservación**: $T_t 1 = 1$.

iii) **Propiedad de positividad**: si $f \geq 0$ entonces $\forall t \geq 0$, $T_t f \geq 0$.

iv) **Propiedad de contractividad**: Para todo $t \geq 0$ y $1 \leq p \leq \infty$,

$$||T_t f||_{p,\gamma_d} \leq ||f||_{p,\gamma_d}.$$

v) **Propiedad de L^p-continuidad fuerte**: Para todo $1 \leq p < \infty$ y todo $f \in L^p(\gamma_d)$ la aplicación $t \to T_t f$ es continua de $[0, \infty)$ en $L^p(\gamma_d)$.

vi) **Propiedad de simetría**: $\forall t \geq 0, T_t$ es un operador autoadjunto en $L^2(\gamma_d)$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x) g(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T_t g(x) \gamma_d(dx). \tag{4}$$

En particular, tenemos la **propiedad de invariancia**:

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \gamma_d(dx), \tag{5}$$

vii) El **operador de Ornstein-Uhlenbeck**, en $\mathbb{R}^d$

$$L = \frac{1}{2}\Delta - \langle x, \nabla_x \rangle, \tag{6}$$

donde $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d})$ es el **generador infinitesimal** de $\{T_t : t \geq 0\}$, es decir,

$$\lim_{t \to 0} \frac{T_t f - f}{t} = Lf. \tag{7}$$

Para los detalles de la prueba de estas propiedades puede consultarse [19], [21] o [23].

El **polinomio de Hermite en d-variables** de orden $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, que denotaremos como $\vec{H}_\alpha$, se define para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, como el producto tensorial de polinomios de Hermite unidimensionales, es decir,

$$\vec{H}_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{d} H_{\alpha_i}(x_i), \tag{8}$$

donde $H_{\alpha_i}(x_i)$ es el polinomio de Hermite de grado α_i en la variable x_i, definido por la fórmula de Rodrigues

$$H_{\alpha_i}(x_i) = (-1)^n e^{x_i^2} \frac{d^{\alpha_i}}{dx_i^{\alpha_i}}(e^{-x_i^2}). \tag{9}$$

Por construcción, es claro que el polinomio de Hermite normalizado $\vec{h}_\alpha$ es entonces el producto tensorial de polinomios de Hermite normalizados unidimensionales,

$$\vec{h}_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{d} h_{\alpha_i}(x_i),$$

donde $h_{\alpha_i}(x_i)$ es el polinomio de Hermite normalizado de grado α_i en la variable x_i, así

$$\vec{h}_\alpha(x) = \frac{\vec{H}_\alpha(x)}{(2^{|\alpha|}\alpha!)^{1/2}},$$

donde, como es usual para cualquier multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$, $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$ y $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

La Fórmula de Mehler en d dimensiones, hallada por F.G. Mehler en 1866 y, según Hille "redescubierta por casi todo el mundo que ha trabajado en este campo", se expresa como

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\vec{H}_\alpha(x)\vec{H}_\alpha(y)}{2^{|\alpha|}\alpha!} r^\alpha &= \sum_{|\alpha|\geq 0} \vec{h}_\alpha(x)\vec{h}_\alpha(y) r^\alpha \\ &= \frac{1}{(1-r^2)^{d/2}} e^{-\frac{r^2(|y|^2+|x|^2)-2r\langle x,y\rangle}{1-r^2}}.\end{aligned}$$

Por otra parte, dada $f \in L^1(\gamma_d)$ definimos, su desarrollo de Hermite como

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha)\vec{h}_\alpha, \tag{10}$$

donde

$$\hat{f}_H(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\vec{h}_\alpha(y)\gamma_d(dy) = \langle f, \vec{h}_\alpha\rangle_{\gamma_d},$$

son los coeficientes de Fourier-Hermite.

Ahora bien, si denotamos por C_k al subespacio cerrado de $L^2(\gamma_d)$ generado por $\{\vec{h}_\alpha : |\alpha| = k\}$, entonces por la ortogonalidad de los polinomios de Hermite, tenemos que $\{C_k\}$ constituyen una descomposición ortogonal de $L^2(\gamma_d)$ que se llama desarrollo en **Caos de Wiener** o **descomposición de Ito-Wiener** de $L^2(\gamma_d)$. Dicha descomposición tiene una interpretación probabilística muy interesante en términos de integrales estocásticas.

Consideremos también $J_k : L^2(\gamma_d) \to C_k$ la proyección ortogonal de $L^2(\gamma_d)$ sobre C_k, claramente J_k es continua en $L^2(\gamma_d)$ y podemos expresar el desarrollo de $f \in L^2(\gamma_d)$ como

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} J_k f.$$

Además, más adelante probaremos, como consecuencia de la hipercontractividad del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck, que J_k tiene una extensión continua en $L^p(\gamma_d)$ para $1 < p < \infty$.

Los polinomios de Hermite en una variable son soluciones polinomiales de la ecuación de Hermite, es decir que H_n es una autofunción del **operador oscilador armónico**

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx} - x\frac{d}{dx},$$

asociada al autovalor $-n$. Por lo tanto, el polinomio $\vec{h}_\alpha$ es una autofunción del operador de Ornstein-Uhlenbeck (6), asociado al autovalor $-|\alpha| = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i$, y por tanto el L^2-espectro de L es $\{\cdots, -2, -1, 0\}$. Este coincide con el L^p-espectro para $1 < p < \infty$. Pero el L^1-espectro de L es el semiplano izquierdo cerrado (véase Davies [9]).
Por otra parte, si consideramos el dominio de L,

$$D(L) = \{f \in L^2(\gamma_d) : \sum_{k=0}^{\infty} k^2 ||J_k f||^2_{2,\gamma_d} < \infty\},$$

tenemos la descomposición espectral de L, para $f \in D(L)$

$$Lf = \sum_{k=0}^{\infty} (-k) J_k f.$$

Obsérvese, además, que utilizando integración por partes, dados $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la clase de funciones de prueba de Schwartz,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x f(x) \cdot \nabla_x g(x) \gamma_d(dx) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-L)g(x)\gamma_d(dx). \tag{11}$$

Esta relación dice que $N = 2(-L) = -\Delta + 2\langle x, \nabla_x \rangle$, conocido como el Operador de Número para el Oscilador Armónico de la Mecanica Cuántica, es la **forma de Dirichlet** $\mathcal{E}$ asociada a la medida Gaussiana γ_d(*) . Además, esto implica trivialmente que $(-L)$ es un operador positivo definido. En forma inmediata, dicha relación implica entonces que el operador de Ornstein-Uhlenbeck tiene una extensión autoadjunta en $L^2(\gamma_d)$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} Lf(x)g(x)\gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)Lg(x)\gamma_d(dx); \tag{12}$$

así pues L es el "Laplaciano simétrico" en este contexto. Por tanto γ_d es la medida natural para estudiar los operadores asociados a L.

Del hecho que L es el generador infinitesimal del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck tenemos que T_t puede ser definido en sentido espectral como $e^{tL} = e^{-t(-L)}$ y por tanto es claro que

$$T_t\vec{h}_\alpha = e^{-t|\alpha|}\vec{h}_\alpha. \tag{13}$$

Por otra parte, por la fórmula de Mehler se puede ver que T_t actuando en una función $f \in L^1(\gamma_d)$ es equivalente a la sumabilidad Abel del desarrollo de Hermite de f, con $r = e^{-t}$, es decir

$$T_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} J_k f.$$

A diferencia del caso clásico, el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck no decae en infinito, es decir, no es cierto que $T_t \to 0$ cuando $t \to \infty$; de hecho, es fácil de verificar que

$$T_t f \to \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-|x|^2}dx, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Sin embargo si $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-|x|^2}dx = 0$ se puede probar que $T_t f$ decae exponencialmente a cero si $t \to \infty$.

Por otra parte, tenemos que si f es una función suficientemente regular $u(x,t) = T_t f(x)$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = Lu, \\ \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

ya que, por la teoría general de semigrupos, dado que L es el generador infinitesimal de $\{T_t : t \geq 0\}$, se tiene que

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial T_t f(x)}{\partial t} = LT_t f(x) = Lu(x,t).$$

(*) Un operador H se dice que es la **forma de Dirichlet** para una medida μ si y sólo si verifica $\langle Hf, g\rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\mu(dx)$, véase Gross [11].

2 La Propiedad Hipercontractiva del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck y la desigualdad logarítmica de Sobolev.

Vamos a discutir ahora el hecho que el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck no es sólo contractivo, es decir un semigrupo de contracciones, sino que es también **hipercontractivo** (véase [16]). Como veremos, este resultado es clave, ya que permite probar una serie de resultados de gran importancia.

En primer lugar, el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck $\{T_t\}$ verifica la **Propiedad Hipercontractiva**: para $1 < p < \infty$, $t > 0$ y $p < q(t) \leq 1+e^{2t}(p-1)$, entonces para todo $f \in L^p(\gamma_d)$, $T_t f \in L^{q(t)}(\gamma_d)$ y tenemos

$$||T_t f||_{q(t),\gamma_d} \leq ||f||_{p,\gamma_d}, \tag{15}$$

es decir, $||T_t||_{L^p(\gamma_d)\to L^{q(t)}(\gamma_d)} \leq 1$.

La propiedad de hipercontractividad de $\{T_t\}$ fue probada inicialmente por E.Nelson [16], usando la maquinaria probabilística de los procesos gaussianos e integrales estocásticas, en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos y ha sido extensamente discutida en la literatura. Más aún, Nelson probó que $||T_t||_{L^p(\gamma_d)\to L^{q}(\gamma_d)} = \infty$ si $q > 1 + e^{2t}(p-1)$.

Posteriormente L. Gross [10] probó que dicha propiedad resulta equivalente a la **desigualdad logarítmica de Sobolev** : para cualquier $f \in L^2(\gamma_d)$ con ∇f en sentido débil, en $L^2(\gamma_d)$, se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \log|f(x)|\gamma_d(dx) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2\gamma_d(dx) + ||f||_{2,\gamma_d}^2 \log||f||_{2,\gamma_d}. \tag{16}$$

Existen varias pruebas de (16), aparte de la original de Gross, una bastante simple se puede encontrar en [1]. De hecho, el objetivo básico de Gross al estudiar esta desigualdad era dar una prueba simplificada de la propiedad hipercontractiva de Nelson por métodos analíticos.

Como estableció Gross, la desigualdad (16) implica la desigualdad para cualquier $p \neq 2$, (básicamente reemplazando f por $f^{p/2}$, para los detalles véase [10] o [11]),

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \log|f(x)|\gamma_d(dx) \leq c_p\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^p\gamma_d(dx) + ||f||_{p,\gamma_d}^p \log||f||_{p,\gamma_d}. \tag{17}$$

La desigualdad Logarítmica de Sobolev (16) generaliza, para la medida Gaussiana, la clásica **desigualdad de Sobolev** la cual afirma que, respecto a la medida de Lebesgue m, si una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, en sentido débil, entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ para $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$, es decir

$$||f||_p \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 dm. \tag{18}$$

Como ya hemos mencionado, a diferencia de la medida de Lebesgue, la medida de Gauss se puede definir en espacios de dimensión infinita y como (16) es independiente de la dimensión, se extiende a este contexto. Más aún, obsérvese que en la desigualdad clásica de Sobolev $p \to 2$ si $d \to \infty$ y en consecuencia hay una pérdida de información en dicha desigualdad cuando la dimensión crece.

Se sigue de (17) que si $f, \nabla f \in L^p(\gamma_d)$ entonces f pertenece al espacio de Orlicz $L^p \log L(\gamma_d)$. Más aún, no es difícil de probar que existe una función f para la cual el lado derecho de (16) es finito, pero ella no está en $L^2 \log L \log\log L(\gamma_d)$ (véase [10]). En ese sentido, dicha desigualdad es óptima y las constantes también son optimales.

En otros términos, la desigualdad (16) se puede reescribir de la manera siguiente,

$$Ent_{\gamma_d}(f^2) \leq E_{\gamma_d}(f),$$

donde,

$$Ent_{\gamma_d}(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f \log f d\gamma_d - \int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma_d \log \int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \log(\frac{f}{\int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma_d}) d\gamma_d,$$

es la **entropía** de f respecto de γ_d, y la **energía** de f, respecto de γ_d, está definida por

$$E_{\gamma_d} := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\gamma_d.$$

Como consecuencia de la hipercontractividad del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck $\{T_t\}$, se puede probar que las projecciones ortogonales sobre los subespacios C_k del Caos de Wiener, J_k, tienen extensiones continuas en $L^p(\gamma_d)$ para $1 < p < \infty$, es decir se cumple

$$||J_k f||_{p,\gamma_d} \leq C_{p,k} ||f||_{p,\gamma_d}, \tag{19}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Ya que si $p > 2$, por la propiedad hipercontractiva, tomando $t > 0$ tal que $p = e^{2t} + 1$, se tiene

$$||T_t f||_{p,\gamma_d} \leq ||f||_{2,\gamma_d}.$$

En particular, utilizando la desigualdad de Holder obtenemos

$$||T_t J_k f||_{p,\gamma_d} \leq ||J_k f||_{2,\gamma_d} \leq ||f||_{2,\gamma_d} \leq ||f||_{p,\gamma_d}.$$

Ahora bien, como $T_t f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} J_k f$ tenemos que $T_t J_k f = e^{-tk} J_k f$ y por tanto

$$||T_t J_k f||_{p,\gamma_d} = e^{-tk} ||J_k f||_{p,\gamma_d}.$$

De todo lo anterior, obtenemos entonces que

$$||J_k f||_{p,\gamma_d} \leq e^{tk} ||f||_{p,\gamma_d}.$$

El caso $1 < p < 2$ se obtiene por dualidad del caso anterior.

La relación entre la Teoría de Multiplicadores para desarrollos de Hermite y la propiedad hipercontractiva del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es muy estrecha. El Teorema de Multiplicadores de P.A. Meyer (véase [23]), uno de los resultados más importantes en el área, es consecuencia casi inmediata de la hipercontractividad.

Por otra parte, en su trascendente artículo W. Beckner [7], demostró entre muchas cosas, cómo la hipercontractividad del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es consecuencia de la desigualdad de Young generalizada. De hecho lo que él prueba es una desigualdad para ciertos multiplicadores de desarrollos de Hermite que es equivalente a la continuidad de los operadores T_t pero con parámetro $t = i\sqrt{p-1}$ imaginario puro de $L^p(\gamma_d)$ en $L^{p'}(\gamma_d)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Además lo interesante de esta prueba de Beckner es que queda claro la íntima relación entre el Análisis Armónico Clásico y el Análisis Armónico Gaussiano, dado que, este resultado de multiplicadores le sirve para obtener la constante optimal para la desigualdad de Haussdorf-Young para la Transformada de Fourier,

$$||\mathcal{F}f||_{p'} \leq (A_p)^d ||f||_p, \tag{20}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $A_p = [\frac{p^{1/p}}{(p')^{1/p'}}]^{1/2}$, así como tambien la constante optimal para la desigualdad de Young generalizada,

$$||f_* g||_r \leq (A_p A_q A'_r)^d ||f||_p ||g||_q, \tag{21}$$

para $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, y A_p como antes.

3 La Propiedad Hipercontractiva para semigrupos Markovianos y las desigualdades funcionales.

La propiedad de Hipercontractividad y su equivalencia con la desigualdad Logarímica de Sobolev, si bien fueron estudiadas inicialmente para el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck, no son verificadas sólo por él. Desde el hallazgo de E. Nelson se han encontrado otros ejemplos de semigrupos hipercontractivos, véase, por ejemplo F. Weissler [24] y [25], O. Rothaus [18], y A. Korzeniowski y D. Stroock [13] (donde discuten el caso del semigrupo de Laguerre $\alpha = 0$). Además ya en 1971 A. Bonami [8] había tratado el caso de la medida de Bernoulli simétrica y un semigrupo asociado naturalmente a ella, obteniendo la misma constante que para el caso gaussiano. De hecho, como se puede ver en el artículo de W. Beckner [7], del caso Bernoulli, mediante el uso de el Teorema Central del Límite, se puede obtener el caso de la medida gaussiana y el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck en una dimensión y luego, usando un argumento de "tensorización", se obtiene entonces el caso d-dimensional. Esta idea de obtener la desigualdad Logarítmica de Sobolev para la medida gaussiana a partir de la desigualdad análoga para el caso de la medida de Bernoulli, la famosa desigualdad de dos puntos, es una idea original de L. Gross.

En general, dado un espacio de probabilidades $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un núcleo de probabilidad de transición en E, $P_t(x, dy)$, es una función medible en la variable x, y una probabilidad en la variable y, que satisface

$$P_0(x, dy) = \delta_x(dy) \tag{22}$$

siendo δ_x la delta de Dirac en x.

Un **semigrupo de Markov** en E es una familia $\{P_t(x, dy)\}$ de núcleos de probabilidades de transición que verifican la **ecuación de Chapman-Kolmogorov**

$$\int_E P_s(x, dy)P_t(y, dz) = P_{s+t}(x, dz). \tag{23}$$

El semigrupo de Markov $\{P_t(x, dy)\}$ está identificado con una familia de operadores $\{P_t\}_{t\geq 0}$ que están definidos sobre las funciones Borel-medibles que son positivas o acotadas, de la siguiente forma,

$$P_t f(x) = \int_E f(y)P_t(x, dy). \tag{24}$$

P_t claramente preserva la positividad, es decir si $f \geq 0$, entonces $P_t f \geq 0$, y es conservativo $P_t 1 = 1$, además por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov es claro que la familia $\{P_t\}$ es un semigrupo de operadores.

Suponemos que la medida de probabilidad μ es una medida invariante para $\{P_t\}$, es decir,

$$\int_E P_t f d\mu = \int_E f d\mu, \tag{25}$$

para toda función f Borel-medible en E.

Luego P_t es un operador de contracción en $L^1(\mu)$ y como también lo es, trivialmente, en $L^\infty(\mu)$ entonces por el argumento de interpolación P_t se puede extender como un operador de contracción en $L^p(\mu)$,

$$||P_t f||_{p,\mu} \leq ||f||_{p,\mu}, \tag{26}$$

para $1 \leq p \leq \infty$, $t > 0$. Luego $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores de contracción en $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, y por el Teorema de Hille-Yosida (ver [26]) existe el generador infinitesimal L de $\{P_t\}$, definido como

$$Lf = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}, \tag{27}$$

en un subconjunto denso $D_p(L)$ de $L^p(\mu)$.

La propiedad de invariancia de la medida de probabilidad μ es entonces equivalente a

$$\int_E Lf d\mu = 0. \tag{28}$$

No es fácil describir el dominio $D_p(L)$, por ello es usual suponer que existe una subálgebra $\mathcal{A}$ de $L^2(\mu)$ densa en él, que es estable bajo la acción de L y de $\{P_t\}$ y la composición con funciones de C^∞. Un álgebra $\mathcal{A}$ que verifique estas propiedades diremos que es una **álgebra estándard**.

Sobre la subálgebra estándard $\mathcal{A}$ definimos el **operador cuadrado de campo** como

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\left[Lfg - fLg - gLf\right]. \tag{29}$$

En lo que sigue, para simplificar la notación, vamos a denotar $\Gamma(f) = \Gamma(f,f)$.

Si $1 \in \mathcal{A}$, como $L1 = 0$, se tiene entonces que $\Gamma(f,1) = 0$ para todo $f \in \mathcal{A}$. Por otra parte se puede probar que $\Gamma(f) \geq 0$ para todo $f \in \mathcal{A}$ y por tanto $\Gamma(f)$ se puede interpretar como la "longitud"de ∇f.

Obsérvese además que por (28), la invariancia de μ,

$$\int_E \Gamma(f) d\mu = -\int_E fLf d\mu, \tag{30}$$

y por tanto $\int_E fLfd\mu \leq 0$.

Consideremos las siguientes hipótesis adicionales del semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$,
- Propiedad de simetría: para todo $f \in L^2(\mu)$ y para todo $t \geq 0$,

$$\int_E P_t f g d\mu = \int_E f P_t g d\mu, \tag{31}$$

lo que es equivalente a

$$\int_E Lfgd\mu = \int_E fLgd\mu. \tag{32}$$

En este caso decimos que μ es una **medida simétrica o reversible.**

Luego L tiene una extensión autoadjunta en $L^2(\mu)$ y por tanto el espectro de $-L$ está incluido en $[0, \infty)$ ya que por (30) si f es una autofunción de L asociada al autovalor λ, entonces

$$0 \leq < f, (-L)f >_\mu = - < f, \lambda f >_\mu = -\lambda ||f||^2,$$

lo que implica que $\lambda \leq 0$. Por lo tanto L tiene una descomposición espectral

$$L = -\int_0^\infty \lambda dE_\lambda \tag{33}$$

y por tanto P_t tiene entonces una descomposición espectral

$$P_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda. \tag{34}$$

El operador L está entonces totalmente determinado por la medida de probabilidad μ y el operador cuadrado de campo Γ.

Obsérvese además, que la propiedad de simetría de $\{P_t\}$ implica la invariancia de μ, por ser P_t conservativo.

- Propiedad de difusión: Suponemos que L es un operador diferencial de segundo orden sin término constante, lo que se puede expresar mediante la relación

$$L(\Phi(f)) = \Phi'(f)Lf + \Phi''(f)\Gamma(f), \tag{35}$$

lo que es equivalente a la siguente propiedad del operador cuadrado de campo,

$$\Gamma(fg, h) = f\Gamma(g, h) + g\Gamma(f, h), \tag{36}$$

para $f, g, h \in \mathcal{A}$.

Definimos además la **forma de Dirichlet** asociada al generador infinitesimal del semigrupo L, como

$$\mathcal{E}(f) = \lim_{t\to 0} \frac{< f - P_t f, f >_\mu}{t} =< -Lf, f >_\mu, \tag{37}$$

para $f \in L^2(\mu)$.

Observemos que, por (28),

$$\mathcal{E}(f) = \int_E \Gamma(f) d\mu.$$

Dado un semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$ de operadores contractivos definidos en $L^p(\mu)$ $1 \leq p \leq \infty$ y una función estrictamente creciente $q : \mathbb{R}^+ \to [q(0), \infty)$, decimos que el semigrupo $\{P_t\}$ tiene la **propiedad hipercontractiva** con función de contracción q si para todo $f \in L^{q(0)}(\mu)$

$$||P_t f||_{q(t),\mu} \leq ||f||_{q(0),\mu}. \tag{38}$$

Esencialmente por los mismos argumentos dados por L. Gross [10] se puede probar que el semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es hipercontractivo con función de contracción $q(t) = 1 + e^{4t/\beta}$, para alguna constante $\beta > 0$ entonces ello es equivalente a que μ satisface la **desigualdad Logarítmica de Sobolev** ajustada, con constante β,

$$Ent_\mu(f^2) \leq \beta\mathcal{E}(f). \quad LS(\beta) \tag{39}$$

Más generalmente, se puede probar que si el semigrupo $\{P_t\}_{t\geq 0}$ verifica la desigualdad

$$||P_t f||_{q(t),\mu} \leq e^{m(t)} ||f||_{p,\mu}, \tag{40}$$

para $1 < p < \infty$ y para todo $f \in L^p(\mu)$ con $t > 0, \frac{q(t)-1}{p-1} = e^{4t/\beta}$ y $m(t) = \frac{\alpha}{16}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q(t)})$, ello es equivalente a que μ satisface la **desigualdad Logaritmica de Sobolev** con constantes α, β,

$$Ent_\mu(f^2) \leq \alpha \int_E f^2 d\mu + \beta\mathcal{E}(f), \quad LS(\alpha, \beta) \tag{41}$$

siendo β la constante optimal, es decir la menor constante para la cual (41) se cumple, se llama **constante logarítmica de Sobolev**. Obsérvese que una desigualdad Logarítmica de Sobolev es ajustada si $\alpha = 0$.

Si se cambia f por $f^{p/2}$ en la desigualdad logarítmica de Sobolev, gracias a la propiedad de difusión se obtiene

$$\begin{aligned} Ent_\mu(f^p) &\leq \alpha \int_E f^p d\mu + \beta \frac{p^2}{4} \int_E f^{p-2} \Gamma(f) d\mu \\ &= \int_E f^p d\mu - \beta \frac{p^2}{4(p-1)} \int_E f^{p-1} L f d\mu. \end{aligned}$$

Las desigualdades logarítmicas de Sobolev pertenecen a una familia de **desigualdades funcionales**, donde se relaciona la norma $L^p(\mu)$ de una función con la norma $L^q(\mu)$ de su gradiente, donde su gradiente se interpreta como $(\Gamma(f,f))^{1/2}$ siendo μ la medida invariante. Otras desigualdades funcionales son las **desigualdades de Sobolev** y las **desigualdades de grieta espectral**.

Las **desigualdades de Sobolev** son desigualdades de la forma

$$||f||^2_{p,\mu} \leq \alpha ||f||^2_{2,\mu} + \beta \mathcal{E}(f). \quad S(\alpha, \beta) \tag{42}$$

Un ejemplo donde una desigualdad de este tipo se verifica es para el caso de una variedad Riemanniana n-dimensional compacta, con la medida de Riemann siendo $p = \frac{2n}{(n-2)}$ el mejor exponente. Si μ es una medida de probabilidad, la desigualdad de Sobolev se dice ajustada cuando $\alpha = 1$. Las familia de **desigualdades de Gagliardo-Niremberg** y la **desigualdad de Nash** son casos particulares de la desigualdad de Sobolev, véase [4].

Las **desigualdades de grieta espectral o desigualdad de Poincaré** son desigualdades de la forma

$$\int_E |f|^2 d\mu \leq (\int_E |f| d\mu)^2 + C\mathcal{E}(f), \tag{43}$$

que es equivalente a

$$\sigma^2(f) = \int_E |f|^2 d\mu - (\int_E |f| d\mu)^2 \leq C\mathcal{E}(f), \quad GE(C) \tag{44}$$

donde $\sigma^2(f)$ es la varianza de f respecto de μ. La mejor constante C para la desigualdad de grieta espectral se llama la **constante de grieta espectral**. Obsérvese que

$$C = \text{ínf} \left\{ \mathcal{E}(f) : \int_E f d\mu = 0, ||f||^2_{2,\mu} = 1 \right\}.$$

Si L es un un operador simétrico la desigualdad de grieta espectral no es sino el hecho que el espectro de $-L$ está incluido en $\{0\} \cup [1/C, \infty)$, es decir que $-L$ tiene una grieta entre 0 y $1/C$. Si $\lambda \neq 0$ es un autovalor de $-L$ con autofunción f entonces $\int_E f d\mu = \int_E f 1 d\mu = 0$, y por tanto

$$\int_E f^2 d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_E (-Lf) f d\mu = \frac{1}{\lambda} \int_E \Gamma(f) d\mu,$$

luego $\frac{1}{\lambda} \leq C$.

Por otra parte, si $-L$ es simétrico, con espectro en $\{0\} \cup [1/\lambda, \infty)$ por la descomposicón espectral de $-L$ si $\int_E f d\mu = 0$ entonces $(-L)f = \int_\lambda^\infty t dE_t$ y por tanto

$$\mathcal{E}(f) = \int_\lambda^\infty t dE_t(f,f) \geq \lambda \int_\lambda^\infty dE_t(f,f) = \lambda \int_E f^2 d\mu.$$

Se puede probar que la desigualdad logarítmica de Sobolev ajustada con constante β implica la desigualdad de grieta espectral con constante $\beta/2$ y recíprocamente si se tiene una desigualdad logarítmica de Sobolev no ajustada y una desigualdad de grieta espectral entonces se cumple una desigualdad logarítmica de Sobolev ajustada, véase [18]. Por lo tanto en presencia de desigualdad logarítmica de Sobolev no ajustada la desigualdad logarítmica de Sobolev ajustada es equivalente a la desigualdad de grieta espectral.

Como en el caso de la desigualdad logarítmica de Sobolev, si una desigualdad de Sobolev se cumple para una medida de probabilidad μ la desigualdad de Sobolev ajustada es equivalente a la desigualdad de grieta espectral.

En 1984 D. Bakry y M. Emery [6] desarrollaron un criterio (condición suficiente) para que un semigrupo de difusión verifique la propiedad hipercontractiva, es el famoso **criterio de Bakry-Emery** que está dado en términos del **operador cuadrado de campo iterado** Γ^2, que se define como

$$\Gamma^2(f,g) = \frac{1}{2}[L\Gamma(f,g) - \Gamma(f, Lg) - \Gamma(g, Lf)], \tag{45}$$

$f, g \in \mathcal{A}$. El criterio de Bakry-Emery ha evolucionado a lo que ahora se llaman **desigualdades de curvatura-dimensión**, que permite estudiar la estructura local del generador L y tiene importantes aplicaciones en la Geometría Diferencial.

Tomando $\Gamma^2(f) = \Gamma^2(f,f)$, decimos que un operador L satisface una desigualdad de curvatura-dimensión $\mathrm{CD}(\rho, n)$ si para todo $f \in \mathcal{A}$,

$$\Gamma^2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{n}(Lf)^2, \quad CD(\rho, n), \tag{46}$$

$\rho \in \mathbb{R}$ y $n \in [1, \infty]$.

Para una discusión más amplia de las desigualdades de curvatura-dimensión puede consultarse [4], sección 3.

Tenemos las siguientes relaciones entre las desigualdades de curvatura-dimensión $CD(\rho, n)$ y las desigualdades funcionales, véase [4]:

i) Si se verifica una desigualdad $CD(\rho, n)$ para algún $\rho > 0$ y $n > 2$ entonces la medida invariante μ tiene que ser finita y si la medida μ es además simétrica, se cumple para la probabilidad invariante una desigualdad de Sobolev ajustada $S(n, C)$ con $C = \frac{4(n-1)}{n(n-2)\rho}$.

ii) Si se verifica una desigualdad $CD(\rho, \infty)$ para algún $\rho > 0$ entonces la medida invariante μ tiene que ser finita y para la probabilidad invariante se cumple una desigualdad logarítmica de Sobolev ajustada con constante C acotada por arriba por $\frac{2}{\rho}$.

- Así pues, el operador de Ornstein-Uhlenbeck es el modelo de operador que satisface una desigualdad $CD(\rho, \infty)$ y por tanto una desigualdad logarítmica de Sobolev ajustada, que es la desigualdad de Sobolev, para infinitas dimesiones, luego, como sabemos por el resultado de L. Gross, el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es hipercontractivo.

- Los operadores de Laguerre satisface una desigualdad $CD(1/2, \infty)$ y por tanto los semigrupos de Laguerre son hipercontractivos, véase por ejemplo [12] y [17].

- Los operadores de Jacobi simétricos (véase [5]) son los modelos de operadores que satisfacen $CD(\rho, n)$ y por tanto satisfacen una desigualdad de Sobolev n-dimensional. Además se puede probar (véase [2]) que la desigualdad de Sobolev de los operadores de Jacobi simétricos implica una desigualdad logarítmica de Sobolev y por tanto los semigrupos de Jacobi son también hipercontractivos. Más aún de las relaciones asintóticas entre los polinomios de Jacobi con los polinomios de Hermite y Laguerre, se puede probar que de la desigualdad de Sobolev para los operadores de Jacobi se pueden obtener también las desigualdades logarítmicas de Sobolev para los operadores de Ornstein-Uhlenbeck y de Laguerre.

Los contenidos de este artículo han sido desarrollados en mayor detalle en [22], por lo que remitimos al lector interesado a ese trabajo para un estudio más profundo de estos tópicos, y, por supuesto, a los artículos básicos de D. Bakry [3] y [4].

Finalmente, queremos agradecer las observaciones y correcciones del árbitro que permitieron mejorar sensiblemente la presentación de este trabajo.

Referencias

[1] Adams, R. & Clarke, F. *Gross' Logarithmic Sobolev inequality: a simple proof.* Amer. J. Math. 101 (1979) 1265-1269.

[2] C. Ané, S. Blachére, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[3] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes*, in *Lectures on Probability Theory*, Lec. Notes in Math 1581 (1992) Springer Verlag 1-114.

[4] D. Bakry, *Functional inequalities for Markov semigroups*, CIMPA-TATA School Mumbai 2002.

[5] D.Bakry, *Remarques sur les semigroupes de Jacobi*, Astérisque No. 236 (1996), 23–39.

[6] Bakry, D. & Emery, M. *Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion.* C.R. Acad. Sci. 299 (série I) (1984) 775-778.

[7] Beckner, W. *Inequalities in Fourier Analysis.* Ann. Math. 102 (1975) 159-182.

[8] Bonami, A. *Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 fasc. 2, (1971) 335-402 .

[9] Davies, E. B. *Heat kernels and spectral Theory.* Cambridge Tracts in Math. 92 . Cambridge University Press. Cambridge (1989).

[10] Gross, L. *Logarithmic Sobolev inequalities.* Amer. J. Math. 97 (1976) 1061-1083.

[11] Gross, L. *Logarithmic Sobolev Inequalities and contractivity properties of Semigroups.* Lec. Notes in Math. 1593 (1993) Springer Verlag 54-88.

[12] Korzenioswski, A. *On Logarithmic Sobolev constant for diffusion semigroup* Jour. Funct. Anal. 12 (1987) 363-370.

[13] Korzenioswski, A. & Stroock, D. *An example in the theory of hypercontractive semigroups* Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985) 87-90.

[14] Meyer, P. A. *Quelques résultats analytiques sur le semígroupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie.* Lectures Notes in Contr. and Inform. Sci. 49 (1983) Springer-Verlag 201-214.

[15] Muckenhoupt, B. *Poisson Integrals for Hermite and Laguerre expansion.* Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969) 231-242.

[16] Nelson, E. *The free Markoff field.* Jour. Funct. Anal. 12 (1973) 211-227.

[17] Novak, A. Graczyck, P. Loeb, J. J. López, I. and Urbina, W. *Higher order Riesz transforms, Fractional differentiation and Sobolev Spaces for Laguerre expansions* Pre-print Universit de Angers. To appear in Bull. Sci. Math.

[18] Rothaus, O. *Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Sturm-Lioville operators.* Jour. Funct. Anal. 39 (1980) 42-56.

[19] Stein, E.M. *Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley Theory.* Princeton Univ. Press. Princeton (1970).

[20] Stein, E.M. & Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press. Princeton (1975).

[21] Urbina, W. *Análisis Armónico Gaussiano: una visión panorámica.* Trabajo de Ascenso. Facultad de Ciencias UCV (1998). Disponible en http://euler.ciens.ucv.ve/∼wurbina/notes.html

[22] Urbina, W. *Semigrupos de Polinomios Clásicos y Desigualdades Funcionales.* Notas de la Escuela CIMPA–Unesco–Venezuela. Merida (2006). Disponible en http://euler.ciens.ucv.ve/∼wurbina/notes.html

[23] Watanabe, S. *Lecture on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus.* Tata Institute. Springer Verlag (1984).

[24] Weissler, F. *Two-point Inequalities, the Hermite Semigroup, and the Gauss-Weirstrass Semigroup.* J. Funct. Anal. 32 (1979) 102-121.

[25] Weissler, F. *Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle.* J. Funct. Anal. 37 (1980) 218-234.

[26] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag. Berlin (1965).