

Formulación variacional y análisis de un modelo linealizado no axisimétrico en 2-D para un flujo bifásico agua-petróleo

Variational formulation and analysis of a linearized 2-D model with no axial symmetry for a two-phase water-petroleum flow

W. Angulo (wilfredoangulo@ucla.edu.ve)

Decanato de Ciencias y Tecnología, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela y Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

H. López (hlopez@kuaimare.ciens.ucv.ve)

Centro de Cálculo Científico y Tecnológico, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela

Resumen

Maury *et al.* en [6] formuló un problema 2-D axisimétrico para la simulación numérica de un paso de tiempo de un flujo bifásico agua-petróleo en tuberías horizontales. En este artículo, tratamos este problema linealizado, pero sin simetría axial: presentamos una formulación variacional y demostramos que está bien planteada, para futuras simulaciones numéricas usando elementos finitos conformes y no conformes. **Palabras y frases clave:** flujo bifásico, formulación variacional, buen planteamiento.

Abstract

Maury *et al.* formulated in [6] a 2-D axisymmetric problem for the numerical simulation of a one-time step of a two-phase water-petroleum flow in horizontal pipes. In this article, we address this linear problem, but with no axial symmetry: we present a variational formulation and show that it is well-posed, for future numerical simulations using conforming and non-conforming finite elements.

Key words and phrases: two-phase flow, variational formulation, well-posedness.

1 Introducción.

En muchas aplicaciones dentro de la ciencia y la tecnología, el flujo de dos fluidos no miscibles e incompresibles en tuberías, o *flujo bifásico*, juega un rol importante [1], [2]. En particular, las técnicas de *transporte lubricado* se usan frecuentemente para facilitar el movimiento de aceites viscosos a través de una tubería lubricada con un líquido de baja viscosidad tal como lo es el agua. Para que este proceso sea exitoso el fluido de baja viscosidad debe introducirse y mantenerse entre el aceite viscoso y la pared de la tubería, formando una *cápsula* entre la pared y el fluido de alta viscosidad [3]. Este *patrón de flujo* es llamado *flujo centro-anular*, y el modelo físico propuesto para estudiarlo considera que en tal configuración ambos fluidos viajan en el *espacio* y el *tiempo* de manera *adyacente*, siendo la interfaz una *superficie* natural de separación entre los dos fluidos.

En este orden de ideas Maury *et al.* (ver [6]) en el 2000 propone un estudio sobre el *flujo bifásico lineal en dimensión dos* ($D = 2$) de un fluido compuesto de agua y petróleo en una tubería horizontal y modelado por el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) de *Navier-Stokes*. En una primera etapa, Maury en [6] planteó el modelo matemático basado en estas ecuaciones con fronteras adecuadas en una configuración axisimétrica. Esta configuración de axisimetría adicionó una frontera ficticia que se ubicó en el eje central imaginario a lo largo de la tubería, y sobre tal frontera se impuso otra condición poco real pero que simplificó el estudio, en el sentido de que la interfaz entre ambos fluidos se representó como una sola frontera libre. Esta frontera libre es una incógnita a determinar en el problema, y esto; aunque aparentemente sencillo, dificulta el problema al adicionar la *ecuación de transporte* que modela la evolución espacio temporal de la interfaz a medida que se deforma debido a la acción de esfuerzos producidos por la tensión superficial entre los dos fluidos. Posteriormente, Girault, López y Maury (ver [7]) discretizaron en espacio las ecuaciones obtenidas en cada paso del tiempo cuando se discretizan las ecuaciones de Navier-Stokes en el tiempo. En cada paso del tiempo el sistema se redujo a un problema de *Stokes Generalizado* con condiciones *no estándar* en la frontera y en la interfaz entre los dos fluidos. Esta discretización se realizó usando el *mini-elemento* o elemento finito de *Arnold-Brezzi-Fortin* como elemento conforme, y se establecieron estimaciones para el error numérico. Como una segunda etapa, en este trabajo presentamos una extensión de este problema bidimensional un poco más realista, pues la condición de axisimetría no es considerada y esto, a parte de eliminar la condición de frontera ficticia, complica el problema porque en efecto se presentan dos superficies libres que se deforman de manera distinta y arbitraria en el espacio

y el tiempo. Igual que en el problema anterior, sobre estas superficies libres se imponen condiciones debidas a los esfuerzos ocasionados por la tensión superficial fluido-fluido, y cada una es modelada mediante un problema de valor inicial y de frontera con la ecuación de transporte que se acopla al sistema de Navier-Stokes sujeto a las condiciones de contorno adecuadas que simulan el problema de flujo bifásico agua-petróleo. Por esto, en este trabajo desarrollamos la formulación variacional y los resultados sobre el buen planteamiento de tal extensión como paso previo al análisis numérico usando el método de los elementos finitos (MEF) conformes y no conformes.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se introducen los espacios de Sobolev, normas y desigualdades que se emplearon en el artículo. En la sección 3, plantearé las ecuaciones no lineales completas y describiremos su discretización temporal y el problema lineal que resulta y debe ser resuelto en cada paso del tiempo. Finalmente en la sección 4, presentaremos el desarrollo de la formulación variacional del problema lineal y su buen planteamiento en términos de tal formulación débil.

2 Preliminares.

En esta sección se introducen los espacios de Sobolev, las normas y desigualdades que principalmente se emplearon en este artículo. Para detalles remitimos al lector a las referencias [8] y [9].

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontera $\partial\Omega$, el espacio de Sobolev de funciones $H^m(\Omega)$ se define como:

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial^k v \in L^2(\Omega) \forall |k| \leq m\},$$

donde $|k| = k_1 + k_2$ con (k_1, k_2) un par de enteros no negativos (en dimensión dos) y

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}.$$

Este espacio está dotado con la seminorma

$$|v|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|k|=m} \int_{\Omega} |\partial^k v|^2 d\Omega \right]^{1/2}$$

y es un espacio de Hilbert para la norma

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{H^k(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

El producto escalar en $L^2(\Omega)$ es denotado por (\cdot, \cdot) . Las definiciones de este espacio se extienden sin problemas a vectores, con la misma notación.

Por otro lado $\mathcal{D}(\Omega)$ denota el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ denota el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ coincide con $C^\infty(\bar{\Omega})$. En la referencia [8] se encuentra muy bien expuesta la definición de espacios de orden fraccional tal como $H^s(\Omega)$ donde s es un número real. En particular, denotaremos por $H^{1/2}(\partial\Omega)$ el espacio de las funciones trazas de $H^1(\Omega)$ sobre el borde $\partial\Omega$ y por $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ su espacio dual. La traza γ es una aplicación continua de $H^1(\Omega)$ en $H^{1/2}(\partial\Omega)$ y existe una constante C tal que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalmente, consideraremos que la desigualdad de Poincaré es válida en el siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$: sea Γ una parte de $\partial\Omega$ con medida positiva, $|\Gamma| > 0$, y sea

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_\Gamma = 0\}.$$

Entonces existe una constante \mathcal{P} , dependiente solo de Ω y Γ tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{P} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Además, equipamos a $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ con la seminorma $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = |v|_{H^1(\Omega)}$.

3 El modelo no lineal de flujo bifásico 2-D

En este estudio consideraremos que los dos componentes del fluido, el agua y el petróleo, son no miscibles e incompresibles de manera que las ecuaciones de *Navier-Stokes* modelan el comportamiento del flujo en la tubería tal como lo establece Maury *et al.* en [6].

En una sección longitudinal de un trozo de tubería, el fluido de baja viscosidad (agua) es adyacente a la pared de la misma y está envolviendo al fluido de alta viscosidad (petróleo). Se supone que el flujo es suficientemente suave, Reynolds bajos, de tal manera que esta situación se tiene hasta cierto tiempo

T . Siendo la viscosidad, μ , una propiedad de los fluidos que mide la *resistencia al flujo*, el *número adimensional de Reynolds* definido por

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu},$$

en donde ρ es la densidad del fluido, \bar{v} la velocidad promedio del fluido en una tubería de diámetro D , es usado formalmente para establecer el régimen de flujo: diremos que el flujo es *suave* o *laminar* si $Re < 2000$ [10]. En régimen laminar, podemos considerar que las interfaces entre los dos fluidos, las cuales son superficies libres a determinar, pueden ser parametrizadas de manera conveniente y, además, que nunca son adyacentes a las paredes de la tubería y siempre hay una distancia suficiente entre las dos interfaces [11]. Las ecuaciones de las superficies libres están dadas por la *ecuación de transporte* y las condiciones de transmisión sobre cada interfaz son:

- 1) la continuidad de la velocidad y
- 2) el balance de esfuerzos normal con la tensión superficial.

3.1 Formulación fuerte del problema.

Consideraremos el flujo bifásico $2 - D$ ilustrado en la figura 1 que muestra el dominio físico, Ω , formado por un trozo de sección transversal de la tubería.

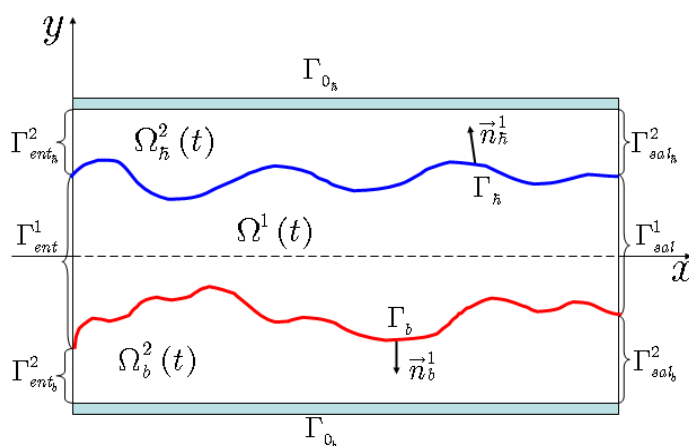


Figura 1: Geometría del problema.

Entonces, para cada $t \in [0, T]$, el dominio Ω se descompone en dos subdominios $\Omega^1(t)$ y $\Omega^2(t)$. Aquí, el subdominio Ω^1 es la región ocupada por el fluido pesado (el petróleo) y Ω^2 es la región ocupada por el agua. Esta última región, Ω^2 , topológicamente está dividida en dos subregiones: una *superior* y otra *inferior* que denotaremos por $\Omega_{\bar{h}}^2$ y Ω_b^2 , respectivamente, y tales que

$$\Omega^2(t) = \Omega_{\bar{h}}^2(t) \cup \Omega_b^2(t).$$

Por otro lado la frontera de Ω^i , respectivamente para cada $i = 1, 2$, viene dada por:

$$\begin{aligned} \partial\Omega^1(t) &= \Gamma_{ent}^1 \cup \Gamma_{sal}^1 \cup \Gamma_{\bar{h}}(t) \cup \Gamma_b(t), \\ \partial\Omega^2(t) &= \Gamma_{ent}^2 \cup \Gamma_{sal}^2 \cup \Gamma_{\bar{h}}(t) \cup \Gamma_b(t) \cup \Gamma_{0_{\bar{h}}} \cup \Gamma_{0_b}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde Γ_{ent}^1 y Γ_{sal}^1 representan las fronteras de entrada y de salida para cada subdominio Ω^1 . Denotaremos, entonces, por $\Gamma_{ent} = \Gamma_{ent}^1 \cup \Gamma_{ent}^2$ y $\Gamma_{sal} = \Gamma_{sal}^1 \cup \Gamma_{sal}^2$ las fronteras de entrada y de salida, respectivamente, para todo el dominio Ω . Por otro lado $\Gamma_{0_{\bar{h}}}$ y Γ_{0_b} representan las fronteras correspondientes a las paredes rígidas de la tubería, y finalmente las interfaces de separación entre ambos componentes dadas por: $\Gamma_{\bar{h}}(t) = \bar{\Omega}^1(t) \cap \bar{\Omega}_{\bar{h}}^2(t)$ y $\Gamma_b(t) = \bar{\Omega}^1(t) \cap \bar{\Omega}_b^2(t)$ en la parte superior y en la parte inferior respectivamente.

En vista de que en el tiempo inicial las interfaces de separación entre ambos componentes son líneas rectas y el flujo es suave durante un cierto tiempo, entonces la parametrización conveniente de estas interfaces viene dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{h}} &: (x, t) \mapsto \Phi_{\bar{h}}(x, t), \\ \Gamma_b &: (x, t) \mapsto \Phi_b(x, t), \end{aligned}$$

de manera tal que la condición de que ambas interfaces no se tocan puede ser expresada matemáticamente de la siguiente manera:

$$0 \leq x \leq L, \quad \Phi_{\bar{h}}(x, t) - \Phi_b(x, t) > \delta > 0; \quad (2)$$

los subdominios están dados por:

$$\Omega^1(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad \Phi_b(x, t) < y < \Phi_{\bar{h}}(x, t)\} \quad (3)$$

y para $\Omega^2(t) = \Omega_{\bar{h}}^2(t) \cup \Omega_b^2(t)$ las subregiones dadas por:

$$\Omega_{\bar{h}}^2(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad \Phi_{\bar{h}}(x, t) < y \leq D\}, \quad (4)$$

$$\Omega_b^2(t) = \{(x, y) \in \Omega; \quad 0 \leq x \leq L, \quad -D \leq y < \Phi_b(x, t)\}, \quad (5)$$

donde $D > 0$ es el radio de la tubería y L es la longitud.

Para describir la *densidad* y la *viscosidad*, introduciremos las cantidades constantes ρ y μ dadas por:

$$\rho = \sum_{i=1}^2 \chi^i \rho^i \quad \text{y} \quad \mu = \sum_{i=1}^2 \chi^i \mu^i, \quad (6)$$

con χ^i la función característica del subdominio Ω^i y donde para $i = 2$

$$\chi^2 = \chi_{\Omega_h^2 \cup \Omega_b^2} = \chi_{\Omega_h^2} + \chi_{\Omega_b^2}.$$

Por otro lado, para $i = 1, 2$, ρ^i y μ^i son las densidades y las viscosidades constantes, respectivamente.

Denotaremos los *campos* de velocidad y de presión de la forma siguiente:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^i(\mathbf{x}, t) = (u_x^i, u_y^i), \quad p^i = p^i(\mathbf{x}, t) \quad \text{para todo } (\mathbf{x}, t) \in \Omega^i \times [0, T], \quad i = 1, 2.$$

Entonces, para cada tiempo $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$ el problema de Navier-Stokes en este caso se escribe como

$$\begin{cases} \rho^i \left(\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \right) - \mu^i \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i \mathbf{g} & \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^i = 0 & \text{en } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (7)$$

donde \mathbf{g} es la gravedad y

$$\mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i = u_x^i \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial x} + u_y^i \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial y}, \quad i = 1, 2.$$

Este sistema de EDP's se complementa con una condición inicial adecuada

$$\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0^i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^i, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

en donde \mathbf{U}_0^i es una función suave tal que $\nabla \cdot \mathbf{U}_0^i = 0$ en Ω^i , $i = 1, 2$, y tal que $\mathbf{U}_0^i(\Gamma_{0_j} \cap \Gamma_{ent}^2) = \mathbf{0}$ para cada $j = h, b$. Por otro lado, las condiciones de frontera que se imponen son las siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^i = \mathbf{U}^i & \text{sobre } \Gamma_{ent}, \\ \mathbf{u}^2 = \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma_{0_j} \text{ para } j = h, b, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = -p_{sal} \mathbf{n} & \text{sobre } \Gamma_{sal}, \end{cases} \quad (9)$$

y las condiciones en las interfaces (continuidad de la velocidad y el balance de esfuerzos con la tensión superficial, en las interfaces):

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad [\sigma]_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_j^1 = -\frac{\kappa_j}{R_j} \mathbf{n}_j^1 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } j = \bar{h}, b, \quad (10)$$

donde \mathbf{U}^i sobre Γ_{in}^i para $i = 1, 2$ denota el vector de velocidad de entrada, dado e independiente del tiempo, p_{sal} es la presión exterior dada en el borde de salida, \mathbf{n} es el vector normal exterior principal a Ω^i , \mathbf{n}_j^1 denota el vector normal a Γ_j para cada $j = \bar{h}, b$, exterior a Ω^1 , $[\cdot]_{\Gamma_j}$ denota el salto sobre Γ_j en la dirección de \mathbf{n}_j^1 por cada $j = \bar{h}, b$:

$$[f]_{\Gamma_j} = f|_{\Omega^1} - f|_{\Omega_j^2}.$$

Físicamente, la primera condición en (9) representa el campo de velocidad con el cual los fluidos entran a Ω^i , $i = 1, 2$, a través de Γ_{ent} , la segunda se refiere a la condición de *no deslizamiento* que se impone al campo de velocidad del fluido 2 por estar en contacto con las paredes de la tubería, Γ_{0j} , $j = \bar{h}, b$, como elemento sólido del subdominio $\Omega^2(t)$, y por último la tercera condición representa el balance de *fuerzas de tensión superficial normal* respecto a la *presión exterior* necesario para establecer el equilibrio con los *esfuerzos* que ambos fluidos ejercen sobre la frontera de salida Γ_{sal} . Para detalles sobre este tipo de condiciones de fronteras ver [12], [13] y [14]. Por otro lado, $\kappa_j > 0$, $j = \bar{h}, b$, son constantes geométricas, dadas, que se relacionan con la *curvatura media* de las interfaces, R_j para cada $j = \bar{h}, b$ denota el radio de la curvatura con el signo apropiado, es decir, con la convención de que $R_j > 0$ si el centro de la curvatura de Γ_j está localizado en Ω^1 para cada $j = \bar{h}, b$, y σ es el tensor de esfuerzos dado, para cada $i = 1, 2$, por la ecuación constitutiva de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos no compresibles:

$$\sigma = \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) = \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) - p^i \mathbf{I},$$

en donde $A_1(\mathbf{u}^i) = (\nabla \mathbf{u}^i + (\nabla \mathbf{u}^i)^t)$ es el tensor de *tasa de deformación* (ver [3], [10], [12] y [15]).

Consideraremos que la velocidad entrante \mathbf{U}^i , $i = 1, 2$, tiene la forma:

$$\mathbf{U}^i = -U^i(y)\mathbf{n} = (U^i(y), 0)^t, \quad U^i(y) > 0 \quad \forall y \in (-D, D), \quad (11)$$

es decir, la velocidad entrante es paralela al vector normal \mathbf{n} y está dirigida hacia dentro de Ω^i . Aún más, consideraremos que $U^i(D) = U^i(-D) = 0$; así que \mathbf{U}^i satisface la condición de compatibilidad:

$$\mathbf{U}^2(\Gamma_{0j} \cap \Gamma_{ent}^2) = \mathbf{0} \quad \text{por cada } j = \bar{h}, b. \quad (12)$$

Finalmente, la ecuación para el movimiento de las superficies libres Γ_j , $j = \bar{h}, b$, viene dada por

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + u_x \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} = u_y \quad \text{para cada } j = \bar{h}, b, \quad (13)$$

con la condiciones inicial y de borde, para cada $j = \bar{h}, b$, siguientes

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, 0) &= \pm y_0 \quad \forall x \in [0, L], \\ \Phi_j(0, t) &= \pm y_0 \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde $\pm y_0 \in (0, \pm D)$ es una constante dada que toma el signo $+$ si $j = \bar{h}$ y el signo $-$ si $j = b$.

En esta etapa de la investigación la ecuación (13) junto con sus condiciones inicial y de frontera no se utilizan explícitamente en el *problema linealizado*, pues consideraremos que la posición de cada interfaz es conocida; en una etapa posterior se usará para resolver el problema *no lineal* completo.

3.2 Semi-discretización en tiempo

Para resolver numéricamente el problema se utilizará una combinación del MEF con el método implícito ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) [16]. Con esta técnica, las magnitudes escalares, vectoriales y/o tensoriales asociadas al problema de flujo se expresan en un tipo de coordenadas específicas que relacionan las coordenadas espaciales y materiales del dominio Ω^i , $i = 1, 2$. Esto se justifica por el hecho de que Ω^i tiene condiciones de fronteras preescribas sobre puntos espaciales fijos y sobre puntos materiales; es decir sobre las interfaces Γ_j , para $j = \bar{h}, b$, que se mueven y se deforman. Bajo estas premisas se tiene que la trayectoria de las partículas está basada en la velocidad relativa del fluido con respecto a la del dominio en movimiento, y no basada en el campo de velocidad \mathbf{u}^i para cada $i = 1, 2$. Entonces, cuando el término de convección no-lineal en las ecuaciones de Navier-Stokes (7) es discretizado por el método de las características (ver [17], [18] y [19]), la posición \mathbf{x} de la partícula del fluido en el tiempo t es una función de t , y la expresión

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \right)$$

es de hecho la derivada total (o en su efecto la material) $\frac{d\mathbf{u}^i}{dt}$, $i = 1, 2$. Para detalles, referimos al lector a Maury y Pironneau en [16] y [20] respectivamente.

Ahora, si el dominio se está moviendo con velocidad \mathbf{c}^i , la velocidad relativa de la partícula es $\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i$. Por tanto, reemplazamos

$$\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^i \quad \text{por} \quad \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + (\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i) \cdot \nabla \mathbf{u}^i$$

y usamos la aproximación

$$\frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial t} + (\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i) \cdot \nabla \mathbf{u}^i \simeq \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, t + \delta t) - \mathbf{u}^i(\mathbf{X}, t)),$$

donde \mathbf{X} es la posición inicial de la característica al tiempo t , conveccionada por $\mathbf{u}^i - \mathbf{c}^i$. Así cada ecuación de (7) está discretizada, en el tiempo, por:

$$\rho^i \frac{\mathbf{u}_m^{i,m+1} - \mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)}{\delta t} - \mu^i \Delta \mathbf{u}_m^{i,m+1} + \nabla p_m^{i,m+1} = \rho^i \mathbf{g}, \quad (14)$$

donde $\mathbf{u}_m^{i,m+1}$ es una aproximación de la velocidad del fluido en el tiempo t^{m+1} , definida sobre el dominio aproximante en el tiempo t^m , y \mathbf{X}^m es una aproximación de la posición ocupada por la partícula-fluido en t^m . Lo anterior no es más que el resultado de una discretización en *diferencias finitas*, hacia adelante con respecto al tiempo, del *operador diferencial total*; es decir:

$$\frac{d\mathbf{u}^i}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}_m^{i,m+1} - \mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)}{\delta t}.$$

En cada tiempo t^m las ecuaciones (14), conocidas como ecuaciones de *momentum*, son de la forma (para simplificar, suprimimos la dependencia sobre m):

$$\begin{cases} \alpha \rho^i \mathbf{u}^i - \mu^i \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i \mathbf{g} + \rho^i \alpha \mathbf{w}^i & \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^i = 0 & \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (15)$$

donde α se usa para representar a $1/\delta t$ y \mathbf{w}^i para representar a $\mathbf{u}_m^i(\mathbf{X}^m)$ (conocida en un paso anterior t^{m-1}). Las condiciones de borde están dadas por (9) y al problema planteado en estos términos se le conoce con el nombre de *problema de Stokes generalizado* (ver [4] y [21]), el cual debe ser resuelto en cada paso del tiempo dada la superficie que describe a cada interfaz. La primera condición para las interfaces (10) queda igual, y ya que la posición de cada interfaz es ahora conocida, la segunda condición se simplifica y (10) se transforma en:

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad [\sigma]_{\Gamma_j} \cdot \mathbf{n}_j^1 = -K_j \mathbf{n}_j^1 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ y } j = h, b, \quad (16)$$

donde K_j , que se usa para representar a κ_j/R_j para cada $j = \hbar, b$, es ahora una función conocida. Finalmente (15), (9) y (16) son las expresiones que definen al problema de Stokes generalizado con condiciones de frontera no estándar.

4 Formulación variacional y el buen planteamiento del problema

La técnica de discretización espacial de nuestro problema en cada paso del tiempo estará basada, tal como indicamos en la sección precedente, en el MEF. Esta técnica es una de las más usadas y desarrolladas matemáticamente para estudiar problemas relacionados con el *flujo de fluidos viscosos e incompresibles* [22], pues existe una gran cantidad de resultados teóricos, fundamentados en el análisis funcional, que se usan para establecer el *buen planteamiento* de los mismos en pro de obtener también buenas simulaciones computacionales del proceso o fenómeno asociado con tales problemas [23]. Básicamente, el MEF requiere de una *formulación variacional adecuada* del problema y de la elección de *espacios funcionales admisibles* para el análisis teórico continuo, discreto y posterior implementación computacional [24]. En problemas de Stokes generalizado como el que estamos tratando, en donde las incógnitas son campos vectoriales y escalares mezclados, es necesario plantear una *formulación variacional mixta equivalente* (ver [25]) para estudiar su *buen planteamiento* o, lo que es igual, la *existencia, unicidad y estabilidad* de la solución (\mathbf{u}^i, p^i) del problema en el dominio Ω por cada paso de tiempo; este es el objetivo principal de esta sección.

4.1 Formulación variacional

A continuación plantearemos el problema (15), (9), (16) en una formulación variacional equivalente. No tomaremos en cuenta la interpretación de K_j para cada $j = \hbar, b$, por tanto es suficiente considerar que las interfaces Γ_j son continuas Lipschitz al igual que cada subdominio Ω^i . Por otro lado, la función dada U pertenece al espacio $H^1(-D, D)$, la presión de salida p_{sal} al espacio $L^2(\Gamma_{sal})$ y las funciones conocidas K_j al espacio $L^2(\Gamma_j)$ para cada $j = \hbar, b$.

En primer lugar, consideraremos el problema donde la primera ecuación dada en las condiciones de frontera (9) es reemplazada por $\mathbf{U}^i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, clásicamente conocida como condición de *Dirichlet* homogénea:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_{ent}.$$

Posteriormente, una extensión adecuada de \mathbf{U}^i será considerada para resolver el problema (15), (9), (16). En vista de las condiciones de frontera podemos entonces elegir el siguiente espacio para la velocidad:

$$X = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2; \mathbf{v}|_{\Gamma_{ent}} = \mathbf{0}, \mathbf{v}|_{\Gamma_{0j}} = \mathbf{0} \text{ para } j = \bar{h}, \bar{b} \right\}. \quad (17)$$

Por otro lado, como las condiciones de transmisión sobre las interfaces y la condición de flujo a la salida involucran al tensor de esfuerzos σ , entonces la presión no tiene ninguna constante indeterminada y por tanto el espacio para la presión es:

$$M = \{q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; q \in L^2(\Omega)\}, \quad (18)$$

y como es usual, definimos el espacio de las velocidades con divergencia cero como:

$$V = \{\mathbf{v} \in X; \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}. \quad (19)$$

Ahora, dado que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, para la formulación variacional tenemos en cada Ω^i la siguiente identidad

$$\Delta \mathbf{u}^i = \nabla \cdot A_1(\mathbf{u}^i).$$

A continuación tomaremos el producto escalar de la primera ecuación de (15) en $[L^2(\Omega^i)]^2$ con una función de prueba $\mathbf{v} \in X$ para obtener:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \left(\alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^i} \mu^i \Delta \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^i} \nabla p^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) = \\ \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Definimos la operación "·" sobre los tensores $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ como:

$$A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$$

Entonces, en vista de la identidad señalada anteriormente, otras identidades del cálculo tensorial, el Teorema de la Divergencia y el hecho de que el tensor A_1 es simétrico, el segundo término del lado izquierdo de (20) se transforma en:

$$\int_{\Omega^i} \mu^i \Delta \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^i} \mu^i (A_1(\mathbf{u}^i) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad i = 1, 2,$$

donde

$$A_1(\mathbf{u}^i) : \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}), \quad i = 1, 2.$$

Análogamente, si trabajamos el tercer término del lado izquierdo en (20) se tiene que:

$$\int_{\Omega^i} \nabla p^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega^i} p^i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad i = 1, 2.$$

Sustituyendo en (20) las expresiones encontradas anteriormente, obtenemos la siguiente expresión para la formulación variacional:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \left(\alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) = \\ \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega^i} [-\mu^i A_1(\mathbf{u}^i) + p^i \mathbf{I}] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \right). \end{aligned} \tag{21}$$

Por la definición del tensor σ y de cada $\partial\Omega^i$ con sus respectivas condiciones, y por las condiciones (16) impuestas en las interfaces, entonces el término integral en la frontera del dominio se transforma, para cada $i = 1, 2$, en:

$$\int_{\partial\Omega^i} [-\mu^i A_1(\mathbf{u}^i) + p^i \mathbf{I}] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Gamma_{sal}} p_{sal}^i \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Gamma_{\bar{h}}} K_{\bar{h}} \mathbf{n}_{\bar{h}}^1 \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Sustituyendo en (21), se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \left(\alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) \\ = \sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega} \rho (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right) - \int_{\Gamma_{sal}} p_{sal}^i \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \tag{22} \\ - \int_{\Gamma_{\bar{h}}} K_{\bar{h}} \mathbf{n}_{\bar{h}}^1 \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds, \end{aligned}$$

con la condición de divergencia cero, que podemos escribir

$$\forall q \in L^2(\Omega^i), \quad \sum_{i=1,2} - \int_{\Omega^i} q \nabla \cdot \mathbf{u}^i \, d\mathbf{x} = 0. \tag{23}$$

En otras palabras, se tiene la siguiente formulación variacional para el problema homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u} \in X \text{ y } p \in M \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = l(\mathbf{v}) \\ \forall q \in M, \quad b(\mathbf{u}, q) = 0, \end{array} \right. \quad (24)$$

en donde $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *forma bilineal* definida como:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1,2} a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) = \sum_{i=1,2} \alpha \int_{\Omega^i} \rho^i \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{v}^i \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega^i} \mu^i A_1(\mathbf{u}^i) : A_1(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

$b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una *forma bilineal* definida mediante la siguiente expresión:

$$b(\mathbf{v}, p) = \sum_{i=1,2} b(\mathbf{v}, p^i) = - \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} p^i \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

y, finalmente, $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *forma lineal* definida mediante:

$$l(\mathbf{v}) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} \rho^i (\mathbf{g} + \alpha \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{sal}} p_{sal} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_{\bar{n}}} K_{\bar{n}} \mathbf{n}_{\bar{n}}^1 \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

4.2 Equivalencia.

La prueba de equivalencia entre el problema de frontera (15), (9), (16) y su formulación variacional (24) se basa esencialmente en la *densidad* de funciones regulares en el espacio al cual pertenecen, lo cual es apropiado para el operador de *Stokes* sobre un dominio Ω en una dimensión arbitraria n . Es necesario entonces establecer antes un resultado de equivalencia, para lo cual seguiremos muy de cerca la referencia [7] y para simplificar la notación suprimimos el superíndice i . Sea entonces, en particular para $n = 2$, el siguiente espacio:

$$W = \{(\mathbf{L}, p) \in L^2(\Omega)^{2 \times 2} \times L^2(\Omega); \quad \Theta \in L^2(\Omega)^2, \quad \nabla(\text{tr} \mathbf{L}) \in L^2(\Omega)^2\},$$

donde $\Theta = \nabla \cdot (-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I})$ y $\text{tr} \mathbf{L}$ denota la traza del tensor \mathbf{L} . Este es un espacio de *Hilbert* para la norma *graph* dada por

$$\|(\mathbf{L}, p)\|_W = \left(\|\mathbf{L}\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Theta\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\nabla(\text{tr} \mathbf{L})\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, el operador de *Stokes* está relacionado con el espacio W a través de la siguiente identidad:

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^2, \quad \forall p \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \nabla \cdot (-\mu A_1(\mathbf{u}) + p \mathbf{I}) = -\mu \Delta \mathbf{u} - \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla p.$$

De allí, y dado a que $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \text{tr} A_1(\mathbf{u})$, si $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ y $p \in L^2(\Omega)$ se satisface

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ en } \Omega, \end{aligned} \quad (25)$$

con \mathbf{f} en $L^2(\Omega)^2$, entonces el par $(A_1(\mathbf{u}), p)$ pertenece al siguiente subespacio de W :

$$W_s = \{(\mathbf{L}, p) \in W; \mathbf{L} \text{ es simétrico}\}. \quad (26)$$

A continuación enunciaremos el teorema de densidad, y un corolario, que es fundamental para concluir con la prueba de equivalencia. La prueba tanto del teorema como del corolario se basa en argumentos clásicos, y un esquema puede ser encontrado en el artículo [7].

Teorema 4.1. *Sea Ω un dominio acotado Lipschitz de \mathbb{R}^2 . Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^{2 \times 2} \times \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en W .*

Observación 1. *La prueba del Teorema 4.1 trae como consecuencia que si $\mathcal{D}_s(\overline{\Omega})^{2 \times 2}$ es el subespacio de los tensores simétricos de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^{2 \times 2}$, entonces $\mathcal{D}_s(\overline{\Omega})^{2 \times 2} \times \mathcal{D}(\overline{\Omega})^{2 \times 2}$ es denso en W_s .*

De manera indirecta, la fórmula de Green fué aplicada para plantear la formulación variacional. Retomando de nuevo este punto, para cada $(\mathbf{L}, p) \in \mathcal{D}_s(\overline{\Omega})^{2 \times 2}$ y toda $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^2$ tenemos que:

$$\int_{\Omega} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot [(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I})^t \mathbf{v}] \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Por el teorema de la divergencia y por la simetría del tensor $(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I})$, la expresión anterior se transforma en:

$$\int_{\Omega} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial \Omega} [(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{v}] \mathbf{n} \, ds + \int_{\Omega} (\mu \mathbf{L} : \nabla \mathbf{v} - p \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v}) \, d\mathbf{x},$$

en donde $p \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v} = p \nabla \cdot \mathbf{v}$, luego

$$\int_{\partial \Omega} [(-\mu \mathbf{L} + p \mathbf{I}) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, ds = \int_{\Omega} \Theta \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mu \mathbf{L} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}. \quad (27)$$

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 4.1 por argumentos conocidos del análisis funcional.

Corolario 4.2. Para todo $(\mathbf{L}, p) \in W$, la traza

$$(-\mu\mathbf{L} + p\mathbf{I}) \mathbf{n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^2$$

satisface, con una constante C que depende solamente de Ω , la cota siguiente

$$\|(-\mu\mathbf{L} + p\mathbf{I}) \mathbf{n}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^2} \leq C \|(\mathbf{L}, p)\|_W,$$

y se tiene la siguiente fórmula de Green

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2, \quad \langle (-\mu\mathbf{L} + p\mathbf{I}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (-\mu\mathbf{L} + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mu\mathbf{L} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v}) \, dx, \end{aligned} \quad (28)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ denota el paréo dual entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^2$ y $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^2$.

En este punto, retomando la notación con el superíndice i , ya estamos en capacidad de probar la equivalencia entre el problema con condiciones de frontera y su formulación variacional. En este orden de ideas ya hemos visto que cualquier solución $(\mathbf{u}^i, p^i) \in X \times M$ de (15), (9), (16) es solución de la formulación variacional (24). Inversamente, si (\mathbf{u}^i, p^i) es una solución de la formulación variacional (24), entonces la segunda ecuación de (24) da inmediatamente:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^i = 0 \quad \text{en } \Omega^i, \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

Después, tomando \mathbf{v}^i en $\mathcal{D}(\Omega^i)^2$ en la primera ecuación de (24) y aplicando (29) con la identidad $\nabla \cdot (A_1(\mathbf{u}^i)) = \Delta \mathbf{u}^i$, obtenemos las ecuaciones interiores en Ω^1 y Ω^2 respectivamente, en sentido de distribuciones:

$$\alpha \rho^i \mathbf{u}^i - \mu^i \Delta \mathbf{u}^i + \nabla p^i = \rho^i \mathbf{g} + \rho^i \alpha \mathbf{w} \quad \text{en cada } \Omega^i, \quad i = 1, 2,$$

es decir, recuperamos el sistema (15). Este sistema se escribe también:

$$\alpha \rho^i \mathbf{u}^i - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) = \rho^i \mathbf{g} + \rho^i \alpha \mathbf{w}, \quad i = 1, 2.$$

A continuación recuperamos las condiciones de frontera. En tal sentido, como $\mathbf{u}^i \in X$ entonces tenemos que el salto de \mathbf{u}^i se anula sobre cada interfaz, es decir:

$$[\mathbf{u}^i]_{\Gamma_j} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \quad j = \bar{h}, b.$$

Para recuperar las otras condiciones de frontera, multiplicamos cada ecuación de (15) en Ω^i por una función \mathbf{v} del espacio X , aplicando la fórmula de Green (28) y comparando con la formulación variacional (24). En vista del Corolario 4.2, vale la fórmula de Green pues $\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) \in L^2(\Omega^i)^2$ y $\nabla(\text{tr} \mathbf{A}_1(\mathbf{u}^i)) = 0$, $i = 1, 2$. De esta manera obtenemos para todo $\mathbf{v} \in X$

$$\sum_{i=1}^2 \langle \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) \mathbf{n}^i, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega^i} = - \int_{\Gamma_{sal}} p_{sal} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_h} K_h \mathbf{n}_h^1 \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Gamma_b} K_b \mathbf{n}_b^1 \cdot \mathbf{v} \, ds. \quad (30)$$

Dada la hipótesis (2), en (30) podemos elegir $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$, arbitraria en un entorno de Γ_h y cero en un entorno de Γ_b . Para esta clase de funciones \mathbf{v} tenemos:

$$\langle \sigma(\mathbf{u}^1, p^1) \mathbf{n}_h^1, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} - \langle \sigma(\mathbf{u}^2, p^2) \mathbf{n}_h^1, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} = - \int_{\Gamma_h} K_h \mathbf{n}_h^1 \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Equivalentemente, con la definición del salto, esto se escribe:

$$\langle [\sigma(\mathbf{u}^i, p^i)] \mathbf{n}_h^1, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} = - \int_{\Gamma_h} K_h \mathbf{n}_h^1 \cdot \mathbf{v} \, ds, \quad i = 1, 2,$$

lo cual implica que

$$[\sigma(\mathbf{u}^i, p^i)]_{\Gamma_h} \mathbf{n}_h^1 = -K_h \cdot \mathbf{n}_h^1, \quad i = 1, 2.$$

De la misma manera se obtiene

$$[\sigma(\mathbf{u}^i, p^i)]_{\Gamma_b} \mathbf{n}_b^1 = -K_b \cdot \mathbf{n}_b^1, \quad i = 1, 2.$$

Finalmente tomando $\mathbf{v} \in X$ tal que $\mathbf{v}|_{\Gamma_{ent}} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}|_{\Gamma_0^2} = \mathbf{0}$, entonces en (30) solo queda el término correspondiente a Γ_{out} . Es decir que

$$\langle \sigma(\mathbf{u}^i, p^i) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_{sal}} = - \int_{\Gamma_{sal}} p_{sal} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

Por tanto

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = -p_{sal} \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_{sal}.$$

Con todo el estudio anterior hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 4.3. *Los problemas (24) y (15), (9), (16) son equivalentes.*

Con el propósito de retomar el problema original con condición de borde tipo Dirichlet no homogénea sobre Γ_{ent} , construiremos una extensión; digamos $\bar{\mathbf{U}}^i$, de la velocidad de entrada \mathbf{U}^i para cada $i = 1, 2$.

Por ahora no necesitamos que $\bar{\mathbf{U}}^i$ sea regular, pero por el momento proponemos una muy simple. Para esto, recordemos que debido a la geometría de Ω la velocidad tiene la forma (11)

$$\mathbf{U}^i = (U^i(y), 0)^t, \quad i = 1, 2,$$

donde $U^i \in H^1(-D, D)$ es una función de y conocida que satisface

$$U^i(\pm D) = 0.$$

Entonces $\bar{\mathbf{U}}^i$ se obtiene repitiendo estos valores para todo (x, y) en Ω , es decir

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \bar{\mathbf{U}}^i(x, y) = (U^i(y), 0)^t, \quad (31)$$

la cual, claramente con divergencia cero, depende continuamente de la función U^i , pertenece a $H^1(\Omega)^2$ y satisface la condición de compatibilidad

$$\bar{\mathbf{U}}^2(\Gamma_{0_j} \cap \Gamma_{ent}^2) = \mathbf{0} \text{ por cada } j = h, b.$$

Con esto, proponemos la siguiente formulación variacional para el problema (15), (9), (16):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u}^i \in X + \bar{\mathbf{U}}^i \text{ y } p^i \in M \text{ tales que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \sum_{i=1,2} a(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^i) = \sum_{i=1,2} l(\mathbf{v}) \\ \forall q \in M, \quad \sum_{i=1,2} b(\mathbf{u}^i, q) = 0, \end{array} \right. \quad (32)$$

con las formas bilineales a y b definidas anteriormente.

4.3 Buen planteamiento

El problema (32) es un problema variacional no homogéneo del tipo mixto. La extensión de \mathbf{U}^i a todo Ω que hemos tomado pertenece al espacio V definido por (19), por lo que el problema de partida (15), (9), (16) tiene asociada tal formulación variacional.

con lo cual concluimos que la forma bilineal a es X -elíptica.

La continuidad sobre V de la forma lineal l se deduce de la desigualdad de Poincaré y el teorema de trazas.

Nos dedicaremos ahora a demostrar que la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ cumple con la condición *inf-sup* establecida por la proposición siguiente:

Proposición 4.4. *Existe una constante $\beta > 0$ tal que*

$$\forall q \in M, \quad \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}. \quad (36)$$

Demostración. La condición *inf-sup* es un resultado que se conoce cuando q tiene valor promedio nulo en el dominio Ω . En nuestro caso q no tiene esta restricción debido a que las condiciones sobre la velocidad en toda la frontera, $\partial\Omega$, no son todas del tipo *Dirichlet*. Hay varias formas de probar este resultado. La más fácil, según Girault *et al.* en [7], es considerando la extensión

$$q = \tilde{q} + \bar{q}$$

en donde

$$\bar{q} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x}$$

y tal que $\tilde{q} = (q - \bar{q})$ tiene valor promedio nulo en el dominio Ω . Es decir, estamos garantizando que $\tilde{q} \in L_0^2(\Omega)$. Con esto y con el hecho de que Ω es Lipschitziano y conexo, entonces el operador gradiente es un isomorfismo del espacio $L_0^2(\Omega)$ sobre el *espacio polar* V^0 de V . Por tanto para una constante $\tilde{\beta} > 0$ dependiendo sólo de Ω , se tiene que:

$$\forall \tilde{q} \in L_0^2(\Omega); \quad \|\nabla \tilde{q}\|_{H^{-1}(\Omega)} \geq \tilde{\beta} \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}.$$

De igual forma el operador divergencia es un isomorfismo del espacio *ortogonal* V^\perp de V , sobre $L_0^2(\Omega)$, y por lo anterior con la misma constante $\tilde{\beta}$ tenemos que:

$$\forall \mathbf{v} \in V^\perp; \quad \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{\beta} |\mathbf{v}|_{[H^1(\Omega)]^2}.$$

Ahora, con las premisas anteriores y un resultado encontrado en [4], tenemos que para toda $\tilde{q} \in L_0^2(\Omega)$ existe una única $\tilde{\mathbf{v}}$ en $[H_0^1(\Omega)]^2$ tal que:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{q} \quad \text{y} \quad \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\tilde{\beta}} \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (37)$$

con el mismo $\tilde{\beta} > 0$. Escogemos entonces $\bar{\mathbf{v}} = |\Omega| \bar{q} \boldsymbol{\rho} \mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es la normal exterior unitaria a Γ_{sal} (es decir que: $\mathbf{n} = (1, 0)^t$) y ρ es una función suave no negativa que se anula idénticamente en un entorno de $\partial\Omega$ excepto en el entorno de Γ_{sal} ; su traza sobre Γ_{sal} tiene soporte compacto y satisface que

$$\int_{\Gamma_{sal}} \rho \, ds = 1. \quad (38)$$

La elección de $\bar{\mathbf{v}}$ se justifica por el hecho de que

$$\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} = \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Entonces, finalmente (36) se establece por la técnica de Boland y Nicolaidis [26] (ver también [27]), la cual consiste en asociar a q una combinación lineal adecuada de $\tilde{\mathbf{v}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{v} = \gamma \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}},$$

en donde γ es una constante a elegir. Así, tenemos que:

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \gamma \int_{\Omega} \tilde{q}^2 \, d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} \bar{q} \tilde{q} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \tilde{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x},$$

en donde usamos, por (37), el hecho de que $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{q}$. Por otro lado como \bar{q} es constante y $\tilde{q} \in L_0^2(\Omega)$, entonces:

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \gamma \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \tilde{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\mathbf{x}. \quad (39)$$

Usando la definición de $\bar{\mathbf{v}}$, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y eligiendo $\gamma = |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}^2$, entonces tenemos en definitiva que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &\geq |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 - |\Omega|^{1/2} \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Ahora, en vista de que estamos trabajando en el espacio funcional $L^p(\Omega)$ con $p = 2$, por la desigualdad de Young (ver [28]) aplicada al segundo término del

lado derecho en (40) establecemos que

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \geq C_1 \left(\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (41)$$

en donde $C_1 = \frac{1}{2} \min(\gamma, 1)$. Por otro lado, tomando en consideración (37), la definición de la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ y la elección de γ obtenemos que

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad (42)$$

con

$$C_2 = |\Omega| \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{\tilde{\beta}^2} \|\nabla \varrho\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|\Omega|} \right)^{1/2}.$$

Como $q = \tilde{q} + \bar{q}$ y la descomposición es ortogonal, entonces

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

y por tanto (42) se transforman en

$$\frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{C_2 \sqrt{\|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2}}. \quad (43)$$

Finalmente, combinando (41) con (43) se obtiene la condición inf-sup

$$\frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}$$

con $\beta = \frac{C_1}{C_2}$. □

Finalmente, debido a la regularidad que hemos impuesto sobre la data, la forma $l(\mathbf{v})$ es un elemento del espacio dual; $H^{-1}(\Omega)^2$, de $H^1(\Omega)^2$ y está acotada. De aquí se tiene la continuidad del lado derecho de la expresión (32). Entonces por la teoría de Babuška-Brezzi (ver [29] y [30]) hemos probado la siguiente proposición y con la cual finalizamos el estudio presentado en este artículo.

Proposición 4.5. *El problema (32) está bien planteado.*

Agradecimientos

Agradecemos al CDCH y al programa de cooperación científica-bilateral entre Venezuela y Francia, a través del FONACIT y el Comité ECOSNORD respectivamente en cada país, por el financiamiento del trabajo enmarcado en el proyecto N° 2000000868 (V00M04 en Francia) como un avance de tesis doctoral del autor Wilfredo Angulo bajo la tutoría de la Profesora Hilda López y la Profesora Vivette Girault. Igualmente agradecemos a los investigadores del Laboratorio de Análisis Numérico Jacques-Louis Lions de la Universidad Pierre Marie Curie (Paris 6): Bertrand Maury y Pascal Joly por la valiosa colaboración durante la realización de las estadías de investigación conducentes, en gran parte, al estudio presentado en este artículo y realizadas por el autor W. Angulo en este Laboratorio.

Referencias

- [1] D. D. JOSEPH Y Y. RENARDY, Fundamentals of two-fluid dynamics, Part II Lubricated transport, *Drops and Miscible Fluids*, Springer, New York, (1993).
- [2] D. D. JOSEPH, R. BAI, K. P. CHEN Y Y. RENARDY, Core-anular flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, 65 (1999).
- [3] R. BIRD, W. STEWART Y E. LIGHTFOOT, Fenómenos de Transporte, Editorial Reverté-S.A, Barcelona-España, (1997).
- [4] V. GIRAULT Y P. RAVIART, Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, *Springer Series in Computational Mathematics*, Vol. 5, Springer-Verlag, New York, (1986).
- [5] P. G. CIARLET, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, vol. II: Finite Element Methods, Chapter 2 en *Handbook of Numerical Analysis*, North Holland, Amsterdam, P.G. Ciarlet y J.L. Lions, editores, (1991).
- [6] B. MAURY, *Flujo de Dos Fases*, Avance del Proyecto ECOS-Nord-V00M04, UCV-CCT, Caracas-Venezuela, (2002).
- [7] V. GIRAULT, H. LÓPEZ AND B. MAURY, *One time-step finite element discretization of the equation of motion of two-fluid flows*, Numerical Methods for Differential Equations, **22**. 3 (2006), pp. 680-707.

-
- [8] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, I*, Dunod, Paris (1968).
- [9] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [10] C. TRUESDELL AND K. R. RAJAGOPAL, *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhauser, Boston, (2000).
- [11] D. EDWARDS, H. BRENNER AND D. WASAN, *Interfacial Transport Processes and Rheology*, Butterworth-Heinemann, Boston, (1991).
- [12] G. K. BATCHELOR, *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, (1967).
- [13] J. M. DELHAYE, *Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation*, Int. J. Multiphase Flow, **1** (1974), pp 395-409.
- [14] I. V. DENISOVA, *Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface*, Acta Appl. Math. **37-1** (1994), pp 31-40.
- [15] L. LANDAU ET E. LIFCHITZ, *Mécaniques des Fluides*, MIR Moscou, (1955).
- [16] B. MAURY, *Characteristics ALE Method for the 3D Navier-Stokes Equations with a Free Surface*, Int. Journal of Comp. Fluid Dyn. **6** (1996), pp.175-188.
- [17] A. BERMUDEZ AND J. DURANY, *Application of characteristics method with variable time step to steady convection-diffusion problems*, North-Holland, (1987).
- [18] M. AMARA, EL DABAGHI Y C. KADA KLOUCHA. *Ecoulement incompressible à surface libre*, Informe de INRIA Rocquencourt, (2000).
- [19] M. ABDELWAHED, M. AMARA, F. DABAGHI AND M. HASSINE, *A Numerical Modeling of a two phase flow for water Eutophication Problems*, Proceeding of the European Conference on Computational Methods in Applied Sciences, Eccomas (2000), 18 pages, Spain 200.
- [20] O. PIRONNEAU. *On the transport diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math., **38** (1982), 309–332.

- [21] R. GLOWINSKI, *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*, Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet and J. L. Lions-Editors, North-Holland, Amsterdam, (2003).
- [22] M. GUNZBURGER, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows. A guide to Theory, Practice and Algorithms*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, Boston, MA, (1989).
- [23] O. AXELSSON AND V. A. BARKER, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, Orlando, MA, (1984).
- [24] V. GIRAULT, *Approximations variationnelles des E.D.P.*, Cours du DEA, Laboratoire Jacques-Louis Lions de La Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, (2006).
- [25] A. ERN AND J-L. GUERMOND, *Theory and Practice of Finite Elements*, in Springer Series in Applied Mathematical Sciences 159, Springer-Verlag, New York, (2004).
- [26] J. BOLAND Y R. NICOLAIDES, *Stability of finite elements under divergence constraints*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), pp. 722-731.
- [27] D. L. DWOYER, M. Y. HUSSAINI Y R.G. VOIGT, *Finite Elements, Theory and Application*, Springer-Verlag, ICASE/NASA LaRC Series, Hampton-USA, (1986).
- [28] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, fifth edition, (1996).
- [29] I. BABUŠKA, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math. **20** (1973), pp. 179-192.
- [30] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers*, RAIRO, Anal. Num. **R2** (1974), pp. 129-151.