Divulgaciones Matemáticas Vol. 16 No. 2 (2008), pp. 327–332

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@yahoo.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Los seis siguientes problemas fueron propuestos durante la X Olimpiada de Centroamérica y el Caribe, que tuvo lugar en San Pedro Sula, Honduras, en el mes de junio pasado. Venezuela asistió con una delegación compuesta por los estudiantes Jesús Rangel, quien obtuvo medalla de bronce, Tomás Rodríguez y Miguelángel DahDah, quienes obtuvieron sendas menciones honoríficas, la profesora Silvina María de Jesús como tutora y el editor de esta sección como Jefe de la delegación.

132. *(X OMCC, Problema 1.)* Halle el menor entero positivo N tal que la suma de sus cifras sea 100, y la suma de las cifras de $2N$ sea 110.

133. *(X OMCC, Problema 2.)* Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro O tal que AC es un diámetro. Se construyen

los paralelogramos $DAOE$ y $BCOF$. Demuestre que si los puntos E y F pertenecen a la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

134. *(X OMCC, Problema 3.)* Se tienen 2008 bolsas rotuladas del 1 al 2008, con 2008 ranas en cada una. Dos personas juegan alternadamente. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella la cantidad de ranas que se deseen (al menos una), quedando en ésta x ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con número de rótulo mayor al de la bolsa seleccionada y que contenga más de x ranas, se escapan algunas hasta que queden x en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa 1. Encuentre y justifique una estrategia ganadora.

135. *(IX OMCC, Problema 4.)* Cinco amigas tienen una pequeña tienda que abre de lunes a viernes. Como cada día son suficientes dos personas para atenderla, deciden hacer un plan de trabajo para la semana, que especifique quienes trabajarán cada día, y que cumpla las dos condiciones siguientes:

    a) Cada persona trabajará exactamente dos días de la semana.

    b) Las 5 parejas asignadas para la semana deben ser todas diferentes.

    ¿De cuántas maneras se puede hacer el plan de trabajo?

    Ejemplo: Si las amigas son A, B, C, D y E, un posible plan de trabajo sería: *lunes* A y B, *martes* A y D, *miércoles* B y E, *jueves* C y E y *viernes* C y D.

136. *(IX OMCC, Problema 5.)* Halla un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales tal que $(x + 10)P(2x) = (8x - 32)P(x + 6)$ para todo x real y $P(1) = 210$. Verifique que el polinomio encontrado cumple las condiciones.

137. *(IX OMCC, Problema 6.)* Sea ABC un triángulo acutángulo. Se toman P y Q en el interior de los lados AB y AC, respectivamente, tales que B, P, Q y C estén en una misma circunferencia. La circunferencia circunscrita al $\triangle ABQ$ corta a BC de nuevo en S y la circunferencia circunscrita al ΔAPC corta a BC de nuevo en R, PR y QS se intersecan en L. Demuestre que la intersección de AL y BC no depende de la elección de P y Q.

2 Soluciones

107. [**13**(2) (2005) p. 148, *XX Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Cartagena*.] Determine todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xyz &= 8, \\ x^2y + y^2z + z^2x &= 73, \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 &= 98. \end{aligned}$$

Solución del editor. Desarrollando la ecuación 3 y sustituyendo $xyz = 8$ se tiene

$$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) = 98 + 6xyz = 146.$$

Pero de la ecuación 2 se tiene $2(x^2y + y^2z + z^2x) = 146$, e igualando resulta

$$x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2,$$

que es equivalente a

$$(x-y)(x-z)(y-z) = 0.$$

Por lo tanto debe haber dos incógnitas iguales. Supongamos $x = y$. Entonces el sistema se convierte en

$$\begin{aligned} x^2z &= 8, \\ x^3 + x^2z + xz^2 &= 73. \end{aligned}$$

Sustituyendo $z = 8/x^2$ en la última ecuación y multiplicando por x^3 queda $x^6 - 65x^3 + 64 = 0$, de donde x puede ser 1 o 4. Así se obtienen las soluciones $(1, 1, 8)$ y $(4, 4, \frac{1}{2})$. Por simetría se obtienen las restantes soluciones $(1, 8, 1)$, $(8, 1, 1)$, $(4, \frac{1}{2}, 4)$ y $(\frac{1}{2}, 4, 4)$.

114. [**14**(1) (2006) p. 94, *Olimpiada de Mayo*.] En el pizarrón eatán escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro sumó los números del pizarrón. Fernando los multiplicó, obteniendo un resultado igual a cuarenta veces el que obtuvo Mauro. Determine cuáles pueden ser los números del pizarrón. Halle todas las posibilidades.

Solución compuesta de las de Elias Segundo Velazco Villanueva, IUTM y UNEFA, Maracaibo, Venezuela, y el editor. Como el producto es igual a cuarenta veces la suma, entre los números escritos deben estar incluidos al menos los factores primos de 40, es decir 2, 2, 2 y 5. Éstos no pueden ser los únicos, ya que $40{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}5 > 2{+}2{+}2{+}5$. Supongamos que haya un solo primo adicional p. Entonces $40p = 40(2{+}2{+}2{+}5{+}p) = 40(11{+}p)$, de donde $p = 11 + p$ y $11 = 0$, absurdo.

Si hay dos primos adicionales $p \leq q$ entonces $40pq = 40(11 + p + q)$ de donde $pq = 11 + p + q$ o bien y $(p - 1)(q - 1) = 12$. Ahora hay dos posibilidades:

I) $p = 2$, $q = 13$. Esto nos da la solución 2, 2, 2, 2, 5, 13.

II) $p = 3$, $q = 7$. Esto nos da la solución 2, 2, 2, 3, 5, 7.

Si hay tres primos adicionales $p \leq q \leq r$ entonces $pqr = 11{+}p{+}q{+}r$. Si $p > 2$ entonces el miembro izquierdo es impr y el derecho par, absurdo. Por lo tanto $p = 2$ y $2qr = 13 + q + r$, de donde por paridad también debe ser $q = 2$ y $r = 5$. Esto nos da la solución 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5.

Con cuatro primos adicionales $p \leq q \leq r \leq s$ entonces $pqrs = 11{+}p{+}q{+}r{+}s$. Si $p = 2$ entonces $q{+}r{+}s$ debe ser impar, y se presentan dos casos: (1) $q = r = 2$, $s > 2$, pero entonces $8s = 17 + s$, absurdo; (2) $q, r, s \geq 3$, pero como el producto de enteros mayores que 1 es siempre mayor o igual que su suma, se tendría $2qrs = qrs + qrs \geq 27 + qrs > 13 + q + r + s$, y no hay solución.

Finalmente si hay 5 o más primos adicionales $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ entonces $p_1 p_2 \cdots p_n = 11 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ y

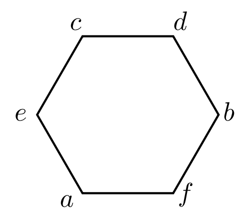
$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} = \frac{11}{p_n} + \frac{p_1}{p_n} + \cdots + \frac{p_n}{p_n},$$

pero el miembro izquierdo es al menos 2^{n-1} mientras que el derecho es a lo sumo $\frac{11}{2} + n$, y para $n \geq 5$ se cumple $2^{n-1} > n + \frac{11}{2}$. Por lo tanto las únicas soluciones son las tres halladas: 2, 2, 2, 2, 5, 13; 2, 2, 2, 3, 5, 7 y 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5.

115. [**14**(1) (2006) p. 94, *Olimpiada de Mayo 2006*.] En cada esquina de un hexágono regular se escribe un entero positivo, de manera tal que los seis sean diferentes y entre todos sumen 100. Luego se multiplica cada número por el que le sigue, en el sentido de las agujas del reloj, y se suman los seis productos obteniendo un resultado x. Halle el menor valor que puede tomar x.

Solución del editor. Supongamos que se han colocado los números $a > b > c > d > e > f$ en los vértices de un hexágono regular de manera que las sumas de los productos de números vecinos sea mínima. Entonces los vecinos del mayor (a) deben ser los más pequeños (e y f). En efecto, supongamos que f no es vecino de a y sean u y v los vecinos derechos de a y f. Al recorrer los vértices del hexágono en sentido antihorario tendremos $au \ldots fv \ldots a$. Si se invierten los números del arco $u \ldots f$ de modo que quede $af \ldots uv \ldots va$ entonces la suma de productos varía en $af+uv-(au+fv) = (a-v)(f-u) < 0$, es decir que disminuye, absurdo.

Análogamente se prueba que el otro vecino de a debe ser e, y que los vecinos del menor (f) deben ser los más grandes, por lo tanto el otro vecino de f es b. Se concluye fácilmente que el orden cíclico de los números en el hexágono debe ser el que se muestra en la figura (o el que se obtiene invirtiendo el sentido).



Ahora bien, como los números son diferentes es claro que los valores mínimos de f, e, d, c y b son 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente, mientras que el máximo valor posible de a es $100 - (1+2+3+4+5) = 85$. Mostraremos que estos son precisamente los valores que minimizan la suma de productos. Supongamos que $f = 1+g$, $e = 2+h$, $d = 3+i$, $c = 4+j$, $b = 5+k$ y $a = 85-t$, con $g, h, i, j, k \geq 0$ y $t = g+h+i+j+k$. Entonces la suma de productos es

$$\begin{aligned}
&a(e+f) + b(f+d) + c(d+e) \\
&= (85-t)(3+g+h) + (5+k)(4+g+i) + (4+j)(5+i+h) \\
&= 295+85(g+h)-3t-t(g+h)+5(g+i)+4k+k(g+i)+5j+4(i+h)+j(i+h) \\
&= 295 + 85(g+h) - 3(g+h+i+j+k) + 5(g+i) + 4k + 5j + 4(i+h) \\
&-t(g+h) + k(g+i) + j(i+h) \\
&= 295 + 87g + 86h + 6i + 2j + k - t(g+h) + k(g+i) + j(i+h) \\
&= 295 + (87-t)g + (86-t)h + 6i + 2j + k + k(g+i) + j(i+h) \geq 295.
\end{aligned}$$

Esto significa que el mínimo se alcanza colocando en los vértices los números 85, 1, 5, 3, 4 y 2.

124. [**14**(2) (2006) p. 172, *VIII OMCC, Panamá, 2006.*] El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

Solución del editor. Sean I_1, I_2, …, I_n las islas de Olimpia en orden decreciente de población (I_1 es Panacentro). Afirmamos que, para cada isla I_k con $2 \leq k \leq n$, existe un único $j < k$ tal que I_j e I_k están conectadas por un puente. En efecto, el enunciado del problema nos dice que que hay un camino c que va de I_1 a I_k, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que no pasa más de una vez por el mismo puente. Si la última isla visitada antes de llegar a I_k es I_j, por la segunda condición del problema debe ser $j < k$. Supongamos ahora por absurdo que hubiese un puente de otra isla I_i a I_k, con $i < k$. Si c no pasa por I_i entonces se podría prolongar c hasta llegar a I_i, lo cual es absurdo pues I_i tiene menos habitantes que I_k. Si en cambio c pasa por I_i debe ser $i < j < k$ y el camino c debe ser de la forma $I_1 \dots I_i \dots I_j I_k$. Pero entonces se podría construir un nuevo camino recorriendo el tramo inicial $I_1 \dots I_i$ de c, pasando de allí directamente a I_k y luego a I_j, lo cual nuevamente es absurdo.

Ahora bien, I_2 debe estar directamente unida a I_1. A I_3 debe llegar un puente o bien desde I_1 o bien desde I_2. A I_4 debe llegar un puente desde I_1, I_2 o I_3, y así sucesivamente. Por el principio del producto el número total de maneras posibles para conformar los puentes es entonces $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!$

131. [**15**(2) (2007) p. 79, propuesto por Fernando Castro, UPEL, Maturín, Venezuela.] ¿Son isomorfos los grupos aditivos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$?

Solución del autor.

Sea B una base de Hamel de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Entonces $B' = \{(b,0) : b \in B\} \cup \{(0,b) : b \in B\}$ es una base de Hamel de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Como B y B' tienen la misma cardinalidad (a saber c, la del continuo) existe una biyección de B en B' que se puede extender por linealidad a un $\mathbb{Q}$-isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que por supuesto es también un isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como grupos aditivos.