Divulgaciones Matemáticas Vol. 9 No. 1(2001), pp. 109–111

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

37. *Este problema apareció en el número anterior pero en el enunciado se delizó un error. El siguiente es el enunciado correcto:*

    Sean ABC un triángulo acutángulo y C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F ($F \neq A$) y C_1 corta al lado CA en el punto E ($E \neq A$). Además, BE corta a C_2 en P y CF corta a C_1 en Q. Demostrar que las longitudes de los segmentos AP y AQ son iguales.

45. Hallar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfica sea un subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$, o probar que tal función no existe.

46. Hallar una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que para cada $x \in [0,1]$ el conjunto $f^{-1}(x)$ sea infinito, o probar que tal función no existe.

47. Hallar una función continua $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ tal que para cada $x \in [0, 1]$ el conjunto $f^{-1}(x)$ sea finito y tenga un número par de elementos, o probar que tal función no existe.

2 Soluciones

14. [**7**(2) (1999) p. 194]. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

   Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

   Primero probaremos que para n personas $2n-2$ llamadas son suficientes. Enumeremos las personas desde 1 hasta n. Si se efectúan las llamadas 1 a 2, 2 a 3,..., $n-1$ a n, la persona n posee toda la información. Luego las llamadas n a 1, n a 2,..., n a $n-1$ hacen que todas posean la información completa. Veamos ahora la necesidad. Consideremos el momento en que alguien recibe por primera vez toda la información. Las demás $n-1$ personas deben haber hecho al menos una llamada hasta ese momento. Por otra parte, a partir de dicho momento las $n-1$ personas restantes deberán recibir al menos una llamada para completar su información. Luego el número de llamadas necesarias es al menos $2n-2$.

30. [**8**(2) (2000) p. 180]. Encontrar todos los enteros positivos a, b, c tales que $ab + bc + ca$ es un número primo y

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}.$$

   Solución por María Cristina Solaeche, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia (`solaeche@hotmail.com`).

   Si a, b, c y $p = ab + bc + ca$ satisfacen las condiciones del problema entonces $(a+b)^2 = (a+c)(b+c) = ab+ac+bc+c^2$ y $p = (a+b)^2 - c^2 = (a+b-c)(a+b+c)$. Como p es primo esta factorización sólo puede ser $1 \cdot p$, y entonces $a+b+c = p$. Luego $a+b+c = ab+ac+bc$. Si alguno de los números a, b o c fuera mayor que 1, sería $a+b+c < ab+ac+bc$, contradiciendo el hecho de que son iguales. Por lo tanto $a = b = c = 1$.

39. [**8**(2) (2000) p. 181]. Se construye un polígono regular de n lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

    1. El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.
    2. Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

    Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

    Para cada vértice enumeremos el lado opuesto y las diagonales paralelas al lado opuesto con el mismo número asignado al vértice.

    Comentario del editor: Naturalmente que este resultado vale para cualquier polígono. En el lenguaje de la teoría de grafos equivale a decir que el índice cromático del grafo completo K_n, con $n \geq 3$ impar, es n. El profesor Subocz da como referencia el libro *Edge-colourings of graphs* de S. Fiorini y R. J. Wilson. Pitman, Londres, 1977.