

Le critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann: aspects numériques

Bernard Landreau et Florent Richard

SOMMAIRE

1. Introduction
2. Produits scalaires
3. Calculs de la distance d_n
4. Calculs de la projection orthogonale de χ sur V_n
5. Calculs de la distance de χ à certaines suites
6. Recherche des meilleurs θ

Addendum

Remerciements

Références

Soit \mathcal{B} le sous-espace de $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty)$ composé des fonctions f telles que $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \rho\left(\frac{\theta_k}{t}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $0 < \theta_k \leq 1$, pour $1 \leq k \leq n$, où $\rho(t)$ désigne la partie fractionnaire de t . Notons aussi χ la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, 1[$. Un résultat bien connu de Nyman et Beurling [Nyman 50, Beurling 55] implique que l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si $d(\chi, \mathcal{B}) = 0$. Nous présentons ici divers résultats numériques concernant l'approximation de χ par des éléments de \mathcal{B} .

Let \mathcal{B} be the subspace of $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty)$ consisting of the functions f such that $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \rho\left(\frac{\theta_k}{t}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $0 < \theta_k \leq 1$, for $1 \leq k \leq n$, where $\rho(t)$ denotes the fractional part of t . We also denote by χ the characteristic function of $(0, 1]$. A well known result of Nyman and Beurling [Nyman 50, Beurling 55] implies that the Riemann hypothesis holds if and only if $d(\chi, \mathcal{B}) = 0$. We present several numerical results about the approximation of χ by elements of \mathcal{B} .

1. INTRODUCTION

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0, +\infty)$ et le sous-espace \mathcal{B} de \mathcal{H} des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \rho\left(\frac{\theta_k}{t}\right),$$

$n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $0 < \theta_k \leq 1$, pour $1 \leq k \leq n$, où $\rho(t)$ désigne la partie fractionnaire de t . On note χ la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, 1[$.

Il résulte des travaux de Nyman et Beurling [Nyman 50, Beurling 55] que l'hypothèse de Riemann équivaut au fait que χ est limite dans \mathcal{H} d'une suite d'éléments de \mathcal{B} , autrement dit au fait que $d(\chi, \mathcal{B}) = 0$ où d désigne la distance naturelle sur \mathcal{H} induite par le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt$.

Si l'on note, pour $0 < \lambda \leq 1$, \mathcal{B}_λ le sous-espace de \mathcal{B} des fonctions f telles que $\min_{1 \leq k \leq n} \theta_k \geq \lambda$ et

2000 AMS Subject Classification: Primary 11M26; Secondary 46E99

Keywords: Riemann Hypothesis, Nyman-Beurling Criterion

$D(\lambda) = d(\chi, \mathcal{B}_\lambda)$, le théorème de Beurling et Nyman affirme donc l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et la convergence de $D(\lambda)$ vers 0 quand λ tend vers 0.

On dispose sur $D(\lambda)$ de la minoration suivante établie par L. Báez-Duarte, M. Balazard, E. Saias et le premier auteur [Báez-Duarte et al. 00].

Théorème 1.1. (Báez-Duarte et al.)

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} D(\lambda) \sqrt{\log(1/\lambda)} \geq C,$$

où la constante C est définie par

$$C := \left(\sum_{\beta} \frac{1}{|\beta|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la sommation portant sur les zéros β de la fonction ζ de partie réelle $\frac{1}{2}$, chaque zéro étant compté une seule fois, quel que soit son ordre de multiplicité.

Signalons que ce résultat a été récemment amélioré par J.-F. Burnol [Burnol 01] qui a établi le théorème suivant.

Théorème 1.2. (Burnol.)

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} D(\lambda) \sqrt{\log(1/\lambda)} \geq \left(\sum_{\beta} \frac{m(\beta)^2}{|\beta|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où la sommation porte toujours sur les zéros β de la fonction ζ de partie réelle $\frac{1}{2}$ et $m(\beta)$ désigne la multiplicité de β .

On remarquera que d'une part si l'hypothèse de Riemann est fautive les deux théorèmes précédents sont triviaux puisque le membre de gauche vaut $+\infty$. D'autre part, on sait [Rosser 39, p. 29] que sous l'hypothèse de Riemann on a

$$\sum_{\beta} \frac{m(\beta)}{|\beta|^2} = 2 + \gamma - \log 4\pi,$$

où γ désigne la constante d'Euler. Cela permet donc d'affirmer finalement à partir du résultat de Burnol que

Théorème 1.3.

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} D(\lambda) \sqrt{\log(1/\lambda)} \geq \sqrt{2 + \gamma - \log 4\pi}.$$

Les résultats numériques mentionnés en [Báez-Duarte et al. 00] et développés dans ce qui suit ont conduit leurs auteurs à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 1.4. *On a*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} D(\lambda) \sqrt{\log(1/\lambda)} = \sqrt{2 + \gamma - \log 4\pi}.$$

Nous présentons ici un certain nombre de résultats numériques concernant l'approximation de la fonction χ par des éléments de \mathcal{B} .

2. PRODUITS SCALAIRES

La plupart des calculs présentés ici nécessitent l'évaluation des produits scalaires entre les fonctions g_θ définies par $g_\theta(t) := \rho(\theta/t)$ pour $\theta > 0$.

On utilise pour cela les formules¹ explicites de Vassiouline [Vassiouline 96] suivantes s'appliquant aux fonctions $e_n(t) = g_{\frac{1}{n}}(t) = \rho\left(\frac{1}{nt}\right)$, $n \geq 1$.

Théorème 2.1. (Vassiouline.) *On a pour $n, m \geq 1$*

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{\log(2\pi) - \gamma}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) + \frac{m-n}{2mn} \log\left(\frac{n}{m}\right) \\ &\quad - \frac{\pi\omega}{2nm} \sum_{k=1}^{n_0-1} \rho\left(\frac{km_0}{n_0}\right) \cot \frac{\pi k}{n_0} \\ &\quad - \frac{\pi\omega}{2mn} \sum_{k=1}^{m_0-1} \rho\left(\frac{kn_0}{m_0}\right) \cot \frac{\pi k}{m_0}, \end{aligned}$$

où $\omega = (n, m)$, $n = \omega n_0$, $m = \omega m_0$ et γ désigne la constante d'Euler.

A partir de ces formules, il est aisé d'établir les résultats plus généraux suivants.

Proposition 2.2. *On a*

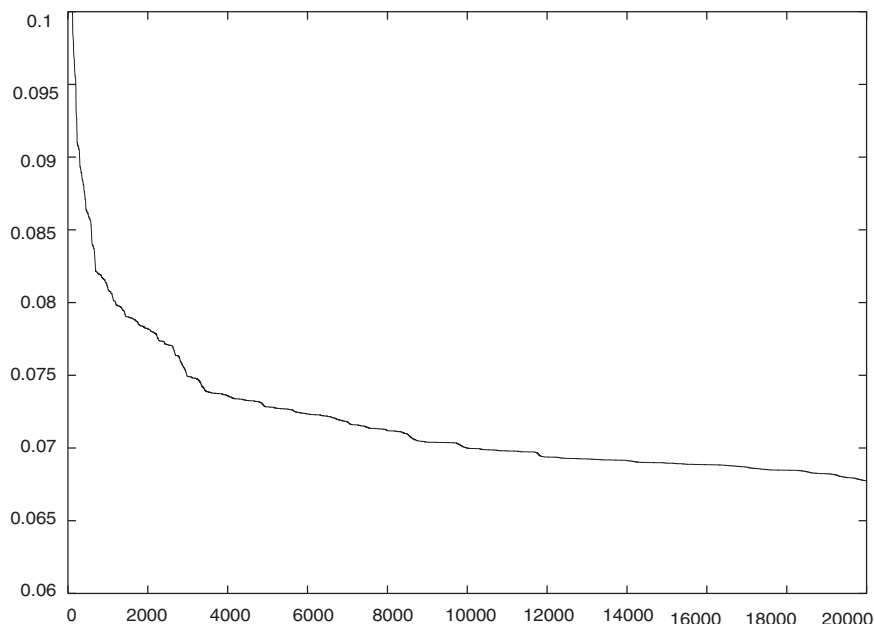
- (i) $\langle g_\theta, g_\theta \rangle = \theta \langle e_1, e_1 \rangle = \theta(\log(2\pi) - \gamma)$ pour tout $\theta > 0$;
- (ii) $\langle g_{\frac{p}{q}}, g_{\frac{p'}{q'}} \rangle = pp' \langle e_{p'q}, e_{pq'} \rangle$, pour $p, p', q, q' \geq 1$, $p \leq q$, et $p' \leq q'$;
- (iii) $\langle \chi, g_\theta \rangle = \theta(-\log \theta + 1 - \gamma)$, pour tout $\theta, 0 < \theta \leq 1$.

3. CALCULS DE LA DISTANCE d_n

D'après la formule d'inversion de Möbius et le théorème des nombres premiers, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \rho\left(\frac{1}{kt}\right) = -1 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

¹En fait, Vassiouline a donné des formules pour $\langle e_n - e_1/n, e_m - e_1/m \rangle$.

FIGURE 1. La distance d_n de 1 à 20 000.

Une première approche naturelle consiste donc à se restreindre aux fonctions de \mathcal{B} ayant des paramètres θ rationnels et plus précisément de la forme $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On considère pour cela les fonctions e_k définies par $e_k(t) = \rho(\frac{1}{kt})$ pour $k \geq 1$ et on note V_n le sous-espace vectoriel engendré par la famille (e_1, \dots, e_n) . On s'intéresse alors à la distance $d_n := d(\chi, V_n)$ dans \mathcal{H} .

Les résultats numériques qui suivent plaident en faveur de la conjecture suivante déjà énoncée en [Báez-Duarte et al. 00] et similaire à la conjecture précédente.

Conjecture 3.1. *On a*

$$d_n^2 \sim \frac{2 + \gamma - \log 4\pi}{\log n} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Rappelons que la convergence de d_n vers zéro entraîne automatiquement l'hypothèse de Riemann puisque $D(\frac{1}{n}) \leq d_n$ mais en revanche la réciproque n'est pas claire².

Des calculs sur d_n ont déjà été présentés en [Báez-Duarte et al. 00], nous les avons prolongés jusqu'à $n = 20\,000$. La méthode est fondée sur une orthogonalisation de Gram-Schmidt de la base des $(e_k)_{k \geq 1}$. Nous avons également utilisé d'autres méthodes de calculs comme la formule

$$d_n^2 = \frac{\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n, \chi)}{\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n)},$$

²En fait, la question est maintenant réglée, cf Addendum.

ou encore la méthode du gradient conjugué ou bien encore la méthode d'orthogonalisation QR ; ces méthodes sont nettement plus lentes mais permettent de confirmer (au moins jusqu'à $n = 10\,000$) les résultats précédemment trouvés.

On peut observer, Figure 1, que la décroissance de d_n est relativement lente et irrégulière.

En grossissant le graphe, par exemple entre 0,07 et 0,08, on observe, Figure 2, une succession de ruptures de pente difficiles à interpréter. En effet, s'il est clair, que pour les petites valeurs de n , ce sont les nombres premiers qui provoquent une pente importante pour le graphe de d_n , cela devient beaucoup plus complexe par la suite et mériterait certainement une étude approfondie.

Expérimentalement, la suite $d_n \sqrt{\log n}$ converge et l'on peut calculer aisément par la méthode des moindres carrés le nombre réel $a = a_N$ qui minimise $\sum_{n=1}^N |d_n - a/\sqrt{\log n}|^2$. On trouve pour $N = 20\,000$, $a_N \approx 0,21377$. La proximité de ce nombre avec $(2 + \gamma - \log 4\pi)^{\frac{1}{2}} \approx 0,21492$ apporte du crédit aux conjectures précédentes. La comparaison du graphe de d_n et de celui de sa valeur asymptotique conjecturée, Figure 3, explique le léger décalage de la constante a_N , sans que celui-ci ne soit vraiment significatif.

4. CALCULS DE LA PROJECTION ORTHOGONALE DE χ SUR V_n

Dans cette section, nous nous proposons d'étudier la projection orthogonale de χ notée p_n sur le sous-espace V_n .

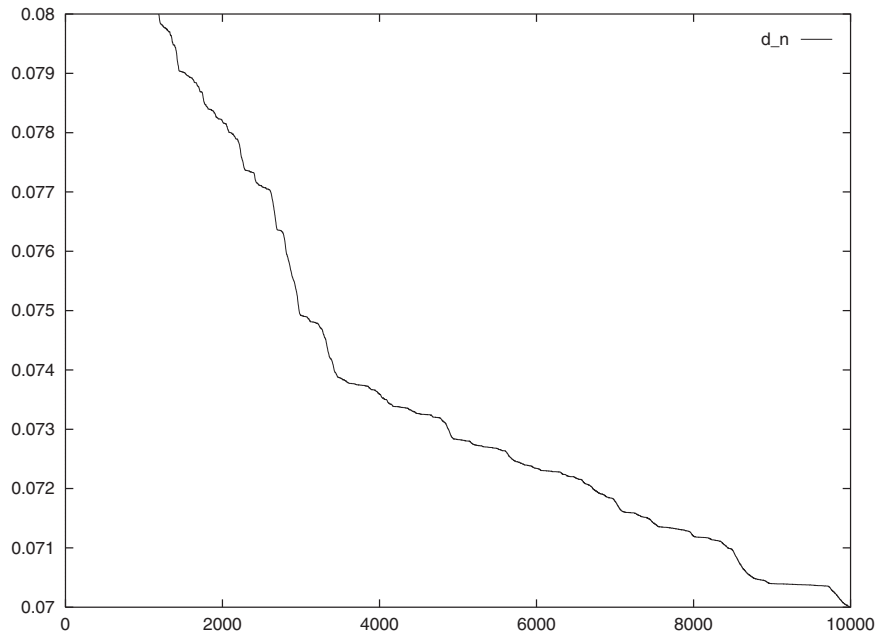


FIGURE 2. La distance d_n de 1 à 10 000, fenêtre $[0, 07; 0, 08]$.

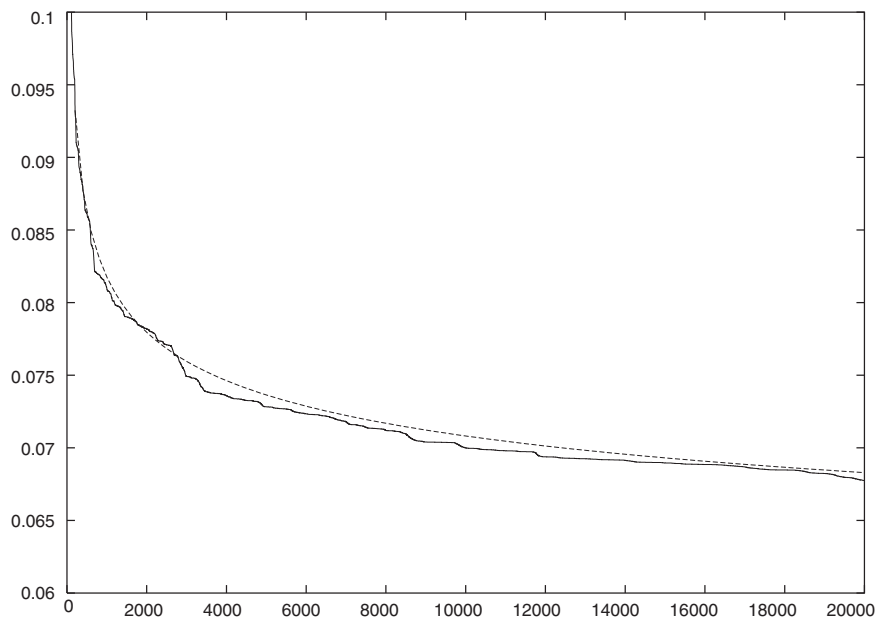


FIGURE 3. La distance d_n de 1 à 20 000 et $\sqrt{2 + \gamma - \log 4\pi} / \sqrt{\log n}$.

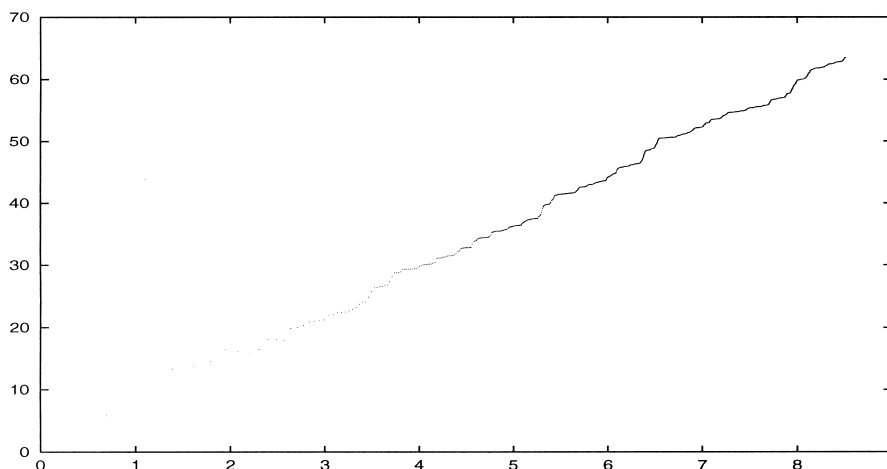
Nous nous sommes intéressés principalement aux coordonnées de p_n dans la base des $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$. On écrit pour cela

$$p_n = a_{n,1}e_1 + a_{n,2}e_2 + \cdots + a_{n,n}e_n.$$

On s'intéresse ici au comportement des $a_{n,k}$. On s'aperçoit rapidement sur les premières valeurs, Table 1, que les $a_{n,k}$, pour k fixé, convergent expérimentalement

vers $-\mu(k)$ lorsque n tend vers l'infini. Cela ne surprend pas: d'une part, comme nous l'avons déjà mentionné, la suite de fonctions $u_n := -\sum_{k=1}^n \mu(k)e_k$ converge simplement vers χ sur $]0, +\infty[$, d'autre part il résulte des travaux exposés en [Báez-Duarte 01] que l'hypothèse de Riemann implique cette propriété de convergence de $a_{n,k}$ vers $-\mu(k)$. Malheureusement la suite de fonctions (u_n) ne converge pas vers χ dans \mathcal{H} [Báez-Duarte 01].

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,335									
2	-0,829	1,900								
3	-0,977	1,138	1,349							
4	-0,925	0,856	1,049	0,700						
5	-0,927	0,859	0,863	0,296	0,751					
6	-0,931	0,863	0,880	0,302	0,777	-0,060				
7	-0,939	0,891	0,894	0,195	0,673	-0,399	0,614			
8	-0,938	0,894	0,897	0,172	0,671	-0,410	0,575	0,081		
9	-0,937	0,896	0,888	0,179	0,660	-0,416	0,567	0,030	0,086	
10	-0,939	0,901	0,881	0,170	0,695	-0,416	0,573	0,047	0,152	-0,126
11	-0,945	0,918	0,890	0,145	0,734	-0,487	0,545	0,029	0,106	-0,416
12	-0,945	0,918	0,890	0,144	0,735	-0,490	0,546	0,029	0,106	-0,418
13	-0,944	0,916	0,891	0,155	0,724	-0,466	0,510	0,026	0,090	-0,422
14	-0,950	0,926	0,890	0,138	0,735	-0,517	0,615	0,019	0,102	-0,421
15	-0,950	0,924	0,895	0,130	0,749	-0,519	0,599	0,042	0,100	-0,416
16	-0,951	0,925	0,900	0,128	0,759	-0,528	0,629	-0,025	0,106	-0,414
17	-0,952	0,927	0,908	0,125	0,768	-0,546	0,625	0,015	0,055	-0,422
18	-0,952	0,927	0,909	0,125	0,770	-0,551	0,626	0,021	0,043	-0,422
19	-0,953	0,929	0,907	0,122	0,773	-0,543	0,619	0,019	0,068	-0,454
20	-0,953	0,925	0,909	0,130	0,768	-0,554	0,630	0,019	0,026	-0,381

TABLE 1. Les coefficients $a_{n,k}$ pour $1 \leq n \leq 20$ et $1 \leq k \leq 10$ FIGURE 4. Les coefficients $b_{n,1}^{-1}$ en fonction de $\log n$ de 1 à 5000.

On peut penser pour $a_{n,k}$ à une expression de la forme $-\mu(k)(1 - \frac{\log k}{\log n})$. En effet A. Selberg utilise dans [Selberg 46] une approximation de $1/\zeta(s)$ sur la droite critique par des polynômes de Dirichlet de la forme $\sum_{k=1}^n \mu(k)(1 - \frac{\log k}{\log n}) \frac{1}{k^s}$, ce qui incite à tenter d'approximer χ par la suite de fonctions

$$-\sum_{k=1}^n \mu(k) \left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) e_k.$$

Ceci nous amène à étudier, à k fixé, plus précisément les quantités $b_{n,k} := |a_{n,k} + \mu(k)|$.

Prenons pour commencer $k = 1$, le tracé de $b_{n,1}^{-1}$ en fonction de $\log n$, Figure 4, met en évidence, hormis quelques valeurs initiales très particulières, la quasi-linéarité en $\log n$. Cependant, il est clair que la formule $\frac{1}{\log k}$ pour la pente ne convient pas pour cette valeur particulière de k .

Un calcul de la meilleure constante c , au sens des moindres carrés, telle que $b_{n,1} = c/\log n$ donne la valeur $c_1 \approx 0,133$. On observe ce même comportement comme le montre la Figure 5 pour $k = 2, 3, 4, 5$ et $k \geq 6$ à condition que k soit sans facteur carré.

En revanche, pour les k plus grands que 4 et ayant un facteur carré, par exemple pour $k = 8$, Figure 6, on obtient pour $a_{n,8}$ un graphe qui tend vers zéro en oscillant de façon irrégulière.

On pense naturellement à calculer pour chaque k sans facteur carré la meilleure constante c_k telle que $b_{n,k} = \frac{c_k}{\log n}$. Pour cela on minimise par exemple la quantité

$$\sum_{n=1}^N (b_{n,k}^{-1} - c \log n)^2.$$

Les résultats sont donnés Table 2 pour $1 \leq k \leq 19$, $\mu(k) \neq 0$ et $N = 5000$.

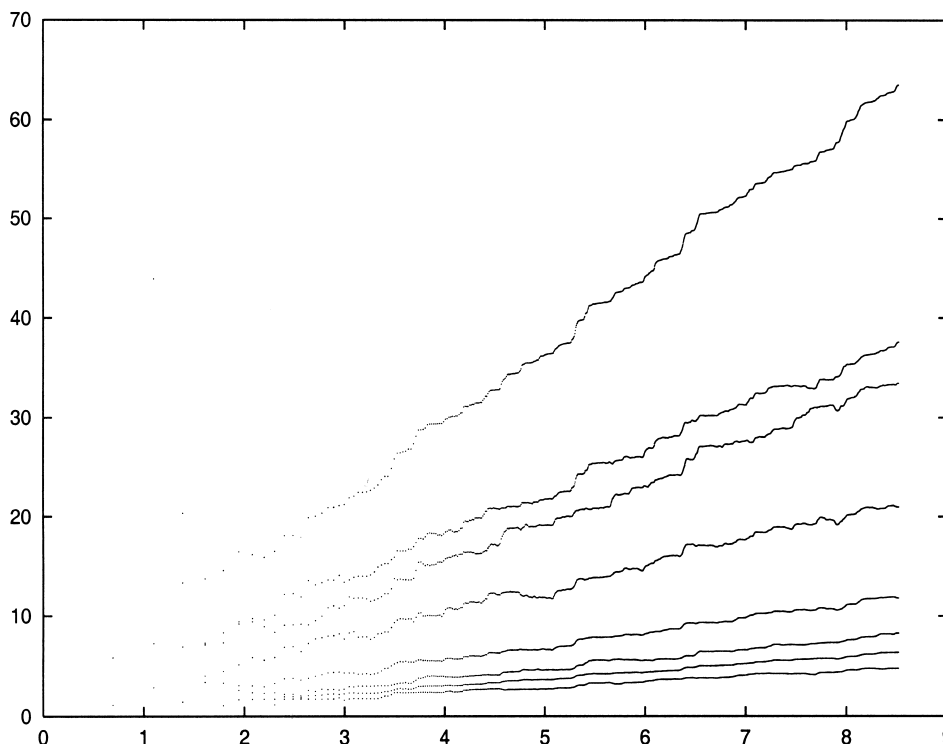


FIGURE 5. Les coefficients $b_{n,k}^{-1}$ en fonction de $\log n$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ et $1 \leq n \leq 5000$.

L'étude de la dépendance de ces constantes en fonction de $\log k$, Figure 7, met en évidence une proportionnalité avec $\log k$ mais avec une sérieuse dispersion pour les grandes valeurs de k .

On peut aussi d'un autre côté, pour apprécier le rôle des différentes fonctions e_k , considérer à n fixé, la suite des entiers k ordonnés suivant l'ordre décroissant des $|a_{n,k}|$. On obtient par exemple pour $n = 100$ le classement suivant.

1 2 3 5 7 6 11 13 10 17 15 14 19 23 21 33 22 29 31 37 26
 47 39 65 41 35 74 43 53 59 46 55 34 51 77 38 57 30 67 97
 61 42 70 87 66 58 71 73 79 78 62 82 89 69 91 85 94 93 95
 83 86 92 90 68 84 44 36 12 81 4 28 88 54 18 40 99 56 80
 100 52 63 72 60 9 48 98 49 45 25 50 16 27 32 75 24 20 96
 64 76 8.

La structure multiplicative des entiers y apparaît clairement sans pour autant qu'il se dégage une règle simple d'ordonnement.

k	1	2	3	5	6	7	10
c_k	0,133	0,233	0,253	0,711	1,337	1,048	1,748
k	11	13	14	15	17	19	
c_k	1,487	1,641	2,092	1,881	1,960	2,021	

TABLE 2. Les constantes c_k pour $1 \leq k \leq 19$, $\mu(k) \neq 0$, calculées pour $N = 5000$.

Pour conclure cette section, disons que l'expression $-\mu(k)(1 - \frac{\log k}{\log n})$ pour le coefficient $a_{n,k}$ est effectivement une formule qui colle grossièrement au comportement asymptotique de $a_{n,k}$ quand n et k tendent vers l'infini, elle n'en reste pas moins approximative et nécessiterait une nette amélioration. On verra un peu plus loin ce que donne l'étude directe de la suite de vecteurs définis par cette expression.

5. CALCULS DE LA DISTANCE DE χ À CERTAINES SUITES

Une autre approche consiste à étudier des suites candidates pour converger dans \mathcal{H} vers χ . On considère tout d'abord la suite naturelle de vecteurs

$$u_n = - \sum_{k=1}^n \mu(k)e_k.$$

On observe sur la Figure 8 que, ainsi qu'il a été mentionné plus haut, la suite u_n ne converge pas vers χ dans \mathcal{H} , cependant la distance $d(\chi, u_n)$ semble rester bornée. On notera de plus une corrélation certaine et finalement assez naturelle entre les variations de $d(\chi, u_n)$ et les variations de la fonction sommatoire M de la fonction de Mœbius, cela apparaît clairement en comparant le graphe

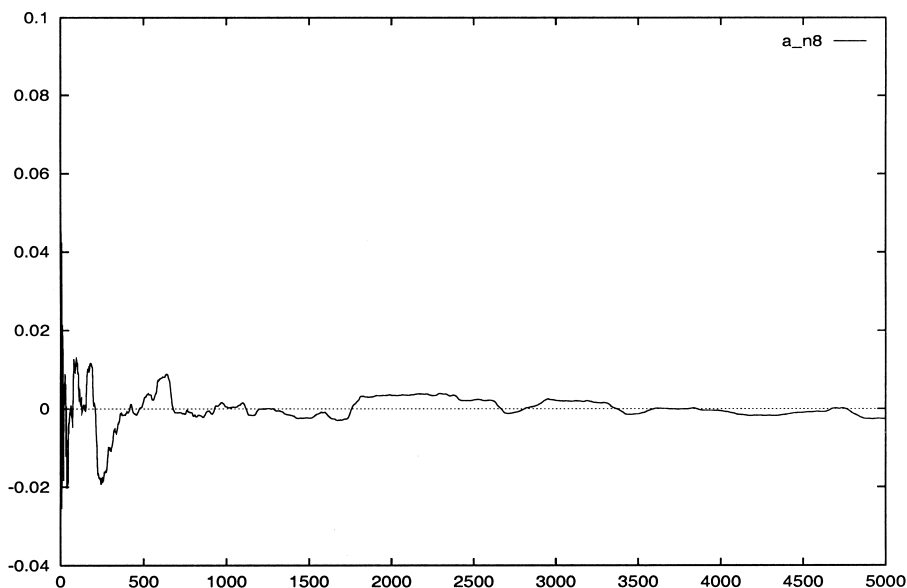


FIGURE 6. Les coefficients $a_{n,8}$ en fonction de n , $8 \leq n \leq 5000$.

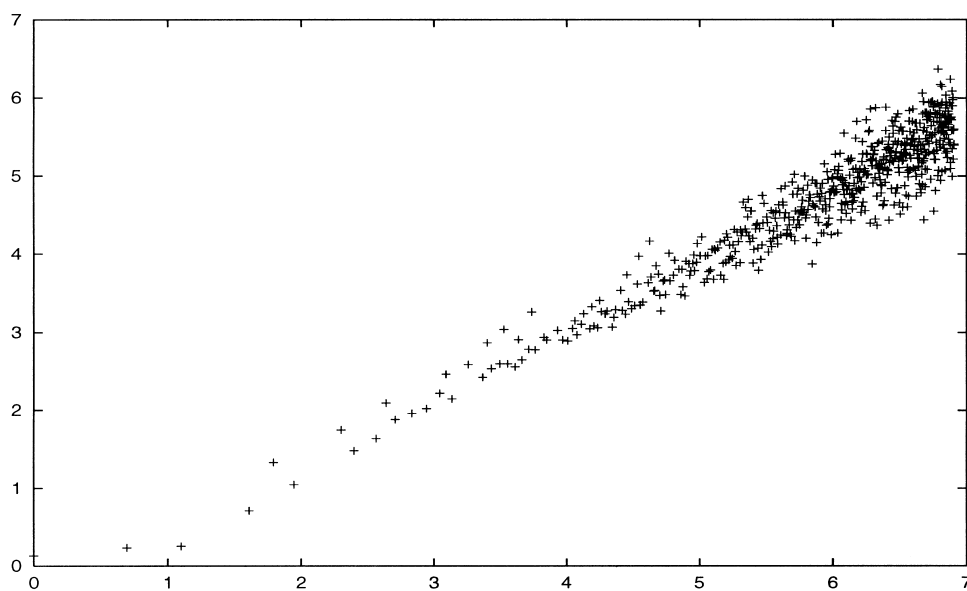


FIGURE 7. Les constantes c_k en fonction de $\log k$ pour $1 \leq k \leq 1000$, $\mu(k) \neq 0$, calculées pour $N = 5000$.

de $d(\chi, u_n)$ avec celui de $x \mapsto |M(x)|/\sqrt{x}$. On considère alors la suite de vecteurs

$$v_n = - \sum_{k=1}^n \mu(k) \left(1 - \frac{\log k}{\log n} \right) e_k,$$

ce qui semble être un bon candidat compte-tenu de l'étude de la projection orthogonale de χ sur V_n réalisée à la section précédente.

Le graphe de la distance $d(\chi, v_n)$ comparé à celui de d_n est le suivant, Figure 9.

On constate maintenant une décroissance générale vers zéro mais disons à "bonne" distance de d_n . On peut encore approcher un peu plus près le graphe de d_n . Après diverses expérimentations, il apparaît que la suite définie par

$$w_n = -e_1 - \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \sum_{k=2}^n \mu(k) \left(1 - \frac{\log k}{\log n} \right) e_k.$$

réalise une bonne performance. Le graphe de la distance $d(\chi, w_n)$ comparé à celui de d_n et $d(\chi, v_n)$ est donné Figure 10.

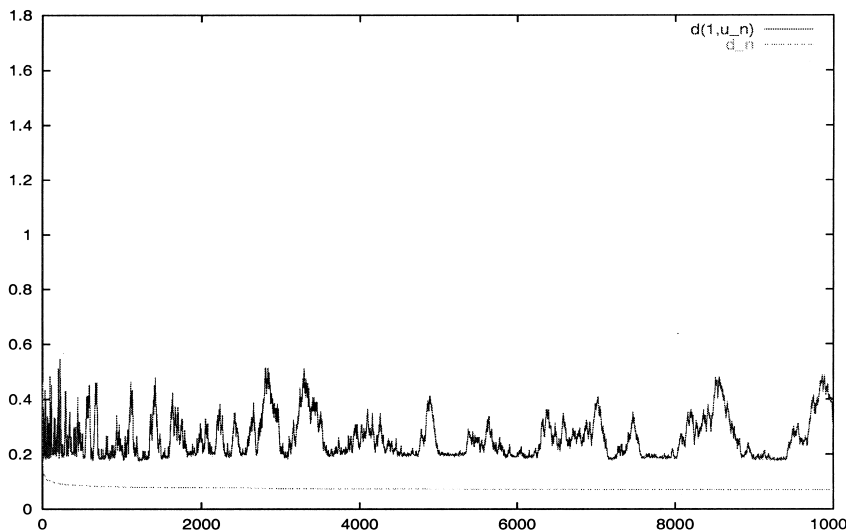


FIGURE 8. Distances d_n et $d(\chi, u_n)$, $1 \leq n \leq 10\,000$.

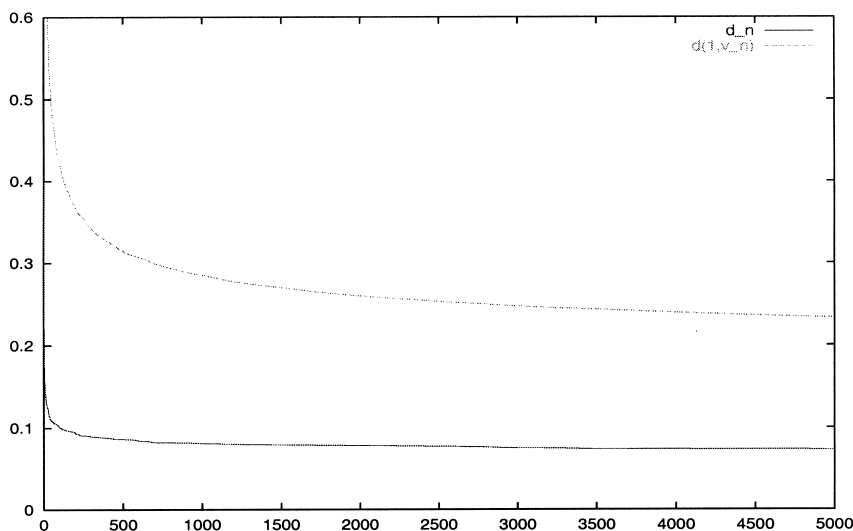


FIGURE 9. Comparaison de d_n et $d(\chi, v_n)$ pour $n \leq 5\,000$.

Le graphe est maintenant nettement plus proche de celui de d_n . Malgré diverses tentatives nous n'avons pu trouver de suites véritablement meilleures pour approcher la fonction χ . Compte-tenu de ces résultats, on peut raisonnablement conjecturer que les suites v_n et w_n convergent vers χ dans \mathcal{H} ; il reste donc à étudier les expressions $\|\chi - v_n\|^2$ ou $\|\chi - w_n\|^2$ ce qui n'est pas aisé malgré leurs formes tout à fait explicites obtenues grâce aux formules de Vassioune déjà mentionnées.

6. RECHERCHE DES MEILLEURS θ

6.1 Introduction

Dans ce qui précède, nous nous sommes toujours jusqu'à là restreints à l'étude de l'approximation de χ par des

combinaisons linéaires de fonctions $e_k(t) = \rho(\frac{1}{kt})$. Dans cette section, nous nous proposons maintenant d'élargir cette étude au cas plus général où les paramètres θ sont quelconques dans $]0, 1]$. On considère pour cela pour $N \geq 1$ le sous-ensemble \mathcal{B}_N de \mathcal{B} des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^N c_i g_{\theta_i}(t), \quad c_i \in \mathbb{C}, \theta_i \in]0, 1], \text{ pour } 1 \leq i \leq N,$$

où $g_{\theta}(t) := \rho(\frac{\theta}{t})$.

Notre démarche va consister à trouver expérimentalement à N fixé les $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N}$ qui engendrent par combinaisons linéaires les meilleures approximations de χ . Autrement dit, en notant

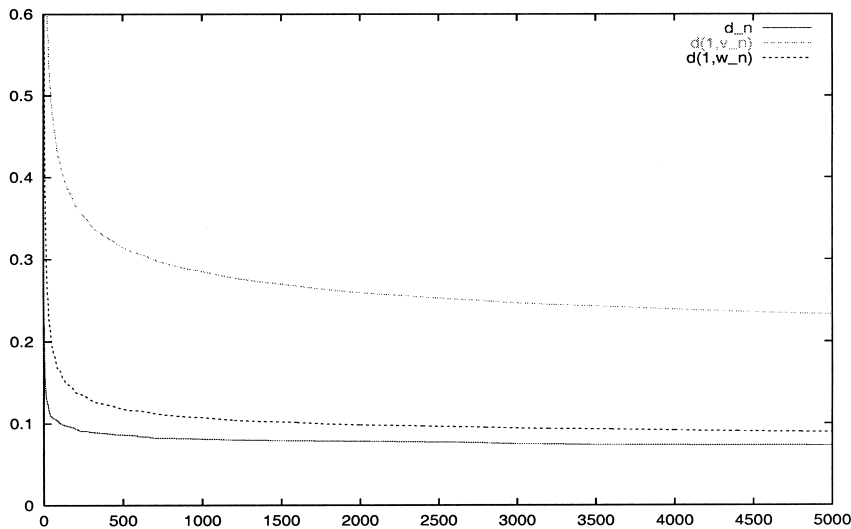


FIGURE 10. Comparaison de d_n , $d(\chi, v_n)$ et $d(\chi, w_n)$ pour $n \leq 5000$.

$V(\theta_1, \dots, \theta_N) = \text{Vect}(g_{\theta_1}, \dots, g_{\theta_N})$, nous recherchons les $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N}$ rendant minimale la distance $d(\chi, V(\theta_1, \dots, \theta_N))$. Signalons de suite que \mathcal{B}_N n'étant pas un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} , l'existence d'un N -uplet $(\theta_1, \dots, \theta_N)$ tel que $d(\chi, \mathcal{B}_N) = d(\chi, V(\theta_1, \dots, \theta_N))$ n'est pas assurée.

Notons que par un résultat classique de géométrie euclidienne on a

$$d(\chi, V(\theta_1, \dots, \theta_N)) = \frac{\det \text{Gram}(g_{\theta_1}, \dots, g_{\theta_N}, \chi)}{\det \text{Gram}(g_{\theta_1}, \dots, g_{\theta_N})},$$

où $\text{Gram}(v_1, \dots, v_n)$ désigne la matrice de Gram des vecteurs v_i .

6.2 Cas d'un seul θ

Dans le cas particulier où $N = 1$, on obtient aisément le résultat suivant.

Théorème 6.1. *La distance de χ à la droite engendrée par g_θ est minimale pour $\theta = \theta_0 := e^{-1-\gamma} \approx 0,207$ et on a alors*

$$d(\chi, \mathbb{C}g_{\theta_0}) = d(\chi, \mathcal{B}_1) = \sqrt{1 - \frac{4e^{-1-\gamma}}{\log 2\pi - \gamma}} \approx 0,587.$$

La démonstration se fait simplement en étudiant les variations de la fonction

$$\theta \mapsto \frac{\det \text{Gram}(g_\theta, \chi)}{\det \text{Gram}(g_\theta)} = \frac{\langle g_\theta, g_\theta \rangle - \langle \chi, g_\theta \rangle^2}{\langle g_\theta, g_\theta \rangle}$$

dont on obtient une expression explicite à l'aide de la proposition de la section 2.

6.3 Cas $N = 2$

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'existence puis à la détermination expérimentale d'un couple (θ_1, θ_2) minimisant la fonctionnelle $F_2(\theta_1, \theta_2) := d(\chi, \text{Vect}(g_{\theta_1}, g_{\theta_2}))$.

Proposition 6.2. *Il existe une fonction f de \mathcal{B}_2 telle que*

$$\|\chi - f\|_2 = \inf_{\varphi \in \mathcal{B}_2} \|\chi - \varphi\|_2.$$

Une preuve de ce résultat a été donnée indépendamment par E. Saias [Balazard et Saias 98] et V. Vassiounine dans un cadre légèrement différent, une démonstration complète tirée de celle de Saias est exposée par le second auteur en [Richard 00].

Pour trouver expérimentalement un couple $(\theta_1, \theta_2) \in]0, 1]^2$ qui minimise la fonctionnelle $F_2 : (\theta_1, \theta_2) \mapsto d(\chi, \text{Vect}(g_{\theta_1}, g_{\theta_2}))$, nous avons tout d'abord réalisé une représentation graphique de la surface définie par F_2 , Figure 11. Nous avons utilisé pour cela le logiciel Matlab; la fonction F_2 est évaluée en calculant les déterminants des matrices de Gram correspondantes. Le maillage choisi est décimal avec un pas de 0,01. L'étoile sur la figure signale le point minimum observé sur le maillage choisi, en l'occurrence au point $(1, \frac{1}{3})$.

On observe clairement une suite de minima locaux qui se répartissent sur un faisceau de droites d'équations $\theta_2 = \frac{1}{n}\theta_1$, $n \geq 1$.

On observe également sur les bords de la surface par un effet de continuité lorsque θ_1 ou θ_2 tend vers zéro le graphe de la fonction $\theta \mapsto d(\chi, \mathbb{C}g_\theta)$ étudiée à la section précédente.

Nous avons ensuite entrepris un calcul de minimisation plus poussé. On cherche précisément le minimum de la

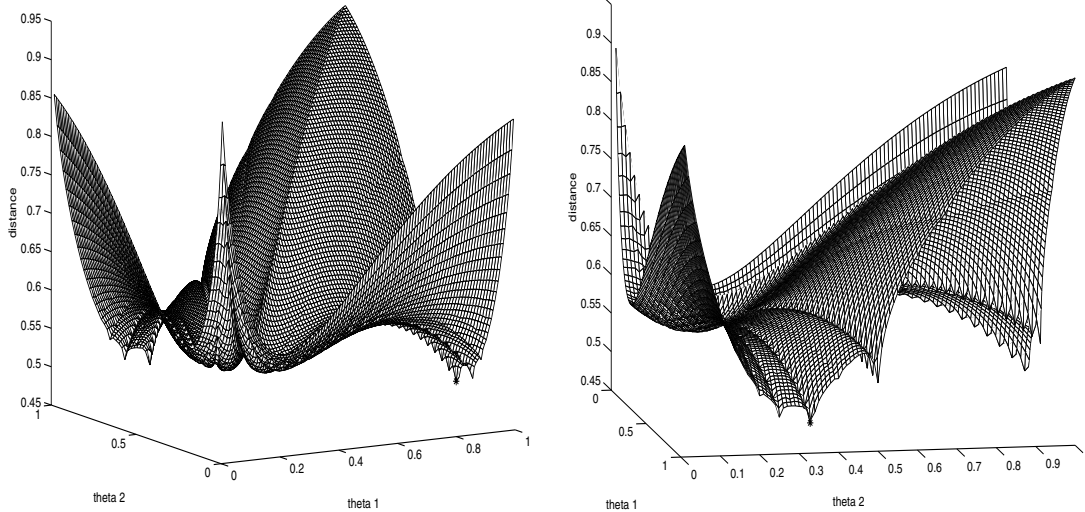


FIGURE 11. La distance de χ à $\text{Vect}(g_{\theta_1}, g_{\theta_2})$ (vue de l'origine, de côté).

fonction $F_2(\theta_1, \theta_2)$ sur l'ensemble $D_Q = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid \theta_1 = \frac{p_1}{q_1}, \theta_2 = \frac{p_2}{q_2}, 1 \leq p_i \leq q_i \leq Q, i = 1, 2\}$ où $Q \geq 1$ est fixé. Les distances sont calculées cette fois par la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (le calcul des déterminants de Gram est en effet bien trop coûteux) de façon similaire aux calculs conduits pour la distance d_n dans la troisième section.

On trouve alors, en effectuant les calculs jusqu'à une borne $Q = 200$, comme valeurs réalisant le minimum de F_2 en permanence le couple $(1, \frac{1}{3})$ ce qui corrobore le résultat lu sur le graphe un peu plus haut et donne une distance minimale $F_2(1, \frac{1}{3}) \approx 0,483$.

On peut noter que si le minimum de F_2 était atteint avec au moins l'un des θ_i irrationnel, on devrait alors observer en augmentant suffisamment la borne Q , par densité de \mathbb{Q} et par continuité de F_2 , des θ rationnels proches de la valeur idéale donnant de meilleures valeurs de la distance que le couple $(1, \frac{1}{3})$. Or il n'en est rien, du moins jusqu'à $Q = 200$.

Tout laisse donc à penser au vu de ces résultats que les meilleurs θ sont les rationnels 1 et $\frac{1}{3}$.

6.4 Cas $N > 2$

On prolonge maintenant l'étude précédente au cas de plus de deux paramètres θ . On s'emploie à déterminer le minimum de la fonction

$$F_N : (\theta_1, \dots, \theta_N) \mapsto d(\chi, \text{Vect}(g_{\theta_1}, \dots, g_{\theta_N})).$$

L'existence d'un N -uplet réalisant le minimum n'est plus assuré et ne semble pas facile à établir dans le cas général.

Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} \left\| \chi - \sum_{i=1}^N c_i g_{\theta_i} \right\|^2 &\geq \int_1^\infty \left| \sum_{i=1}^N c_i \rho \left(\frac{\theta_i}{t} \right) \right|^2 dt \\ &= \int_1^\infty \left| \sum_{i=1}^N c_i \theta_i \times \frac{1}{t} \right|^2 dt = \left| \sum_{i=1}^N c_i \theta_i \right|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, il sera intéressant de regarder la valeur de $\sum_{i=1}^N c_i \theta_i$ qui doit, si l'hypothèse de Riemann est vraie, tendre vers 0 lorsque N tend vers l'infini pour le N -uplet des meilleurs θ_i .

Dans tout ce qui suit, nous comparerons les résultats avec ceux obtenus pour $d_N = d(\chi, \text{Vect}(e_1, \dots, e_N))$.

Dans un premier temps, nous avons effectué, compte-tenu des approximations de χ étudiées précédemment, une recherche des meilleurs θ parmi les inverses d'entiers. Nous avons ensuite élargi notre recherche à tous les θ rationnels. Dans les deux cas, la recherche est menée parmi les rationnels de dénominateur borné.

6.4.1 Minimisation sur les inverses d'entiers. Nous recherchons ici à N fixé les $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N}$ qui minimisent F_N avec $\theta_i = \frac{1}{q_i}, 1 \leq q_i \leq Q, 1 \leq i \leq N$.

Voici, Table 3, les résultats obtenus. Il est évident que lorsque N augmente, pour des raisons de temps de calcul, nous sommes malheureusement obligés de réduire sérieusement la borne Q , ce qui limite la portée des résultats.

A priori, l'étude de la section 4 nous laisse penser que l'on va retrouver en premier les inverses de nombres premiers entre lesquels vont s'intercaler les inverses de nom-

N	Q	$\theta_i, i = 1 \dots N$	distance	d_N	$\sum_{i=1}^N c_i \theta_i$
2	500	$1, \frac{1}{3}$	0,4825	0,5385	0,09106
3	500	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	0,3063	0,3063	0,04161
4	100	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$	0,1999	0,2552	0,01624
5	50	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$	0,1725	0,1900	0,01057
6	50	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$	0,1609	0,1897	0,00977
7	50	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$	0,1537	0,1559	0,00828
8	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$	0,1475	0,1554	0,00788
9	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$	0,1438	0,1550	0,00730
10	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}$	0,1399	0,1542	0,00709
11	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}$	0,1362	0,1430	0,00654
12	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}$	0,1334	0,1430	0,00612
13	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}$	0,1310	0,1408	0,00594
14	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{21}$	0,1310	0,1360	0,00589
15	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}$	0,1270	0,1354	0,00559

TABLE 3. Meilleurs θ_i inverses d'entiers, $2 \leq N \leq 15$.

bres composés sans facteur carré. C'est effectivement le cas mais l'on note tout de même quelques particularités. Il y a la curieuse inversion d'ordre pour $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ au départ. Le rationnel $\frac{1}{4}$ apparaît pour $N = 9$. Un fait marquant est que la suite des ensembles $(\{\theta_1, \dots, \theta_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite croissante pour l'inclusion. par exemple, $\frac{1}{4}$ apparaît pour $N = 9$, disparaît pour $N = 10$ puis réapparaît pour $N = 12$. On notera que l'expression $\sum_{i=1}^N c_i \theta_i$ semble tendre vers zéro en décroissant.

6.4.2 Minimisation sur les rationnels. Nous cherchons maintenant à déterminer à N fixé les $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N}$ qui minimisent $F_N(\theta_1, \dots, \theta_N)$, où les θ_i sont rationnels de la forme $\theta_i = \frac{p_i}{q_i}$, $1 \leq p_i \leq q_i \leq Q$, $1 \leq i \leq N$.

Encore une fois, et plus que dans la recherche précédente, pour des raisons évidentes de temps, les bornes des dénominateurs sont relativement petites ce qui limite considérablement la zone d'investigation.

Voici cependant, Table 4, les résultats obtenus.

La question importante, objet de cette seconde recherche, est de savoir si des rationnels autres que les inverses d'entiers peuvent jouer un rôle important dans l'approximation de χ . La réponse est positive puisque l'on note avec attention l'apparition des rationnels $\frac{3}{11}, \frac{5}{13}, \frac{5}{11} \dots$. On note également que certaines valeurs de θ apparaissent puis disparaissent (par exemple $\frac{5}{13}$) de sorte que la suite des ensembles $(\{\theta_1, \dots, \theta_k\})_{k \in \mathbb{N}}$ n'est toujours pas une suite croissante pour l'inclusion. Les inverses d'entiers ayant un facteur carré n'apparaissent pas, du moins pour $N \leq 10$.

Il apparaît alors intéressant et complémentaire d'étudier numériquement la distance δ_n définie par $\delta_n =$

$d(\chi, W_n)$ où $W_n = \text{Vect}(g_{p/q}, 1 \leq p \leq q \leq n)$ et de la comparer à d_n . Notons que l'on a immédiatement compte-tenu des différentes définitions

$$D(1/n) \leq \delta_n \leq d_n.$$

Le calcul de cette distance, mené comme celui de d_n , ne peut malheureusement être fait que pour des entiers n relativement petits; en effet les rationnels θ considérés constituent la suite de Farey de rang n dont le cardinal croît de façon quadratique en n .

Signalons simplement que l'on observe jusqu'à $n \leq 200$ (soit plus de 12 000 rationnels) un comportement similaire à celui de d_n mais avec toutefois des valeurs de δ_n bien inférieures à celles de d_n . Cela vient confirmer les calculs précédents qui ont mis en lumière le rôle non négligeable des θ de la forme p/q avec $p > 1$.

Disons pour conclure cette section que le comportement des meilleurs θ reste, malgré une stabilité relative évidente des suites obtenues, pour l'instant encore assez mystérieux. Il est difficile de dégager une conjecture claire pour la suite de ces meilleurs θ et, en particulier, en dépit de l'apparition des rationnels comme par exemple $\frac{3}{11}$ ou $\frac{5}{13}$, il est tout à fait possible qu'asymptotiquement les θ de la forme $\frac{1}{k}$ soient les meilleurs possibles.

ADDENDUM

Depuis la date de soumission de ce travail, un nouveau résultat important a été établi par L. Báez-Duarte [Báez-Duarte 02]. Si l'on note \mathcal{B}^{nat} le sous-espace de \mathcal{B} engendré par les fonctions $t \mapsto \rho(\frac{1}{nt})$, $n \geq 1$, alors l'hypothèse de

N	Q	$\theta_i, i = 1 \dots N$	distance	d_N	$\sum_{i=1}^N c_i \theta_i$
3	40	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	0,3063	0,3063	0,04161
4	40	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$	0,1999	0,2552	0,01624
5	25	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$	0,1725	0,1900	0,01057
6	18	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$	0,1607	0,1897	0,01238
7	15	$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$	0,1506	0,1559	0,01687
8	15	$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$	0,1436	0,1554	0,01673
9	13	$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{1}{3}, \frac{3}{13}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$	0,1374	0,1550	0,01543
10	13	$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{1}{3}, \frac{3}{13}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$	0,1330	0,1542	0,01494

TABLE 4. Meilleurs θ_i rationnels, $3 \leq N \leq 10$.

Riemann équivaut au fait que $d(\chi, \mathcal{B}^{nat}) = 0$ i.e $\chi \in \overline{\mathcal{B}^{nat}}$ ou encore que la suite d_n étudiée dans la section 3 tende vers 0 à l'infini. Cela vient prouver le fait qu'il suffit, pour approcher la fonction χ , de considérer les combinaisons linéaires de fonctions g_θ où les θ sont rationnels et de la forme $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier spécialement Luis Báez-Duarte, Michel Balazard et Eric Saias pour toutes les discussions fructueuses et les encouragements qui ont conduit à ce travail.

Les auteurs remercient également les referees qui, par leurs remarques et leurs suggestions, ont permis d'améliorer la qualité de l'article.

RÉFÉRENCES

- [Báez-Duarte 01] L. Báez-Duarte. "Arithmetical Aspects of Beurling's Real Variable Reformulation of the Riemann Hypothesis." Document de travail, communication privée.
- [Báez-Duarte 02] L. Báez-Duarte. "A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann Hypothesis." *arXivmath.NT/0205003*, à paraître dans *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Mat. Appl.*
- [Báez-Duarte et al. 00] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias. "Notes sur la fonction ζ de Riemann, 3." *Advances in Math.* **149** (2000), 130–144.
- [Balazard et Saias 98] M. Balazard et E. Saias. Notes manuscrites, (1998).
- [Beurling 55] A. Beurling. "A closure problem related to the Riemann Zeta-function." *Proc. Nat. Acad. Sci.* **41** (1955), 312–314.
- [Burnol 01] J.-F. Burnol. "A lower bound in an approximation problem involving the zeros of the Riemann zeta function." *Advances in Math.* **170** (2002), 56–70.
- [Nyman 50] B. Nyman. *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces*, Thèse, Uppsala, 1950.
- [Richard 00] F. Richard. *L'hypothèse de Riemann selon Beurling et Nyman*, mémoire de DEA, Université Bordeaux I, 2000.
- [Rosser 39, p. 29] B. Rosser. "The n th prime is greater than $n \log(n)$." *Proc. London Math. Soc. (2)* **45** (1939), 21–44.
- [Selberg 46] A. Selberg. "The zeta-function and the Riemann hypothesis." in C. R. Dixième congrès Math. Scandinaves, Copenhagen, (1946), 187–200.
- [Titchmarsh 86] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*, (revised by D.R.Heath-Brown), Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [Vassioune 96] Vasyunin V. I., "On a biorthogonal system related with the Riemann hypothesis." *St. Petersburg Math. J.* **7**: 3 (1996), 405–419.

Bernard Landreau, Laboratoire d'algorithmique arithmétique et de théorie des nombres de Bordeaux, UMR CNRS 5465, Université Bordeaux I, 351, crs de la libération, 33 405 Talence Cedex, France (landreau@math.u-bordeaux.fr)

Florent Richard, Laboratoire d'algorithmique arithmétique et de théorie des nombres de Bordeaux, UMR CNRS 5465, Université Bordeaux I, 351, crs de la libération, 33 405 Talence Cedex, France (richard.flo@free.fr)

Received July 18, 2001; accepted in revised form May 1, 2002.