General Mathematics Vol. 13, No. 4 (2005), 47–50

L'estimation de la Volatilité d'un Modéle Mathématique Appliqué en Économie par le Mouvement Brownien Fractionnaire

Fabian Todor

Dédie to Prof. Dr. Dumitru Acu a l'occasion de 60éme anniversaire

Résumé

Dans un travail tel que [3], nous avons estimé la variance équivalente à la volatilité, par des polynômes orthogonaux d'Hermite construites sur un processus gaussien AR(1). Si on considère le mouvement brownien fractionnaire tel que dans [1], associé au même modèle, on peut faire l'estimation de la variance, soit la volatilité, dans plusieurs cas choisis dans le mouvement brownien fractionnaire.

2000 Mathematics Subject Classification: 91B72.
Keywords: Stochastic models.

1

Si on considère [3], on a une équation stochastique appliquée en économie telle que:

$$dS\backslash S = \mu dt + \sigma \cdot dB; \tag{1}$$

où $S(t)$ = un actif financier (stock) au temps t, exprimé en mathématique telle qu'une marche au hasard (random walk); μ = le taux de croissance (drift) de $S(t)$; $\sigma(t)$ = la volatilité ou la racine carrée de la variance; $B(t, \omega)$ = le mouvement brownien ordinaire c.-à.-d. une fonction aléatoire avec des croissances indépendantes $B(t_2, \omega) - B(t_1, \omega)$ de moyenne zéro et de variance $t_2 - t_1$.

Nous avons estimé la variance par :

$$\sigma^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i H_i(f_i) \tag{2}$$

où H_i = le polynôme d'Hermite de degré i; tandis que f_i = un processus gaussien AR(1). On sait, bien sûr, que les systèmes des polynômes d'Hermite sont associés à la loi normale et que les valeurs numériques selon la formule (2) peuvent être obtenues si on fait une troncature dans cette formule et qu'on estime ensuite le processus f_i, $AR(1)$ par des observations en fonction de temps.

2

Si on considère une période $t \in [0, T]$ longue et un compte de banque ou des obligations $A(t)$, voir [2], pour le temps final $T > 0$, on a les relations suivantes:

$$dA(t) = r_t A(t)dt; A(0) = 1; \text{ et } A(t) = \exp \int_0^t r_s ds \tag{3}$$

où $r_t > 0$ est un processus stochastique satisfaisant

$$E(\int_0^T |r_t|dt) < \infty; \tag{4}$$

d'après (1) on a : $\sigma(t) = f(t, Y(t))$ une fonction continue d'un processus stochastique $Y(t)$ satisfaisant l'équation:

$$dY(t) = a(t, Y(t))dt + b(t, Y)dB(t) + c(t, Y(t))dB_H(t); \tag{5}$$

où $B_H(t)$ est le mouvement brownien fractionnaire défini par les relations suivantes (voir [1]):

$$B_H(t) - B_H(0) = \tag{6}$$

$$= 1/\Gamma(H{+}1/2)\left\{\int_{-\infty}^{0}[(t-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}].dB(s)+\int_{0}^{t}(t-s)^{H-1/2}dB(s)\right\}$$

pour $H = 1/2$ on a $B(t) = B_{1/2}(t)$; les autres valeurs de H sont $0 < H < 1/2$ et $1/2 < H < 1$.

La quantité $c(t, Y(t))$ est le taux de la consommation satisfaisant la relation :

(7) $$\int_{0}^{T} c(t)dt < \infty$$

Un portefeuille, est un processus avec deux dimensions

(8) $$p_t = (\alpha_t, \beta_t)$$

où $0 \le t \le T$ et la richesse à l'instant t s'exprime par

(9) $$z_t^p = \alpha_t A(t) + \beta_t S(t).$$

Un tel portefeuille sera avec auto - financement concernant la consommation si on a:

$$dz_t^p = \alpha_t dA(t) + \beta_t dS(t) - c_t dt$$

pour $0 \le t \le T$. Si on note par: $\varepsilon_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$ alors le portefeuille sera admissible quand on a:

(10) $$E\left(\int_{0}^{T}|\beta_t\sigma(t)\cdot S(t)\varepsilon_t|^2dt\right) < \infty.$$

3

Il est important que la variance de $B(t)$ sur l'intervalle de dimension T sera: $V^2 = E\{B(t+T) - B(t)\}^2 = T$, la volatilité $V = T^{1/2}$; d'après la définition de $B_H(t)$ dans (6), on a

(11) $$(V_H)^2 = E\{B_H(t+T) - B_H(t)\}^2 = T^{2H}C_H;$$

où la quantité C_H sera donnée par :

$$C_H = [\Gamma(H+1/2)]^{-2}\left\{\int_{-\infty}^{0}[(1-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}]^2 ds + 1/2H\right\} \tag{12}$$

Alors par (11) et (12) on a la volatilité V_H pour le mouvement brownien fractionnaire, quand $0 < H < 1$. On peut faire l'analyse de la volatilité V_H pour divers processus avec croissances indépendantes associés au mouvement brownien fractionnaire .

References

[1] B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness, *Fractional Brownian Motions,Fractional Noises and Applications*, SIAM RevieW, Vol.10, No.4, october 1968.

[2] Y.Hu, *Optimal Consumtion and Portfolio In a Market Where The Volatility Is Driven by Fractional Brownian Motion*, Probability,Finance and Insurance Proceedings of a Workshop at the University of Hong Kong, 2004.

[3] F.Todor, *Sur Des Polynômes Orthogonaux Associés Aux Modèles Mathématiques Appliqués en Pratique*, The 26 th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA) Proceedings, Montreal, 2001.

Montreal University
C.P. 6128, Montreal QC, H3C_3J7
E-mail:*todor@dms.umontreal.ca*