

ENSEMBLES $B_2[2]$: L'ÉTAU SE RESSERRE

Laurent Habsieger

CNRS et A2X, Université Bordeaux 1, 33405 Talence, France

`Laurent.Habsieger@math.u-bordeaux.fr`

Alain Plagne

DGA Recherche et LIX, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

`plagne@lix.polytechnique.fr`

Received: 5/16/01, Revised: 1/12/02, Accepted: 1/26/02, Published: 2/8/02

Abstract

Si l'on note $F_2(N, 2)$ le cardinal maximum d'un ensemble $B_2[2]$ inclus dans $\{1, 2, \dots, N\}$, il est bien connu que la quantité $F_2(N, 2)/\sqrt{N}$ ($N \geq 1$) reste comprise entre deux constantes strictement positives. En revanche, on ignore toujours si cette quantité admet une limite lorsque N tend vers l'infini, ce qui explique les efforts déployés pour améliorer les meilleures bornes inférieures et supérieures asymptotiques pour la quantité $F_2(N, 2)/\sqrt{N}$. Dans cet article, on obtient l'encadrement (asymptotique) $4/\sqrt{7} \lesssim F_2(N, 2)/\sqrt{N} < 2,3218\dots$

Let $F_2(N, 2)$ denote the maximal cardinality of any $B_2[2]$ set included in $\{1, 2, \dots, N\}$. It is a well known fact that the ratio $F_2(N, 2)/\sqrt{N}$ ($N \geq 1$) is bounded from below and from above by two positive constants. However, one still ignores whether this quantity has a limit as N tends toward infinity. This explains the huge amount of work that was produced in order to improve the best lower and upper asymptotic bounds for $F_2(N, 2)/\sqrt{N}$. In this paper, we obtain the following asymptotic bounds $4/\sqrt{7} \lesssim F_2(N, 2)/\sqrt{N} < 2,3218\dots$

1. Introduction

L'étude des ensembles $B_2[2]$ constitue la deuxième étape dans celle, plus vaste, de la large classe des ensembles $B_h[g]$. Rappelons qu'un ensemble d'entiers \mathcal{A} est un ensemble $B_h[g]$ si pour tout entier n , on dispose de la majoration suivante,

$$\left| \{(a_1, \dots, a_h) \in \mathcal{A}^h : a_1 + \dots + a_h = n, a_1 \leq \dots \leq a_h\} \right| \leq g.$$

On notera $F_h(N, g)$ le nombre maximum d'éléments dans l'intersection d'un tel ensemble et de $\{1, \dots, N\}$. C'est cette quantité, et singulièrement son comportement asymptotique, qui suscite la majorité des travaux publiés sur le sujet. Il faut dire que la structure

de ces ensembles paraît si complexe qu'à part dans quelques cas particuliers [4, 11], on ne sait pour le moment rien en dire. Le lecteur est renvoyé à l'article de synthèse [13] pour un panorama complet sur l'étude des fonctions $F_h(N, g)$.

Les plus simples spécimens non triviaux ($h > 1$) de cette famille sont les célèbres ensembles de Sidon qui correspondent aux paramètres $h = 2, g = 1$. De façon équivalente, ils sont définis par l'absence de solution à l'équation

$$a + b = c + d, \quad a, b, c, d \in \mathcal{A}, \quad \{a, b\} \neq \{c, d\}.$$

Il est connu, depuis les travaux de Singer [14], Bose et Chowla [1] et Erdős et Turán [5] qu'en ce qui concerne les ensembles de Sidon, on a $F_2(N, 1) \sim \sqrt{N}$.

En revanche, pour toute valeur de g strictement supérieure à 1 (ou de h strictement supérieure à 2), s'il est bien connu [8] que $F_h(N, g) \asymp N^{1/h}$, on ne sait même pas si la quantité $F_h(N, g)N^{-1/h}$ admet une limite lorsque N tend vers l'infini.

C'est en particulier le cas pour la quantité $F_2(N, 2)$ pour laquelle on ne dispose que de majorations et de minoration asymptotiques. À l'heure actuelle, les meilleurs résultats disponibles sont les suivants :

$$\frac{3}{2}\sqrt{N} \lesssim F_2(N, 2) < 2,363584\sqrt{N}. \tag{1}$$

Rappelons que pour deux suites (u_n) et (v_n) , la notation $v_n \gtrsim u_n$ équivaut à $v_n/u_n \geq 1 + o(1)$. Dans la formule (1), la borne inférieure résulte des efforts de Cilleruelo, Ruzsa et Trujillo [3]. Si l'on excepte la remarque de Kolountzakis [10] fournissant la valeur $\sqrt{2}$, c'est l'unique amélioration de la minoration triviale 1 (fournie par un ensemble de Sidon). La borne supérieure, quant à elle, provient d'un récent travail du second auteur [12] dans lequel l'identité de Cauchy

$$\left(\sum_{i=1}^I x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^I y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^I x_i y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^I y_i^2\right) \sum_{i=1}^I \left(x_i - \frac{\sum_{j=1}^I x_j y_j}{\sum_{j=1}^I y_j^2} y_i\right)^2 \tag{2}$$

joue un rôle majeur. Il est d'ailleurs à noter que la méthode de [12] permet aussi d'améliorer les meilleures majorations disponibles [3] pour les ensembles $B_2[g]$, lorsque g est suffisamment petit (au moins pour $3 \leq g \leq 6$).

L'histoire des meilleures majorations disponibles s'est accélérée ces dernières années. Ainsi, le coefficient de l'inégalité de droite dans l'équation (1) a pris successivement les valeurs $\sqrt{8} = 2,8284 \dots$ (qui résulte d'arguments généraux sur les ensembles $B_h[g]$), $1,864\sqrt{2} = 2,6361 \dots$ (d'après [3]), puis $\sqrt{6} = 2,4495 \dots$ (d'après les travaux indépendants de Cilleruelo [2] et Helm [9]) et enfin, dans [12] donc, 2,363584.

Nous nous proposons ici de faire un pas supplémentaire en démontrant les améliorations suivantes.

Théorème 1 *Il existe un entier N_0 à partir duquel on a*

$$\frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{N} \lesssim F_2(N, 2) < 2,3218\dots\sqrt{N}.$$

Numériquement, $4/\sqrt{7} = 1,5119579\dots$. Notons que la minoration est obtenue par une méthode qui englobe les résultats de Kolountzakis et de Cilleruelo, Ruzsa et Trujillo évoqués précédemment. Nous montrerons d'ailleurs que cette borne est la limite de la méthode.

Il n'y a pas de conjecture standard pour l'asymptotique de $F_2(N, 2)$ mais il est raisonnable de penser que, comme dans le cas des ensembles de Sidon, il existe un réel c pour lequel

$$F_2(N, 2) \sim c\sqrt{N}.$$

Dans le but de soutenir cette hypothèse, voire d'approcher la valeur de c , il ne paraît pas dénué d'intérêt de calculer la valeur de la fonction $F_2(N, 2)$ pour les "petites" valeurs de N . Il s'agit là d'une tâche peu aisée car tous les algorithmes connus pour faire ce calcul sont gourmands en temps d'exécution. Ainsi, il paraît bien difficile d'atteindre des valeurs ne serait-ce que de l'ordre de 100. Avant d'étudier $F_2(N, 2)$ numériquement, il convient de formuler deux remarques immédiates : la première c'est que $F_2(N, 2)$ est une fonction croissante de l'entier N ; la seconde que $F_2(N + 1, 2) - F_2(N, 2)$ vaut au plus 1. Autrement dit, $F_2(N + 1, 2)$ vaut soit $F_2(N, 2)$ soit $F_2(N, 2) + 1$. On peut ainsi résumer les résultats (obtenus avec la complicité d'un programme d'O. Hermant) disponibles sous la forme du tableau suivant.

N	4 - 5	6 - 7	8 - 10	11 - 13	14 - 17	18 - 21	22 - 26	27 - 30
$F_2(N, 2)$	4	5	6	7	8	9	10	11

N	31 - 36	37 - 43	44 - 50	51 - 57	58 - 66	67 - 75	76
$F_2(N, 2)$	12	13	14	15	16	17	18

Ce tableau permet de voir que les premiers extrema "locaux" significatifs (disons ceux correspondant à $N \geq 30$) de $F_2(N, 2)/\sqrt{N}$ valent approximativement

N	30	31	36	37	43	44	50	51
$F_2(N, 2)/\sqrt{N}$	2,008	2,155	2	2,137	1,982	2,111	1,980	2,100

N	57	58	66	67	75	76
$F_2(N, 2)/\sqrt{N}$	1,987	2,101	1,969	2,077	1,963	2,065

Il en ressort que minima et maxima semblent tendre à se répartir de plus en plus symétriquement autour de 2. Une hypothèse hardie serait même la conjecture suivante.

Conjecture 1

$$F_2(N, 2) \sim 2\sqrt{N}.$$

Cela dit, aujourd’hui, on est encore bien loin d’atteindre une telle hypothèse. Naturellement, chaque pas en avant est plus difficile que le précédent. C’est pourquoi les améliorations obtenues ici, bien que modestes, restent significatives.

De plus, la majoration est principalement obtenue grâce à un ingrédient original dans ce genre de problème : la résolution d’un problème de programmation entière quadratique. D’une façon générale, la résolution de problèmes de programmation entière est excessivement compliquée et il n’existe pas à notre connaissance de “théorème général” fournissant ne serait-ce qu’une solution approchée dans un cas très régulier. En pratique, dans le domaine, on se satisfait d’algorithmes efficaces pour résoudre un problème donné. Ici, il n’est évidemment pas question d’algorithme puisque le paramètre N est destiné à tendre vers l’infini. Bref, nous sommes obligés de démontrer à la main et assez laborieusement un résultat de programmation entière dans le cas qui nous intéresse. Muni de ce nouvel outil, nous pouvons reprendre le schéma de la preuve donnée dans [12] et l’améliorer en conséquence.

Dans la dernière partie, nous nous risquons à faire de la prospective. Il semble en effet que l’on s’approche, en ce qui concerne les ensembles $B_2[2]$, de la fin d’une période qu’on pourrait qualifier de calculatoire. Nous développons aussi l’idée selon laquelle on pourrait assister bientôt à une période structurelle... sans doute beaucoup plus ardue. Mais ceci est une autre histoire qui risque de nécessiter un certain temps avant d’être contée.

Notons pour finir cette introduction qu’après la rédaction de cet article, nous avons appris que Green [7] avait obtenu indépendamment et récemment la nouvelle borne supérieure $\sqrt{21}/2 = 2,2912\dots$ qui améliore la borne supérieure de notre théorème. Sa méthode de démonstration repose sur des techniques d’analyse de Fourier absolument orthogonales à celles développées ici. Elle a l’avantage d’être plus générale et de fournir des résultats intéressants pour les ensembles $B_h[g]$ en général. L’orthogonalité évoquée ci-dessus laisse penser qu’une approche simultanée par les deux méthodes (celle à la Fourier de Green et la nôtre, combinatoire) pourrait se révéler fructueuse en permettant d’améliorer encore ce $2,2912\dots$.

Finissons cette introduction en rappelant deux notations : pour un réel x , les symboles $\{x\}$ et $\|x\|$ désignent respectivement sa partie fractionnaire et sa distance à \mathbb{Z} .

2. La minoration du théorème

La méthode de Kolountzakis [10] revient à traduire un certain ensemble. En l'occurrence, les vecteurs de cette translation sont les entiers 0 et 1. Le résultat des auteurs de [3] peut être reformulé d'une façon analogue, l'ensemble $\{0, 1\}$ étant remplacé par l'ensemble $\{0, 1, 3\}$. Nous généralisons ces deux résultats en utilisant l'ensemble $\{0, 1, 4, 6\}$ et montrons que ce choix est optimal.

Dans la suite, nous dirons que $\{c_0, \dots, c_k\}$ est un ensemble $B_2 \pmod m$ si la congruence $c_i + c_j \equiv c_{i'} + c_{j'} \pmod m$ entraîne l'égalité $\{c_i, c_j\} = \{c_{i'}, c_{j'}\}$.

Ces définitions sont justifiées par les lemmes suivants, qui proviennent respectivement de [3] et [14].

Lemme 1 *Si $\{a_0, \dots, a_k\}$ est un ensemble de Sidon et si C est un ensemble $B_2 \pmod m$, alors $\cup_{i=0}^k (C + ma_i)$ est un ensemble $B_2[2]$.*

Lemme 2 *Pour $m = p^2 + p + 1$, où p est un nombre premier, il existe un ensemble $B_2 \pmod m$ contenu dans $\{1, \dots, m\}$ et de cardinal $p + 1$.*

Ainsi, connaissant un ensemble de Sidon $\{a_0, \dots, a_k\}$, on peut construire un ensemble $B_2[2]$ de cardinal $(k + 1)(p + 1)$ contenu dans $\{1, \dots, (a_k + 1)(p^2 + p + 1)\}$. Comme la suite (p_n) des nombres premiers satisfait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1}/p_n = 1,$$

la construction précédente fournit la minoration

$$F_2(N, 2) \gtrsim \frac{k + 1}{\sqrt{a_k + 1}} \sqrt{N}.$$

Les ensembles $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 3\}$ et $\{0, 1, 4, 6\}$ sont tous des ensembles de Sidon. Ils fournissent respectivement les bornes $\sqrt{2}$ (obtenue dans [10]), $3/2$ (voir [3]) et $4/\sqrt{7}$. Ceci prouve la minoration annoncée dans le Théorème 1.

Montrons maintenant que la borne $4/\sqrt{7}$ est optimale. Si $\{a_0, \dots, a_k\}$ est un ensemble de Sidon (on suppose les a_i rangés dans l'ordre croissant), les différences $a_i - a_j$ sont deux à deux distinctes. On en déduit la minoration

$$a_k = a_0 + (a_1 - a_0) + \dots + (a_k - a_{k-1}) \geq \binom{k + 1}{2}.$$

L'inéquation $(k + 1)/\sqrt{a_k + 1} > 4/\sqrt{7}$ impose la condition $(k + 1)/\sqrt{\binom{k+1}{2} + 1} > 4/\sqrt{7}$. Cette condition n'est jamais remplie pour $k \in \mathbb{N}^*$ et la constante $4/\sqrt{7}$ est donc la meilleure possible.

3. Lemme de programmation entière

Pour des paramètres réels $c, s > 0$ et $z > 0$, on définit la fonction continue linéaire par morceaux $\phi_{c,s,z}$ par

$$\phi_{c,s,z}(x) = \begin{cases} s + \frac{z-s}{c}x & \text{si } x \leq c, \\ z & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

Nous démontrons ici un résultat théorique de programmation entière. De notre point de vue, ce n'est là qu'un lemme technique ad hoc qu'il était nécessaire d'établir puisqu'il ne semble pas exister de résultat un tant soit peu général en la matière. De possibles généralisations sont envisageables. Pour notre part, nous nous contentons du lemme suivant largement suffisant pour l'usage que nous en aurons.

Les coordonnées d'un vecteur entier X seront notées (X_1, \dots, X_N) .

Lemme 3 *Soit N un entier et α, z et s des réels strictement positifs satisfaisant aux conditions $2 + 3\alpha - 3\alpha/(s - z) < z < 3$ et $2 < s - z < 3$. Soit*

$$\mathcal{X} = \left\{ X \in \mathbb{N}^N : \sum_{i=1}^N X_i = zN \text{ et } \sum_{i=1}^N X_i^2 \leq 3zN \right\}.$$

Alors pour tout vecteur $X \in \mathcal{X}$,

$$S(X) = \sum_{i=1}^N (X_i - \phi_{[\alpha N],s,z}(i))^2 \gtrsim F(t_5, t_4, t_3)N,$$

où l'on a noté F la fonction définie par la formule

$$\begin{aligned} F(t_5, t_4, t_3) &= \int_0^{t_5} (5 - s + (s - z)t/\alpha)^2 dt + \int_{t_5}^{t_4} (4 - s + (s - z)t/\alpha)^2 dt \\ &\quad + \int_{t_4}^{\alpha} (3 - s + (s - z)t/\alpha)^2 dt + (t_3 - \alpha)(3 - z)^2 + (1 - t_3)(2 - z)^2, \end{aligned}$$

et où

$$t_3 = z - 2 - t_5 - t_4$$

et, si $z \leq 3 - 3\alpha + 5\alpha/(s - z)$,

$$\begin{aligned} t_5 &= \alpha - \frac{2\alpha}{s - z}, \\ t_4 &= \alpha - \frac{\alpha}{s - z}, \end{aligned}$$

et, si $z \geq 3 - 3\alpha + 5\alpha/(s - z)$,

$$\begin{aligned} t_5 &= \frac{6 - 2z - \alpha}{5}, \\ t_4 &= \frac{3 - z + 2\alpha}{5}. \end{aligned}$$

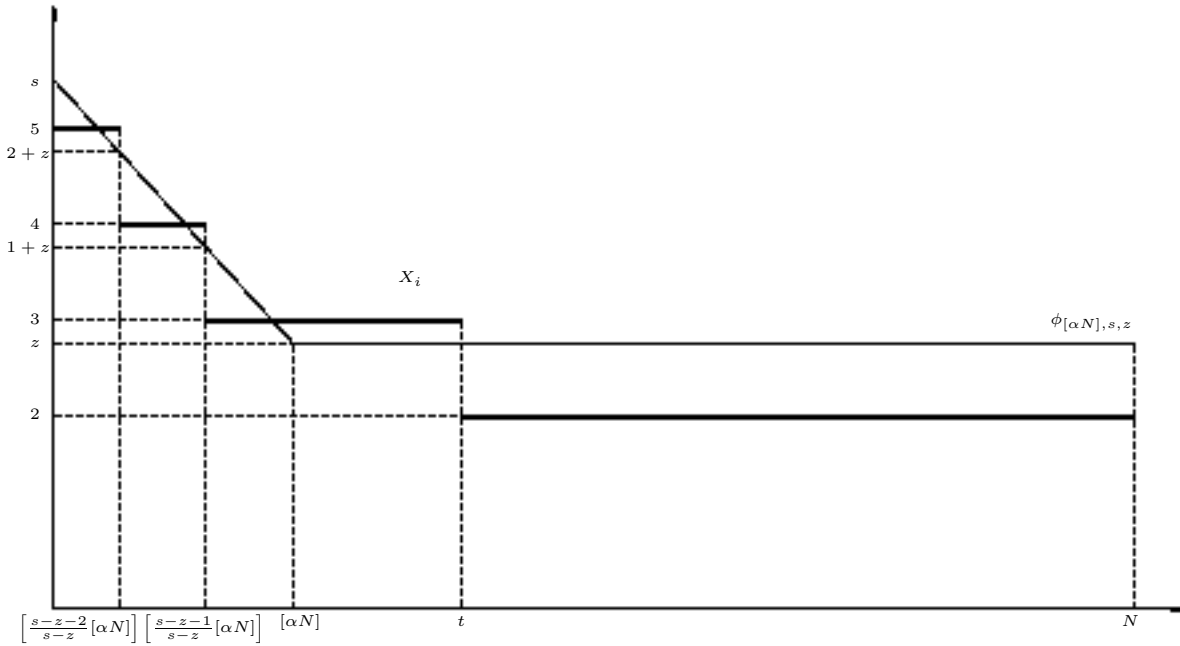


Figure 1: Répartition des valeurs (en gras) d'une solution du programme entier

Démonstration du lemme : Dans un souci de clarté, nous procédons par étapes.

1. L'ensemble \mathcal{X} étant fini, le programme admet au moins une solution (un minimum global). Choisissons-en une que nous nommons $X = (X_i)_{1 \leq i \leq N}$. Dans la suite de la démonstration, on note

$$\phi_{[\alpha N], s, z}(i) = \Phi_i.$$

2. Des encadrements $2 < 2 + 3\alpha - 3\alpha/(s - z) < z < 3$ et

$$m = \min_{1 \leq i \leq N} X_i \leq N^{-1} \sum_{i=1}^N X_i = z \leq M = \max_{1 \leq i \leq N} X_i$$

on déduit les bornes $m \leq 2$ et $M \geq 3$.

3. Pour $i < j$ définissons le vecteur entier X' par $X'_i = X_j$, $X'_j = X_i$ et $X'_k = X_k$ si $k \neq i, j$. On a alors $X' \in \mathcal{X}$ et

$$\begin{aligned} 0 \leq S(X') - S(X) &= (X_j - \Phi_i)^2 - (X_i - \Phi_i)^2 + (X_i - \Phi_j)^2 - (X_j - \Phi_j)^2 \\ &= 2(X_j - X_i)(\Phi_j - \Phi_i). \end{aligned}$$

Comme, d'une part, la suite $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq [\alpha N]}$ est strictement décroissante, on en déduit que la suite $(X_i)_{1 \leq i \leq [\alpha N]}$ est aussi décroissante. D'autre part, comme la suite $(\Phi_i)_{[\alpha N] \leq i \leq N}$ est

constante, on peut, sans perte de généralité, supposer la suite $(X_i)_{[\alpha N] \leq i \leq N}$ décroissante. Ainsi la suite $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ peut être supposée décroissante. En particulier, le point 2 implique que $X_1 \geq 3$ et $X_N \leq 2$.

4. Si $X_i > X_j$, définissons X'' par $X''_i = X_i - 1$, $X''_j = X_j + 1$ et $X''_k = X_k$ si $k \neq i, j$. On a alors $X' \in \mathcal{X}$ et

$$\begin{aligned} S(X'') - S(X) &= (X_i - 1 - \Phi_i)^2 - (X_i - \Phi_i)^2 + (X_j + 1 - \Phi_j)^2 - (X_j - \Phi_j)^2 \\ &= 2(X_j + 1 - X_i + \Phi_i - \Phi_j) \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

On a alors les propriétés suivantes.

L'inégalité

$$X_{[\alpha N]} \leq X_N + 1 \tag{4}$$

est vérifiée. En effet, d'après le point 3, $X_{[\alpha N]} \geq X_N$. S'il y a égalité dans cette inégalité, la formule (4) est prouvée, sinon c'est que $X_{[\alpha N]} > X_N$ et nous pouvons appliquer (3) à $i = [\alpha N], j = N$, ce qui implique (4).

Puisque (point 3) $X_1 \geq 3 > 2 \geq X_N$, on peut appliquer (3) au couple $i = 1, j = N$. Cela fournit $X_1 \leq X_N + 1 + s - z + o(1)$ d'où, pour N assez grand,

$$X_1 \leq X_N + 3 \leq X_{[\alpha N]} + 3 \tag{5}$$

puisque $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ est décroissante.

Si $X_i \geq X_j + 2$, on a

$$i \leq [\alpha N] \left(1 - \frac{1}{s - z} \right). \tag{6}$$

Deux cas peuvent se produire. Si $j \leq [\alpha N]$, on peut directement appliquer la formule (3), ce qui fournit

$$j - i \geq \frac{[\alpha N]}{s - z},$$

dont le résultat découle immédiatement. Dans le cas contraire, on a $\Phi_j = \Phi_{[\alpha N]}$ et l'application de la formule (3) au couple (i, j) donne directement (6).

La relation $X_j = X_N + 3$ implique

$$j \leq [\alpha N] \left(1 - \frac{2}{s - z} \right). \tag{7}$$

Cela provient de ce que $\Phi_N = \Phi_{[\alpha N]}$.

5. Nous démontrons ici que l'on a

$$X_{[\alpha N]} = 3. \tag{8}$$

Supposons tout d'abord que $X_{[\alpha N]} \leq 2$. La décroissance de la suite $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ montre que, pour $j \geq [\alpha N]$, on a

$$X_j \leq 2.$$

De (5), on tire, pour $j \leq [\alpha N]$,

$$X_j \leq X_1 \leq X_{[\alpha N]} + 3 \leq 5.$$

Si X_j vaut 5, la formule (7) montre que

$$j \leq [\alpha N] \left(1 - \frac{2}{s-z} \right)$$

tandis que si X_j vaut 4, la formule (6) fournit la majoration

$$j \leq [\alpha N] \left(1 - \frac{1}{s-z} \right).$$

Par conséquent, dans le domaine

$$[\alpha N] \left(1 - \frac{1}{s-z} \right) < j < [\alpha N],$$

on a $X_j \leq 3$. On déduit de ces trois domaines

$$z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \lesssim 5\alpha \left(1 - \frac{2}{s-z} \right) + \frac{4\alpha}{s-z} + \frac{3\alpha}{s-z} + 2(1-\alpha) = 2 + 3\alpha - \frac{3\alpha}{s-z},$$

ce qui, pour N assez grand, est impossible par hypothèse. Donc $X_{[\alpha N]} \geq 3$.

Comme, d'après (4) et la conclusion du point 3, $X_{[\alpha N]} \leq X_N + 1 \leq 3$, la relation (8) est satisfaite.

6. De la conclusion du point 3 d'une part et de (8) et (4) d'autre part, on déduit que

$$X_N = 2 \tag{9}$$

puis (équation (5))

$$X_1 \leq 5. \tag{10}$$

On en déduit l'existence de trois réels $t_5 \leq t_4 \leq t_3$ tels que

$$X_i = \begin{cases} 5 & \text{si } 1 \leq i \leq t_5 N, \\ 4 & \text{si } t_5 N < i \lesssim t_4 N, \\ 3 & \text{si } t_4 N < i \lesssim t_3 N \\ 2 & \text{si } t_3 N < i \leq N. \end{cases}$$

Un simple calcul de sommes de Riemann montre alors que

$$\sum_{i=1}^N (X_i - \phi_{[\alpha N], s, z}(i))^2 \sim F(t_5, t_4, t_3)N.$$

Les contraintes sur les sommes des X_i et des X_i^2 imposent les conditions $t_5 + t_4 + t_3 = z - 2$ et $9t_5 + 7t_4 + 5t_3 + 4 \leq 3z$ c'est-à-dire $2t_5 + t_4 \leq 3 - z$. D'après (6) appliquée à $i = N$ et (7) respectivement, on a en outre les conditions

$$t_4 \leq \alpha(1 - 1/(s - z))$$

et

$$t_5 \leq \alpha(1 - 2/(s - z))$$

Notons \mathcal{T} l'ensemble des triplets (t_5, t_4, t_3) de $[0, \alpha(1 - 2/(s - z))] \times [0, \alpha(1 - 1/(s - z))] \times [0, 1]$ qui vérifient $t_5 + t_4 + t_3 = z - 2$ et $2t_5 + t_4 \leq 3 - z$. On a alors

$$\min_{X \in \mathcal{X}} S(X) \sim N \min_{(t_5, t_4, t_3) \in \mathcal{T}} F(t_5, t_4, t_3).$$

7. Pour $(t_5, t_4, t_3) \in \mathcal{T}$, on a toujours

$$z - 2 - t_4 - t_5 \leq z - 2 < 1 \text{ et } z - 2 - t_4 - t_5 \geq z - 2 - 2\alpha + 3\frac{\alpha}{s - z} \geq 0.$$

Ainsi on pourra toujours considérer implicitement la variable t_3 . Un calcul simple donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_4} F(t_5, t_4, z - 2 - t_4 - t_5) &= 7 - 2s + 2(s - z)t_4/\alpha - (5 - 2z) \\ &= 2 + 2(s - z)(t_4/\alpha - 1) \leq 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_5} F(t_5, t_4, z - 2 - t_4 - t_5) &= 9 - 2s + 2(s - z)t_5/\alpha - (5 - 2z) \\ &= 4 + 2(s - z)(t_5/\alpha - 1) \leq 0. \end{aligned}$$

Ceci montre déjà que le minimum sera atteint sur l'un des bords $\{t_5 = \alpha(1 - 2/(s - z)), t_4 = \alpha(1 - 1/(s - z))\}$ ou $2t_5 + t_4 = 3 - z$.

8. Si $z \leq 3 - 3\alpha + 5\alpha/(s - z)$, on a

$$\min_{(t_5, t_4, t_3) \in \mathcal{T}} F(t_5, t_4, t_3) = F(\alpha(1 - 2/(s - z)), \alpha(1 - 1/(s - z)), z - 2 - 2\alpha + 3\alpha/(s - z))$$

puisque la droite $2t_5 + t_4 = 3 - z$ n'intersecte pas le parallélogramme où vit le couple (t_5, t_4) . Cela correspond au fait que la contrainte quadratique n'intervient pas.

9. Pour $z \geq 3 - 3\alpha + 5\alpha/(s - z)$, le minimum sera situé sur le segment de la droite d'équation $2t_5 + t_4 = 3 - z$ contenu dans le parallélogramme délimité par les bornes pour t_4 et t_5 . Nous sommes donc ramenés à ne considérer que la variable t_5 . Un calcul facile donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_5} F(t_5, 3 - z - 2t_5, 2z - 5 + t_5) \\ &= 9 - 2s + 2(s - z)t_5/\alpha - 2(7 - 2s + 2(s - z)t_4/\alpha) + 5 - 2z \\ &= \frac{2(s - z)}{\alpha}(5t_5 + \alpha - 2(3 - z)). \end{aligned}$$

Si on note $t_5^0 = 2(3 - z)/5 - \alpha/5$, on obtient

$$\min_{(t_5, t_4, t_3) \in \mathcal{T}} F(t_5, t_4, t_3) \geq F\left(\frac{6 - 2z - \alpha}{5}, \frac{3 - z + 2\alpha}{5}, 2z - 5 + \frac{2}{5}(3 - z)\right).$$

Ce qui achève cette preuve.

4. La démonstration du théorème 1

Nous aurons besoin de manière essentielle de la fonction d définie par

$$d(n) = |\{(a, b) \in \mathcal{A}^2 : n = b - a\}|.$$

Si \mathcal{A} était un ensemble de Sidon, cette fonction aurait un comportement relativement facile à décrire (dans ce cas $d(n)$ ne peut valoir que 0 ou 1). C'est d'ailleurs la remarque de départ de [5]. Dans le cas des autres ensembles $B_h[g]$, rien de tel ne se produit et d a un comportement a priori erratique. Malgré cette constatation, Cilleruelo a montré qu'on pouvait obtenir des renseignements sur des moyennes liées à d que nous rappelons plus bas et qui sont utilisés de façon essentielle.

Comme dans [12], on applique soit un argument à la Erdős-Turán (voir [5] ou [8] pour une présentation de la technique) - c'est le cas dans le paragraphe 4.1, soit un argument basé sur les estimations de Cilleruelo (pour les parties 4.2 et 4.3). Cependant, par rapport à [12], la technicité de la preuve est fortement augmentée (et en particulier de nouveaux cas voient le jour) : cela est dû à l'introduction du lemme de programmation entière. Ce lemme est le point crucial de la démonstration. Son intérêt réside dans la répartition extrême des valeurs que l'on autorise d à prendre. On comparera la répartition des X_i donnée par la figure 1 à celle sous-entendue par les calculs de [12].

Commençons maintenant la démonstration du lemme. Soit N un entier qu'on peut supposer grand. Soit \mathcal{A} un ensemble $B_2[2]$ inclus dans $\{1, \dots, N\}$. Nous notons tout au long de cette partie $r = |\mathcal{A}|$ et $y = \binom{r}{2}/N$. Voici les résultats connus [2] sur le comportement moyen de d :

$$\sum_{n=1}^N d(n) = yN \tag{11}$$

et

$$\sum_{n=1}^N d(n)^2 \leq 3yN. \tag{12}$$

Afin d'optimiser la méthode, nous faisons le choix des paramètres suivants :

$$\alpha_0 = 0,278, \quad \beta_0 = 2,14145, \text{ et } \beta_1 = 2,3$$

et posons $u = [\alpha_0 N]$. Enfin, définissons

$$\beta = \frac{\sum_{n=1}^u d(n)(u-n)}{u^2}.$$

Le théorème sera une conséquence de l'inégalité

$$y < 2,69522 \tag{13}$$

à la preuve de laquelle nous nous ramenons donc. Nous pouvons donc supposer

$$2,69522 \leq y < 2,8. \tag{14}$$

Si la minoration était fausse, (13) en découlerait immédiatement. Quant à la majoration, c'est une conséquence de (1).

Nous pouvons maintenant distinguer les trois cas de cette démonstration.

4.1. Cas où $\beta \leq \beta_0$:

Quel que soit l'entier m , définissons A_m comme le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_m = \mathcal{A} \cap \{m-u, \dots, m-1\}$.

Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 4 *Pour toute valeur de l'entier m satisfaisant $1 \leq m \leq N+u$, on a*

$$A_m A_{N+u-m} \leq 4m - 2.$$

Preuve du lemme. On a facilement

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{N+u-m} &\subset \{N-m + \max(m-u, 1), \dots, N+m-1 + \min(u-m-1, 0)\} \\ &\subset \{N-m+1, \dots, N+m-1\}. \end{aligned}$$

Or, à cette somme d'ensembles, correspondent exactement $A_m A_{N+u-m}$ sommes. Comme chaque valeur de $\{N-m+1, \dots, N+m-1\}$ ne peut être prise qu'au plus deux fois par définition d'un ensemble $B_2[2]$, il vient

$$A_m A_{N+u-m} \leq 2(2m-1),$$

ce qu'il fallait prouver.

Soit maintenant T le nombre total de triplets (a, a', m) satisfaisant $a, a' \in \mathcal{A}_m$, $a < a'$ et $1 \leq m \leq N+u$. On a évidemment

$$T = \sum_{m=1}^{N+u} \frac{1}{2} A_m (A_m - 1).$$

Comme

$$\sum_{m=1}^{N+u} A_m = ru, \tag{15}$$

on obtient

$$2T = \sum_{m=1}^{N+u} A_m^2 - ru.$$

Soit v un entier positif inférieur à $(N + u)/2$ (une hypothèse qui sera largement satisfaite en vertu de notre choix à venir (22) pour v). On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N+u} A_m^2 &\geq \sum_{m=1}^{v-1} (A_m^2 + A_{N+u-m}^2) + \sum_{m=v}^{N+u-v} A_m^2 \\ &= \sum_{m=1}^{v-1} ((A_m + A_{N+u-m})^2 - 2A_m A_{N+u-m}) + \sum_{m=v}^{N+u-v} A_m^2 \\ &\geq \sum_{m=1}^{v-1} (A_m + A_{N+u-m})^2 + \sum_{m=v}^{N+u-v} A_m^2 - 4v^2, \end{aligned}$$

d'après la majoration fournie par le lemme 4.

D'après l'identité de Cauchy, la somme de carrés du membre de droite de cette minoration peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{v-1} (A_m + A_{N+u-m})^2 + \sum_{m=v}^{N+u-v} A_m^2 &\sim \frac{(ru)^2}{N + u - v} + \sum_{m=1}^{v-1} \left(A_m + A_{N+u-m} - \frac{ru}{N + u - v} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{m=v}^{N+u-v} \left(A_m - \frac{ru}{N + u - v} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à minorer non trivialement la première somme apparaissant à droite. Comme la qualité d'ensemble $B_h[g]$ se conserve par symétrie (et translation), on a (d'après (1))

$$A_m, A_{N+u-m} < c_1 \sqrt{m}, \tag{16}$$

au moins pour m assez grand, avec $c_1 = 2,363584$. On pose pour la suite

$$c_2 = c_1 + 4c_1^{-1} = 4,05592918426 \dots$$

Soit alors v' défini par

$$c_2 \sqrt{v'} = \frac{ru}{N + u - v} \tag{17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$v' = \left(\frac{ru}{c_2(N + u - v)} \right)^2.$$

Supposons que

$$v' \leq v, \tag{18}$$

hypothèse qui sera justifiée bientôt. Lorsque m reste inférieur à v' (et est assez grand), le lemme 4 et (16) impliquent

$$A_m + A_{N+u-m} \leq c_2\sqrt{m} \leq c_2\sqrt{v'} = \frac{ru}{N+u-v}. \tag{19}$$

On peut donc minorer

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{v'} \left(A_m + A_{N+u-m} - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2 &\gtrsim \sum_{m=1}^{v'} \left(c_2\sqrt{m} - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2 \\ &\sim \frac{1}{6c_2^2} \left(\frac{ru}{N+u-v} \right)^4. \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant au reliquat

$$\begin{aligned} &\sum_{m=v'+1}^{v-1} \left(A_m + A_{N+u-m} - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2 + \sum_{m=v}^{N+u-v} \left(A_m - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2 \\ &= \sum_{m=v'+1}^{N+u-v} \left(B_m - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$B_m = \begin{cases} A_m + A_{N+u-m} & \text{si } v'+1 \leq m \leq v-1, \\ A_m & \text{si } v \leq m \leq N+u-v. \end{cases}$$

D'après (15) et (19), la valeur moyenne des B_m vérifie

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{N+u-v-v'} \sum_{m=v'+1}^{N+u-v} B_m = \frac{\sum_{m=1}^{N+u} A_m - \sum_{m=1}^{v'} (A_m + A_{N+u-m})}{N+u-v-v'} \\ &\geq \frac{ru - \sum_{m=1}^{v'} c_2\sqrt{m}}{N+u-v-v'}. \end{aligned} \tag{20}$$

Grâce à (17), cela implique tout d'abord que

$$A \geq \frac{ru - c_2v'^{3/2}}{N+u-v-v'} = \frac{ru}{N+u-v},$$

ce qui montre que le reliquat est minimum si, pour tout m compris entre $v'+1$ et $N+u-v$, on a

$$B_m = A.$$

Plus précisément (20) permet de voir que

$$\begin{aligned} A - \frac{ru}{N+u-v} &\geq \frac{ru - \sum_{m=1}^{v'} c_2\sqrt{m}}{N+u-v-v'} - \frac{ru}{N+u-v} \\ &\gtrsim \frac{ru - \frac{2}{3}c_2v'^{3/2}}{N+u-v-v'} - \frac{ru}{N+u-v} \\ &= \frac{v'ru}{3(N+u-v)(N+u-v-v')}. \end{aligned}$$

Ainsi, il vient pour contribution des B_m ,

$$\sum_{m=v'+1}^{N+u-v} \left(B_m - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2 \geq (N+u-v-v') \left(A - \frac{ru}{N+u-v} \right)^2$$

$$\sim \frac{1}{9c_2^4(N+u-v-v')} \left(\frac{ru}{N+u-v} \right)^6.$$

Finalement on obtient

$$2T \geq \frac{(ru)^2}{N+u-v} - 4v^2 + \frac{\left(\frac{ru}{N+u-v}\right)^4}{6c_2^2} + \frac{\left(\frac{ru}{N+u-v}\right)^6}{9c_2^4(N+u-v-v')} - ru. \tag{21}$$

Nous définissons maintenant λ par

$$\lambda = vN^{-1}$$

et

$$\mu(y) = v'N^{-1}.$$

Naturellement v' est lié à v par la relation (17) ce qui donne

$$\mu(y) = \frac{2\alpha_0^2 y}{c_2^2(1 + \alpha_0 - \lambda)^2}$$

et il est facile de vérifier que dans le domaine qui nous intéresse la relation (18) est vraie si l'on choisit

$$\lambda = 0,0339, \tag{22}$$

un choix à nouveau dicté par des considérations vouées à optimiser le calcul.

Par ailleurs, toute paire $(a, a') \in \mathcal{A}$ vérifiant la propriété requise correspond à un unique $n = a' - a$ (avec $1 \leq n \leq u - 1$). Il y a $d(n)$ telles paires et $(u - n)$ valeurs de m pour lesquelles la propriété est vérifiée, donc

$$T = \sum_{n=1}^{u-1} d(n)(u - n) = \beta u^2. \tag{23}$$

De (21) et (23), on déduit

$$\frac{(ru)^2}{N+u-v} - 4v^2 + \frac{\left(\frac{ru}{N+u-v}\right)^4}{6c_2^2} + \frac{\left(\frac{ru}{N+u-v}\right)^6}{9c_2^4(N+u-v-v')} - ru \lesssim 2\beta u^2 \leq 2\beta_0 u^2.$$

Ainsi y satisfait

$$\left(\frac{1}{1 + \alpha_0 - \lambda} \right) y + \left(\frac{\alpha_0^2}{3c_2^2(1 + \alpha_0 - \lambda)^4} \right) y^2$$

$$+ \left(\frac{4\alpha_0^4}{9c_2^4(1 + \alpha_0 - \lambda - \mu(y))(1 + \alpha_0 - \lambda)^6} \right) y^3 \lesssim \beta_0 + 2 \left(\frac{\lambda}{\alpha_0} \right)^2. \tag{24}$$

Grâce au choix de constantes qui a été fait, l'équation (24) fournit la borne

$$y < 2,6952173189 \dots$$

D'où le résultat, dès que N est assez grand.

4.2. Cas où $\beta_0 < \beta \leq \beta_1$:

Comme dans le cas précédent, on a

$$y^2 \leq 3y - N^{-1} \sum_{n=1}^N (d(n) - y)^2. \tag{25}$$

Précisons cette dernière somme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (d(n) - y)^2 &= \sum_{n=u+1}^N (d(n) - y)^2 + \sum_{n=1}^u (d(n) - y)^2 \\ &= \sum_{n=u+1}^N (d(n) - y)^2 + \frac{(\sum_{n=1}^u (d(n) - y) (u - n))^2}{\sum_{n=1}^u (u - n)^2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^u \left(d(n) - y - \frac{\sum_{m=1}^u (d(m) - y) (u - m)}{\sum_{m=1}^u (u - m)^2} (u - n) \right)^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité de Cauchy pour estimer la somme pour n allant de 1 à u .

Nous pouvons récrire cette égalité à l'aide des fonctions $\phi_{c,s,z}$ décrites dans la partie 3 et de la définition de β :

$$\sum_{n=1}^N (d(n) - y)^2 \sim 3 \left(\beta - \frac{y}{2} \right)^2 \alpha_0 N + \sum_{n=1}^N (d(n) - \phi_{u,3\beta-y/2,y}(n))^2. \tag{26}$$

C'est ici qu'intervient le lemme 3 de programmation entière. En effet, de l'égalité (11) et de la majoration (12), on tire

$$\sum_{n=1}^N (d(n) - \phi_{u,3\beta-y/2,y}(n))^2 \geq \min_{x_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^N x_i = yN, \sum_{i=1}^N x_i^2 \leq 3yN} \sum_{i=1}^N (x_i - \phi_{u,3\beta-y/2,y}(i))^2. \tag{27}$$

Or nous sommes dans les conditions d'application du lemme 3 (avec $\alpha = \alpha_0$, $s = 3\beta - y/2$ et $z = y$) puisque, tout d'abord, par définition de β_0 et β_1

$$3 \left(\beta - \frac{y}{2} \right) \geq 3(\beta_0 - 1,4) = 2,22435 > 2$$

et

$$3 \left(\beta - \frac{y}{2} \right) \leq 3(\beta_1 - 1,34) < 2,88 < 3.$$

Ensuite, et grâce notamment à cette dernière majoration, il vient

$$2 + 3\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{\beta - y} < 2 + 2\alpha_0 = 2,556 < y < 2,8 < 3,$$

d'après (14).

Posons maintenant

$$B = 3(\beta - y/2)$$

et

$$\begin{aligned} F(t_5, t_4, t_3) &= \int_0^{t_5} (5 - 3\beta + y/2 + Bt/\alpha_0)^2 dt + \int_{t_5}^{t_4} (4 - 3\beta + y/2 + Bt/\alpha_0)^2 dt \\ &\quad + \int_{t_4}^{\alpha_0} (3 - 3\beta + y/2 + Bt/\alpha_0)^2 dt + (t_3 - \alpha_0)(3 - y)^2 + (1 - t_3)(2 - y)^2, \end{aligned}$$

et définissons les fonctions T_5, T_4 et T_3 comme suit : si $y \leq 3 + \alpha_0(5B^{-1} - 3)$,

$$\begin{aligned} T_5(\beta) &= \alpha_0(1 - 2B^{-1}), \\ T_4(\beta) &= \alpha_0(1 - B^{-1}), \end{aligned}$$

sinon

$$\begin{aligned} T_5(\beta) &= \frac{6 - 2y - \alpha_0}{5}, \\ T_4(\beta) &= \frac{3 - y + 2\alpha_0}{5}, \end{aligned}$$

et enfin, dans les deux cas,

$$T_3 = y - 2 - T_5 - T_4.$$

Le lemme 3 appliqué à $\alpha = \alpha_0, s = 3\beta - y/2$ et $z = y$, permet d'identifier le minimum apparaissant dans (27). On obtient

$$\sum_{n=1}^N (d(n) - \phi_{u, 3\beta - y/2, y}(n))^2 \gtrsim F(T_5(\beta), T_4(\beta), T_3(\beta))N. \tag{28}$$

En rapprochant (25), (26) et (28), on obtient, tous calculs faits,

$$\begin{aligned} y^2 &\lesssim 3y - \left(3 \left(\beta - \frac{y}{2} \right)^2 \alpha_0 + \int_0^{T_5(\beta)} (5 - 3\beta + y/2 + Bt/\alpha_0)^2 dt \right. \\ &\quad + \int_{T_5(\beta)}^{T_4(\beta)} (4 - 3\beta + y/2 + Bt/\alpha_0)^2 dt + \int_{T_4(\beta)}^{\alpha_0} (3 - 3\beta + y/2 + Bt/\alpha_0)^2 dt \\ &\quad \left. + (T_3(\beta) - \alpha_0)(3 - y)^2 + (1 - T_3(\beta))(2 - y)^2 \right). \end{aligned}$$

Des calculs fastidieux montrent que la dérivée (par rapport à β) du membre de droite de cette inéquation vaut

$$3\alpha_0(5 - 4\beta + y) - \frac{3}{\alpha_0}(\alpha_0 - T_4(\beta))^2 - \frac{3}{\alpha_0}(\alpha_0 - T_5(\beta))^2.$$

Cette quantité est majorée par $(7,8 - 4\beta_0)\alpha_0 < 0$ et il s'ensuit que le majorant dans cette inéquation est une fonction décroissante de β ($\beta_0 < \beta \leq \beta_1$). Ainsi il est lui-même majoré par sa valeur en β_0 . Il vient donc

$$\begin{aligned} y^2 \lesssim & 3y - \left(3\left(\beta_0 - \frac{y}{2}\right)^2 \alpha_0 + \int_0^{T_5(\beta_0)} (5 - 3\beta_0 + y/2 + 3(\beta_0 - y/2)t/\alpha_0)^2 dt \right. \\ & + \int_{T_5(\beta_0)}^{T_4(\beta_0)} (4 - 3\beta_0 + y/2 + 3(\beta_0 - y/2)t/\alpha_0)^2 dt \\ & + \int_{T_4(\beta_0)}^{\alpha_0} (3 - 3\beta_0 + y/2 + 3(\beta_0 - y/2)t/\alpha_0)^2 dt \\ & \left. + (T_3(\beta_0) - \alpha_0)(3 - y)^2 + (1 - T_3(\beta_0))(2 - y)^2\right). \end{aligned}$$

Deux cas peuvent alors se présenter selon la position de y par rapport à $3 + \alpha_0(5B^{-1} - 3)$. Dans chacun de ces cas, on peut remplacer T_3, T_4 et T_5 par leur valeur en fonction de y . Cela conduit à une inéquation polynomiale en y qu'un outil de calcul résoud aisément.

Si $y \geq 3 + \alpha_0(5B^{-1} - 3)$, on obtient

$$y < 2,69240458 \dots$$

Si $y < 3 + \alpha_0(5B^{-1} - 3)$, l'inéquation obtenue fournit

$$y < 2,695212708 \dots$$

4.3. Cas où $\beta \geq \beta_1$:

Cette partie est calquée sur [12]. En fait, il n'est pas nécessaire de mettre en branle toute la machinerie de [12] et une version faible suffit. Afin d'être complet, nous retraçons ci-dessous la démarche adoptée.

L'identité de Cauchy, la formule (12), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et enfin la définition de β permettent d'écrire successivement

$$\binom{r}{2}^2 = \left(\sum_{n=1}^N d(n)\right)^2 = N \left(\sum_{n=1}^N d(n)^2 - \sum_{n=1}^N \left(d(n) - \frac{\sum_{m=1}^N d(m)}{N}\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq N \left(3yN - \sum_{n=1}^N \left(d(n) - \frac{\binom{r}{2}}{N} \right)^2 \right) \\
 &\leq N \left(3yN - (N-u) \|y\|^2 - \sum_{n=1}^u (d(n) - y)^2 \right) \\
 &\leq N \left(3yN - (N-u) \|y\|^2 - \frac{(\sum_{n=1}^u (d(n) - y)(u-n))^2}{\sum_{n=1}^u (u-n)^2} \right) \\
 &\sim N^2 (3y - (1 - \alpha_0)(3 - y)^2 - 3\alpha_0(\beta - y/2)^2).
 \end{aligned}$$

Le sens de variation du majorant en fonction de β , ainsi que les valeurs numériques des différents paramètres, permettent d'en déduire

$$y^2 \lesssim 3y - (1 - \alpha_0)(3 - y)^2 - 3\alpha_0 \left(\beta_1 - \frac{y}{2} \right)^2,$$

ce qui mène à

$$y < 2,6934022\dots$$

pour N assez grand.

5. Quelques remarques

Notons tout d'abord que le recyclage de la nouvelle valeur de c_2 (déduite du théorème) ne permet pas d'améliorer notre résultat de façon déterminante (cela ne modifie pas les six premiers chiffres après la virgule).

Venons-en maintenant aux possibles développements à venir. Il est peu probable que la voie purement calculatoire empruntée ici puisse encore beaucoup progresser. Notons que la méthode était de toutes façons devenue d'une technicité telle que continuer à creuser le sillon tiendrait du sacerdoce. En contrepartie semble s'ouvrir une nouvelle perspective, arithmétique celle-là, inspirée des méthodes structurales à la Freiman (voir [6] pour une présentation générale de cette philosophie) qu'on pourrait caricaturer de la façon suivante : ou bien y est notablement plus petit que ce que nous avons démontré dans cet article, ou bien y est proche de cette valeur, mais alors la fonction d est proche, en un certain sens à définir, de la fonction donnée par la solution du programme entier. Reste ensuite à montrer que cela est impossible du fait que d n'est pas n'importe quelle fonction (ses particularités sont évidemment sous-exploitées dans cet article). C'est certainement la partie la plus délicate de ce prolongement puisqu'elle est liée à l'étude de propriétés fines de d , fonction pour laquelle justement on ne dispose à l'heure actuelle que de renseignements en moyenne.

References

- [1] R. C. Bose et S. Chowla, Theorems in the additive theory of numbers, *Comment. Math. Helv.* **37** (1962/1963), 141 – 147.
- [2] J. Cilleruelo, An Upper Bound for $B_2[2]$ Sequences, *J. Combin. Theory Ser. A* **89** (2000), 141 – 144.
- [3] J. Cilleruelo, I. Ruzsa et C. Trujillo, Upper and lower bounds for finite $B_h[g]$ sequences, $g > 1$, à paraître dans *J. Number Theory*.
- [4] P. Erdős et R. Freud, On sums of a Sidon sequence, *J. Number Theory* **38** (1991), 196 – 205.
- [5] P. Erdős et P. Turán, On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems, *J. London Math. Soc.* **16** (1941), 212 – 215.
- [6] G. A. Freiman, Structure theory of set addition, *Astérisque* **258** (1999), 1 – 33.
- [7] B. Green, The number of squares and $B_h[g]$ sets, *Acta Arith.* **100** (2001), 365-390.
- [8] H. Halberstam et K. Roth, “Sequences”, Oxford University Press, 1966.
- [9] M. Helm, Upper bounds for $B_2[g]$ -sets, prépublication.
- [10] M. Kolountzakis, The density of $B_h[g]$ Sequences and the Minimum of Dense Cosine Sums, *J. Number Theory* **56** (1996), 4 – 11.
- [11] B. Lindström, Well distribution of Sidon sets in residue classes, *J. Number Theory* **69** (1998), 197 – 200.
- [12] A. Plagne, A new upper bound for the cardinality of $B_2[2]$ sets, *J. Combin. Theory Ser. A.* **93** (2001), 380 – 386.
- [13] A. Plagne, Recent progress on finite $B_h[g]$ sets, à paraître dans *Congr. Numer.* (2001).
- [14] J. Singer, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938), 377 – 385.