IV. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und zur Philosophie des Unendlichen.

1. Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

[Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle 1873, S. 34–42.]
[Anmerkungen hierzu S. 367.]

In den vier Jahren, welche ich die Ehre habe, der Naturforschenden Gesellschaft als Mitglied anzugehören, ist mir oft die Gelegenheit zuteil geworden, bei den hier gehaltenen Vorträgen Forschungen kennenzulernen, welche zu ihrer Entwickelung mehr oder weniger mathematischer Begriffe und Methoden sich bedienen.

Bei gewissen Gebieten der Naturwissenschaft ist der hilfreiche, fördernde, oft unerläßliche Anteil der Mathematik seit langen Zeiten zugestanden: Die Astronomie besteht in ihrer einen Hälfte aus analytischen Theorien, welche die sich ändernden Zustände des Weltraumes zu ihrem Gegenstande haben; in der Physik macht sich einerseits überall, wo man ein durch die Beobachtung gefundenes Gesetz in einen einfachen, durchsichtigen Ausdruck bringen will, das Bedürfnis nach der algebraischen Formel geltend, andrerseits wirkt aber die Mathematik, wenn man sie in ausgedehnterem Maße auf physikalische Daten anwendet, wahrhaft schöpferisch und läßt auf Tatsachen schließen, die teils der Beobachtung entgangen sind, teils aber auch ein so kompliziertes Gewebe haben, daß die Empirie, welche sie nachträglich zu bestätigen sucht, aus eigenem Antriebe schwerlich zu ihrer Entdeckung gelangt sein würde; die Chemie ist erst von der Zeit zu einer systematischen, sich mit ungewöhnlicher Schnelligkeit weiter entwickelnden Wissenschaft geworden, als man sich die Zusammensetzung der Naturkörper durch Auffindung der sogenannten Atomgewichte an bestimmten Zahlverhältnissen vergegenwärtigen konnte. Aber auch in den übrigen Zweigen der Naturwissenschaft macht sich, wie ich höre, teils der Einfluß der mathematischen Methode, teils das Bedürfnis nach ihrer Anwendung mehr und mehr geltend; ich glaubte daraus den Schluß ziehen zu dürfen, daß neben den in diesen Sitzungen über alle Teile der Naturforschung sich verbreitenden Vorträgen auch einmal ein solcher nicht ohne Interesse sein würde, in welchem ein für die Naturwissenschaft fruchtbringender Teil der Mathematik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, von historischen Gesichtspunkten aus betrachtet wird.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet der historischen Untersuchung ein nach vielen Beziehungen angenehm zu behandelndes Feld; über das Jahrhundert, in welchem ihre Entstehung allein gesucht werden kann, braucht man nicht zu streiten, denn, darüber sind alle Gelehrten einig, es ist das siebenzehnte, welches an großen Denkern und an weittragenden Entdeckungen so reich erscheint, daß man geneigt wäre, es für das ruhmvollste von allen Jahrhunderten zu halten; die Nationen, welche einander den Besitz an geistigen Errungenschaften fortwährend streitig machen, erschweren uns die Betrachtung ebensowenig; denn sie können in diesem Falle nicht umhin, die Wiege der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Frankreich zu erblicken, wo um die Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts die beiden Gelehrten Fermat und Pascal im regen brieflichen Verkehr über mathematische Fragen auch auf solche Aufgaben verfielen, welche zu ihrer Lösung die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung nötig hatten, und es stellte sich zu beider Genugtuung heraus, daß sie unabhängig voneinander zu denselben gelangt waren; während die gleichzeitigen Erfinder der Differential- und Integralrechnung Isaac Newton und Gottfried Leibniz sich zu einem Prioritätsstreit haben hinreißen lassen, der, von ihren Schülern und Nachfolgern in erbitterter Weise fortgeführt, noch heutiges Tages in seinen Wirkungen bemerkbar ist und dem Historiker den Blick zu trüben sucht, — sehen wir die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung friedlich über ihren gemeinschaftlichen Fund sich freuen, um die Zukunft und um ihre Ansprüche an dieselbe wenig besorgt.

Pierre Fermat (geb. in Beaumont de Lomagne bei Toulouse 1601, gest. in Toulouse 1665) war Rat im Parlamente dieser Stadt und soll in dieser Eigenschaft sich als Jurist einen bedeutenden Namen erworben haben. In den beiden Hauptteilen der Mathematik, in der Geometrie und Arithmetik, werden ihm die wichtigsten Entdeckungen verdankt, von welchen ich nur die Tangentenmethode, welche in ihrer allgemeinen Ausbildung zur Differential- und Integralrechnung führen mußte, und die nach ihm benannten Sätze in der Zahlentheorie erwähnen möchte, deren Beweise später so fruchtbringende Mühe den Mathematikern gekostet haben.

Blaise Pascal (geb. in Clermont Ferrand 1623, gest. in Paris 1662) lebte ohne öffentliches Amt abwechselnd in Clermont, Rouen und Paris; seine gegen die sittenverderbende Lehre der Jesuiten gerichtete, noch bis auf den heutigen Tag wegen des vortrefflichen Stiles, der feinen Ironie und des witzigen, gewandten Vortrages vielgelesene Schrift, Lettres Provinciales, begründete eine neue Epoche in der Prosaliteratur; Pascals eigentliche Stärke darf aber wohl in seinen mathematischen und mechanischen Arbeiten angenommen werden, von denen leider eine Theorie der Kegelschnitte verloren gegangen ist; als Erinnerung an letztere sehen wir in fast allen Darstellungen dieses Gegenstandes den sogenannten *Pascal'schen Satz* den vornehmsten Platz einnehmen.

Pascal und Fermat sind also die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung; ihr Zusammengehen darin tritt besonders lebhaft an der folgenden Stelle in einem Briefe Pascals an Fermat hervor (d. 29. Juli 1654):

„Je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable ou je me trouve avec vous. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris".

Wir erfahren nun einen Umstand, welcher als besonderer Anlaß dieser Besprechungen angesehen werden kann. Ein gewisser Chevalier de Meré, Mann von Ansehen und von Geist, will bei einer das Würfelspiel betreffenden Aufgabe die Autorität des Mathematikers durchaus nicht anerkennen; er hat sich eine andere Lösung in den Kopf gesetzt und in der Meinung, sie sei die richtige, klagt er die Mathematik öffentlich an, daß sie sich selbst widerspreche. Es handelte sich um folgendes. Wenn man mit *einem* Würfel viermal werfen darf, so kann man mit *Vorteil* darauf wetten, mindestens einmal die 6 zu werfen. Spielt man mit *zwei* Würfeln, so findet sich, daß man *nicht mit Vorteil* annehmen kann, eine doppelte 6 unter vier und zwanzig Würfen zu erhalten. Nichtsdestoweniger verhalten sich beim zweiten Spiele die Zahl 24 zu der Anzahl der möglichen Fälle 36, wie 4 zu 6, d. h. wie beim ersten Spiele die entsprechenden Zahlen; und dies wollte dem Chevalier nicht einleuchten [1]. Pascal in seiner lebhaften Weise berichtet an Fermat wie folgt:

„Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Meré; car il est très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est comme vous savez un grand defaut, et même il ne comprend pas qu'une ligne mathematique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre infini, et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous le pouviez faire on le rendrait parfait" [2]; und nachdem er die Streitfrage gezeichnet, fährt er fort: „voila quel était son grand scandale, qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmetique se démentait."

Der Chevalier de Meré darf. wie ich glaube, allen Widersachern der exakten Forschung, und es gibt deren zu jeder Zeit und überall, als ein warnendes Beispiel hingestellt werden; denn es kann auch diesen leicht begegnen, daß genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Meré [3].

Sehen wir auf diese Weise Pascal und Fermat im brieflichen Verkehr das Fundament der nachherigen Wissenschaft legen und verschiedene, zum Teil komplizierte Aufgaben derselben stellen und lösen, so sprechen sie sich doch so gut wie gar nicht über die von ihnen befolgten Prinzipien aus, welche gewissermaßen nur zwischen den Zeilen zu erkennen sind, und es muß daher die erste systematische Zusammenstellung und Begründung derselben besonders hoch geachtet werden. Bereits nach 3 Jahren unternahm es Huygens diese Lücke auszufüllen. Als Anhang zu Schootens Exercitationum mathematicarum libri quinque erschien sein Tractatus de ratiociniis in ludo aleae. Hier werden die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, freilich noch nicht in der einfachsten Weise, entwickelt; der Verfasser wendet sie hauptsächlich auf die mit Würfeln angestellten Spiele an; er bezieht sich auf die Arbeiten seiner Vorgänger, mußte jedoch fast ganz von vorn anfangen, weil sich jene über ihre Methoden nicht ausgesprochen hatten. In der Einleitung zum Huygens'schen Werke heißt es: „Sciendum vero, quod jam pridem inter praestantissimos tota Gallia geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primae inventionis gloriam hac in re tribuat. Caeterum illi, dificillimis quibusque quaestionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuere, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit."

Zu den frühesten Dokumenten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört auch ein Brief des Amsterdamer Philosophen Benedictus de Spinoza (geb. in Amsterdam 1632, gest. im Haag 1677). Während seines einsamen Landlebens in Voorburg löst er eine ihm von einem Freunde gestellte arithmetische Aufgabe und teilt demselben seine Lösung mit. Der Brief (in der Bruderschen Ausgabe von Sp.'s Werken der 43.) ist datiert den 1. Oktober 1666; sehen wir uns seinen Inhalt genauer an, so finden wir darin gewisse Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der diesem Philosophen eigenen, fast unerreichbaren Strenge der Begriffskonstruktion kurz enthalten. Ich muß es den Kennern überlassen, zu entscheiden, ob Spinoza in den Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat eingeweiht gewesen, ob er den Huygensschen Tractat gekannt hat, oder ob er unabhängig von allen Vorgängern zu seinen Resultaten gelangt ist. —

Wenn man das Wesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine einfache und zugleich allgemeine Weise bezeichnen will, so muß man es in dem Grundsatze erblicken, daß die mathematische Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines erwarteten Ereignisses durch einen echten Bruch gemessen wird, dessen Nenner die Anzahl aller denkbaren, sowohl günstigen, wie ungünstigen Fälle, welche eintreten können, dessen Zähler aber nur die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle angibt, vorausgesetzt, daß ein jeder von den sämtlichen in Betracht zu ziehenden Fällen, mit Rücksicht auf unseren Wissenszustand, gleich möglich ist. — Man ist also bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf die Berechnung vom Zähler und Nenner derselben angewiesen, was je nach der Natur der betreffenden Aufgabe verschiedene Hilfsmittel erfordert.

Jacob Bernoulli (geb. in Basel 1654, gest. in Basel 1705) hat in seinem Werke Ars conjectandi, welches nach seinem Tode von seinem Sohne Nikolaus 1713 herausgegeben worden ist, die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die bei den Hazardspielen denkbaren Aufgaben allgemein durchzuführen gesucht; er bemerkte, daß sie auf die Aufgabe zurückkommt, aus gegebenen Elementen nach einem vorgeschriebenen Modus alle möglichen Zusammenstellungen zu bilden; von den verschiedenen Modis, welche dabei erdacht werden können, wurden die häufigst vorkommenden ins Auge gefaßt, die Permutationen, Kombinationen und Variationen genannt und in dem zweiten Teile seines Buches ausführlich behandelt werden; in den ersten Teil desselben nahm er den Huygensschen Tractat auf, dem er eigene Bemerkungen hinzufügte; der dritte Teil ist den Anwendungen auf das Hazardspiel gewidmet; der vierte Teil des unvollendet gebliebenen Werkes kann als der bedeutendste von allen betrachtet werden; wir sehen Bernoulli hier ganz neue Bahnen betreten, welche, für alle späteren Bearbeitungen maßgebend, der jungen Wissenschaft eine unvorhergesehene Tragweite und das unbestrittene Recht verschafften, in allen Gebieten des Lebens ein gewichtiges Wort mitreden zu dürfen.

Die Überschrift ist: „Pars quarta, tradens usum et applicationem praecedentis doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis." Die Kapitel dieses Teiles sind folgendermaßen betitelt:

„Cap. I. Praeliminaria quaedam de certitudine, probabilitate, necessitate et contingentia rerum."

„Cap. II. De scientia et conjectura. De arte conjectandi. De argumentis conjecturarum. Axiomata quaedam generalia huc pertinentia."

„Cap. III. De variis argumentorum generibus, et quomodo eorum pondera aestimentur ad supputandas rerum probabilitates."

„Cap. IV. De duplici modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta, problema singulare eam in rem propositum."

Wenn wir in der Gegenwart alle weisen Staatsverwaltungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung als eines sicheren, zuverlässigen Instrumentes sich bedienen sehen, wenn wir bemerken, daß die modernen volkswirtschaftlichen Theorien durch sie umgestaltet und gefördert werden, so können wir nicht ohne eine gewisse Genugtuung auf das Buch des Baseler Universitätslehrers blicken, wo in den hier bezeichneten Kapiteln die praktische Seite der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum ersten Male wissenschaftlich vorbereitet wird.

Nur an den mathematischen Teil dieser Arbeit möchte ich hier wenige Bemerkungen knüpfen; derselbe gipfelt in dem von Bernoulli gefundenen Satze, welcher das Verhältnis der sogenannten Wahrscheinlichkeit a priori zu der Wahrscheinlichkeit a posteriori bestimmt. Viele Ereignisse haben ein so zusammengesetztes Gefüge, daß es nicht möglich ist, ihre Wahrscheinlichkeit direkt, d. h. a priori anzugeben; Bernoulli lehrt uns, wie sie a posteriori, d. h. durch Beobachtungen gefunden werden kann. Dieser Satz wird uns leicht verständlich durch ein Beispiel. Man denke sich eine Urne, welche schwarze und weiße Kugeln enthält. Wenn man weiß, daß die Anzahl der schwarzen Kugeln p ist, die Anzahl sämtlicher Kugeln n, so ist die Wahrscheinlichkeit w des Ziehens einer schwarzen Kugel $w = \frac{p}{n}$, gleich der Anzahl der günstigen Fälle, dividiert durch die Anzahl aller Fälle.

Denken wir uns aber dieses Verhältnis der schwarzen zu allen in der Urne enthaltenen Kugeln unbekannt, so ziehen wir blind eine Anzahl von Malen, die ich n' nennen will, je eine Kugel, die jedesmal wieder in die Urne zurückgeworfen wird; hierbei möge p' die Anzahl angeben, wie oft eine schwarze Kugel gezogen worden ist; dann gibt uns der Bernoullische Satz eine bestimmte Beziehung zwischen der gesuchten Wahrscheinlichkeit $w = \frac{p}{n}$ und dem auf diese Weise durch Versuche auffindbaren Bruche $\frac{p'}{n'}$ an; der Satz lautet:

Man kann die Wahrscheinlichkeit, daß der Bruch $\frac{p'}{n'}$ von der Wahrscheinlichkeit w um weniger als eine beliebig vorgegebene Größe abweicht, der Gewißheit beliebig nahe bringen, wenn nur die Anzahl n' hinreichend vergrößert wird.

Hieraus folgt nun, daß man für die Wahrscheinlichkeit w eines Ereignisses annäherungsweise mit großer Glaubwürdigkeit den aus der Beobachtung sich ergebenden Bruch $\frac{p'}{n'}$ substituieren kann, wenn nur n' groß genug angenommen wird.

Bernoulli legte diesem Resultate mit Recht einen um so größeren Wert bei, als er zu dessen Begründung erhebliche Schwierigkeiten besiegen mußte. Sein Beweis enthält zwar einige Beschränkungen, kann aber, wie ich gefunden habe, ohne das dabei befolgte Prinzip zu ändern, vollkommen strenge gemacht werden; er hat vor dem später durch Laplace gelieferten den großen Vorzug, daß in ihm nur die elementarsten Mittel zur Anwendung kommen. Es wird erzählt, daß Bernoulli, obgleich er von der Bedeutung seiner Arbeit durchdrungen war, dieselbe 20 Jahre lang unter seinen Papieren habe liegen lassen. —

Bereits im Jahre 1708 erschien der Essai d'analyse sur les jeux de hazard von Pierre Rémond de Montmort (geb. in Paris 1678, gest. in Paris 1719).

Canonicus an Notredame und Mitglied der Académie zu Paris. Obgleich der Herausgabe nach älter als die Ars conjectandi, welche erst 1713 erschien, ist dieses Werk doch nicht unabhängig von dem Bernoullischen. Der Verfasser sagt, daß er die Anregung dazu dem verdanke, was er berichtweise über die Bernoullischen Forschungen erfahren habe, und wir können uns über den Inhalt der Montmortschen Arbeit dahin aussprechen, daß sie im wesentlichen mit den drei ersten Teilen der Ars conjectandi parallel geht.

Von Moivre erschien 1711 (Phil. Trans.) eine Abhandlung De mensura sortis, welcher im Jahre 1718 die Schrift folgte Doctrine of chances. Abraham de Moivre (geb. in Vitry in der Champagne 1667, gest. in London 1754) verließ nach Aufhebung des Ediktes von Nantes als Protestant sein Vaterland und lebte als Privatlehrer der Mathematik in London, wo er in die Royal Society aufgenommen wurde.

In den Moivreschen Arbeiten sehen wir mehr als in allen früheren über die Wahrscheinlichkeitsrechnung das Wesentliche von dem Unwesentlichen geschieden; dem Huygensschen Tractate gegenüber erscheinen seine Methoden als die mehr genuinen und im Vergleiche zu der Ars conjectandi macht sich eine zum Teil gewandtere Analyse geltend.

Im Jahre 1740 erschien in London von Thom. Simpson ein Treatise on the nature and laws of chance; es ist derselbe Simpson, welchem wir wertvolle Bereicherungen in der Geometrie verdanken; die sogenannten Simpsonschen Regeln haben die Lehre von der näherungsweisen Quadratur angebahnt.

Indem wir der Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter folgen, treten wir in die Epoche der französischen Revolution; die Gedankenrichtung, welche dieses Ereignis vorbereitete und durch eine schonungslose, auf den Umsturz des Bestehenden hinzielende Kritik der Zustände des staatlichen und des Familienlebens bezeichnet ist, konnte ein Instrument nicht ungenutzt lassen, welches, wie kein anderes, die Befähigung gibt, die verschiedensten Kulturelemente allgemeinen Gesichtspunkten unterzuordnen. Zu den Lieblingsideen dieser Aufklärungszeit gehörte dann auch, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung einer der wichtigsten Gegenstände des öffentlichen Unterrichts sei, denn sie sei die Rechnung des gesunden Menschenverstandes, durch deren Belehrungen allein der falsche Einfluß von Hoffnung, Furcht und allen Gemütsbewegungen auf unser Urteil vernichtet und somit Vorurteil und Aberglaube aus dem Urteil im bürgerlichen Leben verdrängt werden könne.

Vornehmlich begegnet uns hier der zu den Girondisten gezählte Marquis de Condorcet (geb. in Ribemont 1743, gest. in dem Gefängnis zu Bourg la Reine 1794), Mitglied und später Sekretär der Pariser Akademie. Sein Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix (Paris 1784) zeichnet sich durch seinen philosophischen Gehalt sowohl, wie auch durch die Neuheit der darin behandelten Probleme aus. —

Durch Pierre Simon Marquis de Laplace (Beaumont en Auge 1749 — Paris 1827) erhält die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine außerordentliche Vollendung in ihren analytischen Bestandteilen und in ihren Anwendungen auf das Leben.

Laplace war erst Lehrer der Mathematik an der Militärschule seiner Vaterstadt, dann in Paris Examinator beim k. Artilleriekorps und später Professor der Mathematik an der École Normale, daneben Mitglied der Académie und des Bureau des Longitudes, auch unter der Konsularregierung kurze Zeit Minister des Innern. Er hat zwei Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung hinterlassen; das größere, die Théorie analytique des probabilités (Paris 1812) widmete er, wie schon früher seinen Traité de mécanique céleste dem ersten Napoleon; in der Widmung heißt es:

„Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont, en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. Il doit, sous ce rapport, interesser votre Majesté dont le génie sait si bien apprécier et si dignement encourager tout ce qui peut contribuer au progrès des lumières, et de la prosperité publique."

Das zweite Werk ist sein: Essai philosophique sur les probabilités (Paris 1814); hier sehen wir, daß Laplace nicht nur Meister in der Behandlung der schwierigsten analytischen Fragen ist, sondern auch, daß es ihm, wie keinem andern gegeben war, dieselben Gegenstände gemeinfaßlich in der vollendetsten Form zu behandeln.

Deutschland erhält einen entschiedenen Anteil an der Ausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erst durch Gauß, welcher besonders eine Seite ihrer Anwendungen untersucht und begründet hat.

Stets, wenn in der Natur Größenmessungen vorgenommen werden, sind die Resultate derselben mit Fehlern behaftet, die teils vom Zufalle herbeigeführt, teils von störenden äußeren Umständen abhängig sind, teils aber auch in den Täuschungen ihre Ursache haben, welchen wir selbst, unserer Natur nach, beim Beobachten unterworfen sind.

Um nun diese Fehler, welche nach der einen oder andern Seite hin möglich sind, zu verkleinern, ist man schon frühe auf den Gedanken gekommen, eine und dieselbe Messung oder, allgemeiner gesprochen, ein und dasselbe System von Messungen öfter, als die Zahl der zu bestimmenden Größen fordert, und unter den verschiedensten Umständen vorzunehmen; die Resultate, welche man auf diese Weise erhält, sind nun zwar alle von dem richtigen aus den angeführten Gründen verschieden, aber es läßt sich annehmen, daß man durch eine verständige Kombination derselben ein solches aus ihnen herleiten kann, welchem man eine größere Glaubwürdigkeit beilegen muß als jeder der ursprünglichen Messungen für sich.

In der Astronomie, wo das hier berührte Problem besonders dringend auftrat, hat bereits de Laplace eine Methode entworfen, welche zu dem angegebenen Ziele führt.

Gauß wandte zum ersten Male auf diese Aufgabe die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung an und fand nicht nur eine einfachere Lösung derselben, sondern auch diejenige, welcher von allen möglichen die größte Glaubwürdigkeit zukommt. Die unter dem Namen „Methode der kleinsten Quadrate" von ihm begründete Näherungsmethode erschien zuerst als ein Bestandteil seines großen Werkes: Theoria motus corporum coelestium 1809, welches hauptsächlich der Bahnbestimmung der Planeten aus drei Bahnelementen gewidmet ist.

In den Jahren 1821, 1823 und 1826 widmete er dieser Theorie drei akademische Abhandlungen: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Pars I. und II. und Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.

Es liegt in der Aufgabe, welche ich mir gestellt, nur dasjenige kurz zu berühren, was in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als maßgebend hervortritt; es sind aus diesem Grunde viele verdienstvolle Abhandlungen und Kompendien von dieser Besprechung ausgeschlossen, die zur Vertiefung sowohl, wie zur Verbreitung der Wissenschaft Ausgezeichnetes beigetragen haben. Ich darf jedoch ein Moment nicht unerwähnt lassen, welches wesentlich zu unserer Wissenschaft gehört, ich meine ihre philosophische Begründung — die Franzosen nennen es die Metaphysik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Jede Wissenschaft, welche sich wie die unsrige auf Begriffe und Grundsätze stützt, die nicht bloß spontan gebildet und mathematisch verwertet werden, sondern auch eine gewisse reale Gültigkeit in Anspruch nehmen, so daß die Resultate der Rechnung eine Anwendung auf die Wirklichkeit erhalten sollen, jede derartige Wissenschaft erfordert nach Inhalt und Umfang eine philosophische Kritik. Die Mathematiker beschränken sich freilich in den meisten Fällen bei der Herleitung der Grundbegriffe, wie *mathematische Wahrscheinlichkeit, möglicher Fall, Gewißheit* und dergl., auf synthetische Begriffserklärungen, die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit werden oft als etwas Selbstverständliches nicht weiter erörtert. Um die fundamentalen Sätze, wie z. B. den für die Wahrscheinlichkeit zusammengesetzter Ereignisse zu beweisen, wird ein konkreter Fall, wie etwa der einer Urne mit schwarzen und weißen Kugeln behandelt; und es wird manchmal stillschweigend die Richtigkeit derartiger Sätze auf Fälle übertragen, in welchen ihre Gültigkeit mindestens zweifelhaft ist.

Nirgends ist die Gelegenheit in dem Grade vorhanden wie hier, die Kunst der Analysis in glänzender Weise zu entfalten; aber auch nirgends tritt der Fall häufiger auf, daß die mit Scharfsinn durchgeführte Rechnung von gar keinem Werte ist, weil sie sich auf unrichtige Voraussetzungen stützt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat also stets und besonders, wenn ihr ein neues Feld der Anwendung gegeben wird, eine Erörterung nötig, worin die Gültigkeit ihrer Berechnungen genau festgestellt wird.

Diese Seite der Wissenschaft, nämlich ihre philosophische, finden wir denn auch von allen ihren Vertretern gewürdigt und gepflegt. Bernoulli hat, wie wir sahen, das vierte Buch seiner Ars conjectandi hauptsächlich der Kritik gewidmet; Condorcet geht in seinem Werke von philosophischen Gesichtspunkten aus; Laplace schrieb seinen Essai philosophique sur les probalilités; in Lacroix's „Traité élémentaire du calcul des probabilités" finden wir die philosophische Seite durchgehends vertreten. Hierbei bietet sich eine Bemerkung dar: die englischen und französischen Mathematiker gehen bei ihren philosophischen Betrachtungen zumeist von den Grundsätzen des Hume'schen Skeptizismus und des Locke'schen Sensualismus aus; darnach finden wir bei ihnen auch die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von diesen Gesichtspunkten aus; seitdem aber in Deutschland Kant neue, die Erkenntnis betreffende Lehren angebahnt hat, wird auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Kantischen Sinne kritisch untersucht, und es sei mir in dieser Beziehung gestattet, nur an die Schrift von Jac. Fr. Fries zu erinnern, betitelt: Versuch einer Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Obgleich ich nun mit *meinem* Versuche, aus den mir bekannt gewordenen Schriften und Überlieferungen ein flüchtiges Bild der Wissenschaft zu entwerfen, eigentlich zu Ende bin, kann ich der Versuchung doch nicht widerstehen, die Nützlichkeit und den Wert der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorzuheben, indem ich die Schlußworte aus dem Essai philosophique von Laplace in Übersetzung hier anführe:

„Man sieht", sagt er, „daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Grunde nichts anderes ist als der in Rechnung gebrachte gesunde Menschenverstand; sie lehrt dasjenige mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art von Instinkt fühlt, ohne sich immer Rechenschaft davon geben zu können. Sie läßt keine Willkür bei der Wahl von Ansichten zu, da sie zeigt, welche von ihnen die glaubwürdigste sei. So bildet sie einen Ersatz für die natürliche Unwissenheit und Schwäche des menschlichen Geistes. Betrachtet man die analytischen Methoden, welche erst durch diese Theorie entstanden sind, die Wahrheit der Grundsätze, auf denen sie beruht, die feine und genaue Logik, welche ihr Gebrauch bei der Auflösung von Aufgaben erfordert, den Nutzen der auf sie gegründeten öffentlichen Anstalten und die Ausdehnung, welche sie auf die wichtigsten Aufgaben der Naturwissenschaft und der moralischen Wissenschaften erhalten hat und noch mehr erhalten kann; und berücksichtigt man zugleich, daß sie selbst bei Gegenständen, die der Rechnung nicht unterworfen werden können, die richtigsten Ansichten verschafft, welche die Urteile darüber leiten können, und daß sie vor verwirrenden Täuschungen sich hüten lehrt, so wird man einsehen, daß keine Wissenschaft des Nachdenkens würdiger ist und keine mit mehr Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden kann."

[Anmerkungen.]

Es handelt sich hier um einen in der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle gehaltenen populärwissenschaftlichen Vortrag, der augenscheinlich auf tiefergehende historische Studien des Verfassers gegründet ist. Wie Cantor dazu kam, sich gerade mit der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschäftigen, ohne doch jemals selbst auf irgendeinem Gebiete der angewandten Mathematik forschend tätig gewesen zu sein, entzieht sich unserer heutigen Kenntnis. Eigentümlich an diesem Vortrag und uns Heutigen seltsam anmutend ist der durchgehende Zug eines fröhlichen Optimismus, jener „rationalistische" Glaube des achtzehnten Jahrhunderts an die Macht der menschlichen Vernunft und des mathematisch rechnenden Verstandes, der auch auf allen Gebieten des praktischen, ja des politischen Lebens zur Führung berufen sein soll.

[1] Zu S. 359 In der Tat sind die beiden von Chevalier de Meré irrtümlich identifizierten Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung voneinander verschieden. Es ist nämlich

$$w_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}518 > \frac{1}{2}$$

und

$$w_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}492 < \frac{1}{2}.$$

[2] ibid. Immerhin kann man sich eine *Linie* ganz wohl als *Gesamtheit ihrer Punkte* denken, als eine „Menge" im Cantorschen Sinne; nur sind ihre „Teile" dann nicht diese Punkte selbst sondern wieder „Punktmengen", darunter freilich auch solche, die aus einzelnen Punkten bestehen. Erst die scharfe Unterscheidung zwischen einer aus einem einzigen Element bestehenden „Menge" und diesem Elemente selbst ermöglicht die Festhaltung des Grundsatzes, daß jeder „Teil" dem Ganzen „gleichartig" sein müsse.

[3] ibid. Die auf diesen Chevalier de Meré bezügliche Schlußbemerkung Cantors könnte mit fast noch größerem Rechte auf das Schicksal der *Mengenlehre* und ihrer Widersacher bezogen werden: eine merkwürdige Vorausschau zu einer Zeit, wo der künftige Bahnbrecher sein eigentliches Lebenswerk kaum noch begonnen hatte: seine erste mengentheoretische Arbeit III 1 erschien erst 1873. Die vorliegende Äußerung charakterisiert treffend das Schicksal jeder reaktionären Richtung in der Wissenschaft und wird immer wieder aktuell sein.