Journal of Lie Theory
Volume **14** (2004) 501–508


# Une courte démonstration de la formule de Campbell-Hausdorff

**Loring W. Tu**

Communicated by J. Faraut

**Abstract.** We give a simple proof of an algorithm for computing the terms of the Campbell-Hausdorff formula.
*2000 AMS Subject Classification*: Primary: 22E15; Secondary: 22E60

Soient $G$ un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_1G$ son algèbre de Lie, vue comme l'espace tangent à $G$ en l'élément neutre $1$. Alors il existe un voisinage $V$ de $0$ dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage $U$ de $1$ dans $G$ tels que la restriction de l'application exponentielle $\exp : V \to U$ est un difféomorphisme. Son inverse $U \to V$ s'appelle le logarithme et s'écrit $\log$. Si deux éléments $A$ et $B$ de $\mathfrak{g}$ sont suffisamment proches de l'origine, alors la formule de Campbell-Hausdorff donne l'expression de $\log(\exp A \exp B)$ en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par $A$ et $B$ :

$$\exp A \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] + [B,[B,A]]\right) + \cdots\right). \tag{1}$$

Dans cette note nous donnons une démonstration simple d'un algorithme pour calculer les termes de la série (1). Cet algorithme est équivalent à celui de Hausdorff ([8], Eq. (25), p. 29), qui considère le problème d'un point de vue symbolique.

## 1. Des séries entières formelles

Nous écrivons $\exp X$ pour l'application exponentielle d'un groupe de Lie et $e^y$ pour la série entière formelle

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots .$$

La série de Todd et son inverse sont les séries entières formelles

$$\operatorname{td}(y) = \frac{y}{1-e^{-y}} = 1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^4}{720} + \frac{y^6}{30240} - \frac{y^8}{1209600} + \frac{y^{10}}{47900160} + \cdots ,$$
$$\operatorname{td}^{-1}(y) = \frac{1-e^{-y}}{y} = 1 - \frac{1}{2!}y + \frac{1}{3!}y^2 - \cdots .$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50 

Puisqu'une série entière converge dans son disque de convergence, il existe un voisinage $V' \subset V$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que pour tout $X \in V'$ la série $\operatorname{td}(\operatorname{ad} X)$ converge vers un élément de $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$.

## 2. Transporter un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie au groupe

L'application $\exp : V \to U$ étant un difféomorphisme, elle transporte un champ de vecteurs $\mathcal{C}$ sur $V$ vers un champ de vecteurs $\mathcal{C}^*$ sur $U$ défini par :

$$(\mathcal{C}^*)_g = \exp_{*,X}(\mathcal{C}_X) \tag{2}$$

pour $X \in V \subset \mathfrak{g}$ et $g = \exp X \in U$.

Puisque $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel, en chaque point $X \in \mathfrak{g}$ on a une identification canonique de l'espace tangent : $T_X\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$. Par conséquent, un champ de vecteurs $\mathcal{C}$ sur le voisinage $V'$ de 0 n'est autre qu'une application $V' \to \mathfrak{g}$. Ainsi, si on fixe un élément $B$ dans $\mathfrak{g}$, alors pour $X \in V'$ l'application $X \mapsto (\operatorname{td}\operatorname{ad} X)B$ est un champ de vecteurs sur $V'$. On désigne par $\bar{B}$ le champ de vecteurs $((\operatorname{td}\operatorname{ad} X)B)^*$ sur $U' := \exp(V')$. Pour $g \in U'$ et $X = \log g$, ce champ de vecteurs a pour expression

$$\bar{B}_g = \exp_{*,X}((\operatorname{td}\operatorname{ad} X)B).$$

## 3. Énoncé du résultat

Soit $B \in \mathfrak{g}$. Comme $\bar{B}$ est un champ de vecteurs sur $U'$, il opère sur les fonctions sur $U'$. Donc, pour $f \in C^\infty(U')$, l'expression

$$(e^{\bar{B}} f)(g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\bar{B}^k f)(g)$$

a un sens si la série converge.

**Proposition 3.1.** (Formule de Campbell-Hausdorff) *Soient $A, B$ suffisamment proches de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors la série*

$$(e^{\bar{B}} \log)(\exp A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\bar{B}^k \log)(\exp A)$$

*converge et*

$$\log(\exp A \exp B) = (e^{\bar{B}} \log)(\exp A) = (e^{((\operatorname{td}\operatorname{ad} X)B)^*} \log)(\exp A). \tag{3}$$

## 4. Trois règles pour calculer avec $\mathcal{C}^*$

Pour appliquer la proposition 3.1 on n'a besoin que de trois règles simples, démontrées plus loin dans cette note. La définition de $\mathcal{C}^*$ est particulièrement adaptée à la fonction $\log$.

**Proposition 4.1.** *Soit $\mathcal{C}$ un champ de vecteurs sur $V' \subset \mathfrak{g}$, autrement dit, une application $V' \to \mathfrak{g}$.*

*i) Le champ de vecteur $\mathcal{C}^*$ vérifie $\mathcal{C}^* \log = \mathcal{C} \circ \log$ sur $U'$.*

*ii) Si $B : U' \to \mathfrak{g}$ est une fonction constante, alors $\mathcal{C}^* B = 0$.*

*iii) (Formule du produit) Si $Y, Z : U' \to \mathfrak{g}$ sont lisses, alors*

$$\mathcal{C}^*[Y, Z] = [\mathcal{C}^* Y, Z] + [Y, \mathcal{C}^* Z].$$

## 5. Exemple de calcul

Avant de démontrer les propositions 3.1 et 4.1, calculons les termes de degré inférieur ou égal à 4 dans la formule de Campbell-Hausdorff.

Soient $X$ un élément proche de 0 dans $\mathfrak{g}$ et $w_X = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B$ dans $\mathfrak{g}$. Alors

$$\begin{aligned} w_X = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B &= (1 + \frac{1}{2} \operatorname{ad} X + \frac{1}{12}(\operatorname{ad} X)^2 - \frac{1}{720}(\operatorname{ad} X)^4 + \cdots)B \\ &= B + \frac{1}{2}[X, B] + \frac{1}{12}[X, [X, B]] - \frac{1}{720}[X, [X, [X, [X, B]]]] + \cdots . \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous écrirons dans la suite $L = \log$. Avec cette notation, $[L, B]$ est une fonction lisse $U' \to \mathfrak{g}$ dont la valeur en $g \in U'$ est $[L, B](g) = [\log g, B]$. En appliquant les trois règles de la proposition 4.1, on a, modulo les termes de degré strictement supérieur à 4 en $L$ et $B$,

$$\begin{aligned} w^* L &= w \circ L \approx B + \frac{1}{2}[L, B] + \frac{1}{12}[L, [L, B]], \\ (w^*)^2 L &= w^*(w^* L) \approx w^* B + \frac{1}{2} w^*[L, B] + \frac{1}{12} w^*[L, [L, B]] \\ &\approx \frac{1}{2}[w \circ L, B] + \frac{1}{12}[w \circ L, [L, B]] + \frac{1}{12}[L, [w \circ L, B]] \\ &\approx \frac{1}{4}[[L, B], B] + \frac{1}{24}[[L, [L, B]], B] + \frac{1}{12}[B, [L, B]] + \frac{1}{24}[L, [[L, B], B]] \\ &\approx \frac{1}{6}[B, [B, L]] + \frac{1}{12}[B, [L, [B, L]]], \\ (w^*)^3 L &= \frac{1}{6}[B, [B, w \circ L]] + \frac{1}{12}[B, [w \circ L, [B, L]]] + \frac{1}{12}[B, [L, [B, w \circ L]]] + \cdots \\ &= \frac{1}{12}[B, [B, [L, B]]] + \frac{1}{12}[B, [B, [B, L]]] + \cdots = 0 + \cdots . \end{aligned}$$

Par suite, d'après le proposition 3.1,

$$\begin{aligned}
\log(\exp A \exp B) &= (e^{w^*} L)(\exp A)\\
&= \left(1 + w^* + \frac{1}{2!}(w^*)^2 + \frac{1}{3!}(w^*)^3 + \cdots\right) L\Big|_{\exp A}\\
&= L + \left(B + \frac{1}{2}[L,B] + \frac{1}{12}[L,[L,B]]\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{6}[B,[B,L]] + \frac{1}{12}[B,[L,[B,L]]]\right) + \frac{1}{3!}\cdot 0 + \cdots\Big|_{\exp A}\\
&= A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \frac{1}{24}[B,[A,[B,A]]] + \cdots .
\end{aligned}$$

La comparaison de ce calcul avec le calcul dans ([7], pp. 6.20–6.22) montre que l'algorithme proposé dans la proposition 3.1 apparaît plus rapide que la formule de Dynkin, car ce calcul comporte moins de termes et aussi moins d'annulations.

## 6. Les outils

La démonstration de la proposition 3.1 repose sur deux résultats standard : le théorème de Taylor et la dérivée de l'application exponentielle.

Si $B \in \mathfrak{g}$, alors le champ de vecteurs invariant à gauche $\tilde{B}$ sur $G$ est :

$$\tilde{B}_g = (\ell_g)_* B, \qquad \text{pour } g \in G.$$

**Théorème de Taylor** ([13], Prop. 5.15, p. 125). Soient $f$ une fonction analytique au voisinage d'un point $g \in U \subset G$, et $B$ un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ suffisamment proche de $0$. Alors

$$f(g \exp B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\tilde{B}^k f)(g) = (e^{\tilde{B}} f)(g). \tag{4}$$

**Dérivée de l'application exponentielle** (voir par exemple [7], §6.4, ou [9], p. 67). Soient $X \in V \subset \mathfrak{g}$, puis $C \in T_X\mathfrak{g}$ identifié à $\mathfrak{g}$. Si $g = \exp X$, alors

$$\exp_{*,X}(C) = (\ell_g)_*((\mathrm{td}^{-1} \operatorname{ad} X)(C)). \tag{5}$$

## 7. Comparaison des champs de vecteurs

De (5), on déduit une relation entre les deux champs de vecteurs $\tilde{B}$ et $\bar{B}$ définis par un élément $B$ de $\mathfrak{g}$.

**Proposition 7.1.** *Pour tout $B \in \mathfrak{g}$, les champs de vecteurs $\tilde{B}$ et $\bar{B}$ sur $U'$ sont égaux.*

**Démonstration.** Pour $g \in U'$, on écrit $g = \exp X$. Alors

$$\begin{aligned}
\bar{B}_g &= \exp_{*,X}((\mathrm{td}\operatorname{ad} X)B) && \text{(par définition de } \bar{B})\\
&= (\ell_g)_*(\mathrm{td}^{-1}\operatorname{ad} X)(\mathrm{td}\operatorname{ad} X)B && \text{(d'après l'équation (5))}\\
&= (\ell_g)_* B = \tilde{B}_g && \text{(par définition de } \tilde{B})
\end{aligned}$$

■

## 8. Démonstration de la formule et des règles de calcul

**Démonstration de la prop. 3.1.** Dans le théorème de Taylor (équation (4)), on prend pour $f$ la fonction log et pour $g$ le point $\exp A$. Alors

$$\begin{aligned} f(g \exp B) = \log(\exp A \exp B) &= (e^{\tilde{B}} \log)(\exp A) = (e^{\bar{B}} \log)(\exp A) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\bar{B}^k \log)(\exp A), \end{aligned}$$

puisque $\tilde{B} = \bar{B}$. La convergence de la série est garantie par le théorème de Taylor. ■

**Démonstration de la prop. 4.1.**

i) Soit $g = \exp X$ dans $U'$. Alors $X = \log g$ et

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^* \log)(g) = (\mathcal{C}^*)_g \log = (\exp_{*,X} \mathcal{C}_X)(\log) &= \mathcal{C}_X(\log \circ \exp) \\ = \mathcal{C}_X(\mathrm{id}) = \mathcal{C}_X &= (\mathcal{C} \circ \log)(g). \end{aligned}$$

ii) est clair.

iii) On choisit une base $E_1, \ldots, E_n$ pour $\mathfrak{g}$, puis on écrit

$$[E_i, E_j] = \sum c_{ij}^k E_k.$$

Si $Y = \sum y_i E_i$ et $Z = \sum z_j E_j$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*[Y, Z] &= \mathcal{C}^* \sum c_{ij}^k y_i z_j E_k \\ &= \sum c_{ij}^k (\mathcal{C}^* y_i) z_j E_k + \sum c_{ij}^k y_i (\mathcal{C}^* z_j) E_k \\ &= [\mathcal{C}^* Y, Z] + [Y, \mathcal{C}^* Z], \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{C}^*$ est un champ de vecteurs sur $U'$. ■

## 9. Finitude de l'algorithme

Conservons les notations ci-dessus, à savoir $A$ et $B$ sont deux éléments proches de 0 dans $\mathfrak{g}$, $w_X = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B$ pour $X \in V'$, et $L = \log$. D'après la proposition 3.1,

$$\log(\exp A \exp B) = \left(1 + w^* + \frac{1}{2!}(w^*)^2 + \frac{1}{3!}(w^*)^3 + \cdots\right) L\Big|_{\exp A}. \tag{6}$$

Comme l'expression à droite est une somme infinie, pour qu'elle donne un algorithme effectif, il faut montrer qu'on peut calculer les termes de degré $n$ en un nombre fini d'étapes.

Soit $Y$ un monôme de Lie en $L$ et en $B$. On désigne par $\deg Y$ et $\deg_B Y$ le degré total de $Y$ et le degré de $Y$ en $B$ respectivement. Par exemple,

$$\deg[L, [B, [L, [B, L]]]] = 5 \qquad \text{et} \qquad \deg_B[L, [B, [L, [B, L]]]] = 2.$$

Si $Y$ est un polynôme de Lie homogène, c'est-à-dire dont tous les termes sont de même degré, alors le degré de $Y$ est bien défini.

**Lemme 9.1.** *Soient $W$ un monôme de Lie en $X$ et $B$, et $Y$ un monôme de Lie en $L$ et $B$. Supposons $W^*Y \neq 0$. Alors $W^*Y$ est un polynôme de Lie homogène en $L$ et $B$, et homogène en $B$. De plus,*

*i)* $\deg W^*Y = \deg W + \deg Y - 1$,

*ii)* $\deg_B W^*Y = \deg_B W + \deg_B Y$.

**Démonstration.** i) Effectuons une récurrence sur le degré de $Y$. Lorsque $\deg Y = 1$, on a $Y = B$ ou $Y = L$. Si $Y = B$, alors $W^*Y = 0$. Si $Y = L$, alors

$$\deg W^*L = \deg W \circ L = \deg W = \deg W + \deg L - 1,$$

ce qui démontre i) pour $\deg Y = 1$.

Maintenant supposons que i) est valable pour $W^*Y$ et $W^*Z$. Alors

$$W^*[Y, Z] = [W^*Y, Z] + [Y, W^*Z].$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \deg[W^*Y, Z] &= \deg W^*Y + \deg Z \\ &= \deg W + \deg Y - 1 + \deg Z \\ &= \deg W + \deg[Y, Z] - 1, \end{aligned}$$

et de même pour $[Y, W^*Z]$. Donc,

$$\deg W^*[Y, Z] = \deg W + \deg[Y, Z] - 1.$$

ii) La démonstration est analogue à celle de i), en effectuant une récurrence sur $\deg(Y)$ (et non sur $\deg_B Y$). ∎

**Lemme 9.2.** *Soit $w = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B \in \mathfrak{g}$. Alors le degré en $B$ de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est égal à $k$.*

**Démonstration.** Le lemme est évident pour $k = 1$. D'après le lemme 9.1 et par récurrence sur $k$, nous avons

$$\begin{aligned} \deg_B (w^*)^k L &= \deg_B (w^*((w^*)^{k-1} L)) \\ &= \deg_B w + \deg_B ((w^*)^{k-1} L) \\ &= 1 + (k - 1) = k. \end{aligned}$$ ∎

**Lemme 9.3.** *Pour $k \geq 2$, le degré total (en $L$ et $B$) de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est au moins $k + 1$.*

**Démonstration.** D'après le lemme 2, le degré en $B$ de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est $k$. Si le degré total est $k$, alors il n'y a pas de $L$ dans ce terme. Pour $k \geq 2$, un monôme de Lie en $B$ sans facteurs de $L$ est $0$. Donc, le degré total de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est au moins $k+1$. ■

Il résulte du lemme 9.3 que les termes de degré $n$ de la série de Campbell-Hausdorff (6) sont les termes de degré $n$ de la somme finie

$$\left(1 + w^* + \frac{1}{2!}(w^*)^2 + \cdots \frac{1}{(n-1)!}(w^*)^{n-1}\right) L\Big|_{\exp A}. \qquad (7)$$

D'après le lemme 9.1(i), pour calculer les termes de degré $n$ de $(w^*)^k L$, on peut supprimer tous les termes de degré $> n+1$ de $w^*$. Donc chaque terme $(w^*)^k L$ dans la somme (7) a un nombre fini de termes de degré $n$. Ceci montre que (7) calcule les termes de degré $n$ de la série de Hausdorff en un nombre fini d'étapes.

*Remerciements.* Je remercie l'Institut Henri Poincaré et l'Institut de Mathématiques de Jussieu pour leur hospitalité pendant la période 2001–03, ainsi que Raoul Bott et Paul Gérardin pour maintes discussions fructueuses. Paul Gérardin a lu attentivement plusieurs versions de ce texte et j'ai profité de ses commentaires astucieux. Je tiens aussi à remercier le rapporteur pour des suggestions qui ont amélioré cet article.

## Références

[1] Baker, H. F., *Alternants and continuous groups*, Proc. London Math. Soc., Second Series **3** (1905), 24–47.

[2] Bourbaki, N., "Groupes et algèbres de Lie", chapitre 2, Hermann, Paris, 1972.

[3] Campbell, J. E., *On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups*, Proc. London Math. Soc. (1) **28** (1897), 381–390.

[4] Campbell, J. E., *On a law of combination of operators (second paper)*, Proc. London Math. Soc. **29** (1898), 14–32.

[5] Dynkin, E. B., *Normed Lie algebras and analytic groups*, Amer. Math. Soc. Transl. **1953** (1953), 470–534.

[6] Eichler, M., *A new proof of the Baker-Campbell-Hausdorff formula*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 23–25.

[7] Godement, R., "Introduction à la théorie des groupes de Lie", tome 2, Publications Math. de l'Université Paris 7, Paris, 1982.

[8] Hausdorff, F., *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse **58** (1906), 19–48.

[9] Hausner, M. et J. T. Schwartz, "Lie Groups; Lie Algebras," Gordon and Breach, New York, 1968.

[10] Hofmann, K. H., *Die Formel von Campbell, Hausdorff, und Dynkin und die Definition Liescher Gruppen*, "Theory of Sets and Topology," edited by G. Asser et al, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972, pp. 251–264.

[11] Kobayashi, T. et T. Oshima, "Lie Groups and Lie Algebras" (en japonais), vol. 1, Iwanami Shoten, Tokyo, 2001.

[12] Mneimné, R. et F. Testard, "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques," Hermann, Paris, 1986.

[13] Sagle, A. A. et R. E. Walde, "Introduction to Lie Groups and Lie Algebras," Academic Press, New York, 1973.

[14] Serre, J. P., "Lie Algebras and Lie Groups," Lecture Notes in Math. 1500, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.

[15] Varadarajan, V. S., "Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations," Graduate Text in Math. 102, Springer-Verlag, New York, 1984.

Loring W. Tu
Department of Mathematics
Tufts University
Medford, MA 02155-7049
USA
loring.tu@tufts.edu

Received May 13, 2003
and in final form November 22, 2003