Journal of Lie Theory
Volume **15** (2005) 279–297
© 2005 Heldermann Verlag

Identités de Bernstein explicites et singularités des intégrales de Riesz généralisées

Yann Angeli

Communicated by J. Faraut

Résumé. On exhibe des identités de Bernstein-Sato pour les fonctions puissances des algèbres de Jordan euclidiennes. A l'aide de ces identités, on calcule le plus grand commun diviseur des éléments de l'idéal de Bernstein. On applique ensuite ces résultats à l'étude des distributions de Riesz généralisées, dont on détermine les pôles.
Mathematics Subject Index: 17C, 32D, 32A, 11M41, 43A65, 43A85.
Key words: espace vectoriel préhomogène, algèbre de Jordan, polynome de Bernstein-Sato, fonction de plusieurs variables complexes, fonction Zeta.

1. Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier le prolongement méromorphe d'une famille de distributions qui dépendent analytiquement d'un paramètre composé de plusieurs variables complexes. Ces distributions apparaissent naturellement comme les intégrales *zêta* de certains espaces préhomogènes réels, définis par une algébre de Jordan simple euclidienne réelle de dimension finie, sous l'action d'un sous-groupe parabolique minimal de son groupe de structure.

Nous appelons ces intégrales *zêta* les distributions de Riesz généralisées, car elles englobent en particulier, les distributions $|x|^\alpha$ de la droite réelle, et les distributions de Riesz classiques, introduites pour apporter des solutions fondamentales à l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (cf. [7]). Elles contiennent également les distributions de Riesz associées au cône symétrique d'une algèbre de Jordan (cf. [4]), mais aussi des distributions supportées par des cônes non convexes.

L'étude de ces distributions reposera sur une construction explicite d'identités de type Bernstein-Sato (cf. [2]). L'élaboration de cet outil algébrique possède en outre un intérêt propre, car peu d'exemples de calculs explicites de tels polynômes à plusieurs variables sont connus, en dehors des cas triviaux.

Signalons ensuite que ces polynômes permettent d'étudier les intégrales *zêta* d'espaces préhomogènes définis par une algèbre de Jordan simple réelle euclidienne et n'importe quel sous-groupe parabolique de son groupe de structure (et pas seulement le minimal). Enfin, cette étude trouve des applications dans le domaine

ISSN 0949–5932 / $2.50 © Heldermann Verlag

de l'analyse harmonique sur les espaces symétriques non-riemanniens : dans [1], nous faisons le lien avec un problème de prolongement méromorphe de certaines fonctions sphériques sur de tels espaces.

2. Préliminaires sur les algèbres de Jordan

L'objet central de cette étude est *la fonction puissance* d'une algèbre de Jordan euclidienne. La théorie générale liée à ce type de structure est décrite en détail dans le livre de J. Faraut et A. Korányi [4] auquel nous renvoyons le lecteur pour toutes les notions non explicitées.

Nous désignons par V une *algèbre de Jordan* réelle de dimension finie n, *simple*, et *euclidienne*. Cela signifie que V est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une loi de multiplication commutative qui vérifie l'axiome

$$x(x^2y) = x^2(xy), \quad \forall x, y \in V,$$

que V n'admet aucun idéal non trivial, et que V est doté d'une forme bilinéaire associative définie-positive.

On note L la *représentation régulière* de V, P sa *représentation quadratique*, et $\{.,.,.\}$ le *système triple* associé, à savoir :

$$\begin{aligned} L(x)y &= xy, \quad \forall x, y \in V, \\ P(x) &= 2L(x)^2 - L(x^2), \quad \forall x \in V, \\ \{x, y, z\} &= x(yz) - y(xz) + (xy)z, \quad \forall x, y, z \in V. \end{aligned}$$

L'algèbre V possède un élément neutre e. Etant donné un élément x de V, le sous espace $\mathbb{R}[x]$ de V engendré par e et les différentes puissances de x est une sous-algèbre associative de V. Sa dimension est le rang de x et on définit le *rang* r de V comme le rang maximum d'un élément de V. On définit la *trace* $\mathrm{tr}(x)$ et le *déterminant* $\det(x) = \Delta(x)$ d'un élément x comme étant respectivement la trace et le déterminant de la restriction à $\mathbb{R}[x]$ de $L(x)$. La constante d est un entier défini par la relation

$$n = r + r(r-1)\frac{d}{2}.$$

Lorsqu'un élément x de V a un déterminant non nul, il possède un inverse dans $\mathbb{R}[x]$ qui définit son *inverse* dans V. Nous désignerons par

$$V^\times = \{x \in V : \det(x) \neq 0\},$$

l'ensemble des inversibles de V.

Il existe, à la multiplication par un scalaire positif près, une unique forme bilinéaire, associative et définie positive. On fait le choix d'une telle forme :

$$\tau(x, y) := \mathrm{tr}(xy), \quad \forall x, y \in V.$$

Si $g \in \mathfrak{gl}(V)$ est une application linéaire de V, nous noterons g' son adjoint pour la forme τ.

Cela nous amène à la définition du *groupe de structure* de V :

$$Str(V) := \{g \in GL(V) : \forall x \in V, \quad gP(x)g' = P(g \cdot x)\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $GL(V)$, et un groupe de Lie réductif. Il contient le groupe des *automorphismes* de V :

$$Aut(V) = \{g \in G : \forall x, y \in V \quad g \cdot (xy) = (g \cdot x)(g \cdot y)\},$$

qui en est un sous-groupe compact maximal.

La composante connexe de l'élément neutre dans $Str(V)$ est $G = Str(V)_o$, celle de $Aut(V)$ est notée $K = Aut(V)_o$. Ces groupes sont d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$, naturellement plongées dans $\mathfrak{gl}(V)$. L'involution θ définie sur $\mathfrak{g}$ par $\theta(X) = -X'$ est une involution de Cartan. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathfrak{k}$, le sous-espace correspondant à -1 est $\mathfrak{p} = L(V)$.

Etant donnés un élément x de V et un réel λ, nous notons

$$V(x, \lambda) = \{y \in V \mid xy = \lambda x\}.$$

Soit c un *idempotent* de V, c'est-à-dire un élément de V tel que $c^2 = c$. On a :

$$V = V(c, 1) \oplus V(c, 1/2) \oplus V(c, 0).$$

Cette somme directe est orthogonale par rapport à τ. On l'appelle *décomposition de Peirce* relative à l'idempotent c. A partir de l'idempotent c, on est en mesure de définir pour chaque $z \in V(c, 1/2)$, l'*opérateur de Frobenius* :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{c,z} &= \exp(L(z) + 2[L(z), L(c)]) \\ &= \exp(2\{c, z, .\}) \\ &= I + 2\{c, z, .\} + 2\{c, z, .\}^2. \end{aligned}$$

En fixant $x = x_0 + x_{1/2} + x_1$ dans V, avec x_λ sa composante dans V_λ, on obtient pour $y = \Upsilon_{c,z}(x)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_{1/2} &= 2zx_1 + x_{1/2} \\ y_0 &= 2(e - c)(z(zx_1)) + 2(e - c)(zx_{1/2}) + x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ces résultats sont mentionnés dans [4] aux pages 106 et 107. Citons ensuite une propriété importante de ces opérateurs, démontrée en particulier dans la proposition 3 de [6] :

Proposition 2.1. *Soit $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ dans V, avec $x_\lambda \in V_\lambda$, et x_1 inversible dans V_1. Alors il existe un $z \in V_{1/2}$ et un $y_0 \in V_0$, uniques tels que :*

$$x = \Upsilon_{c,z}(x_1 + y_0).$$

En outre, $z = 2x_1^{-1}x_{1/2}$ et $y_0 = x_0 - 2c(x_{1/2}(x_1^{-1}x_{1/2}))$.

Nous faisons le choix pour V d'un repère de Jordan $(c_i)_{i=1}^r$, voir [4], §IV.2 p. 68. C'est un système de r idempotents minimaux deux à deux orthogonaux. Soit i un entier entre 1 et r. D'après la proposition IV.1.1 de la même référence, les sous-espaces suivants sont des sous-algèbres euclidiennes de V :

$$V_i = V(c_1 + \ldots + c_i, 1) \ ; \ V_{r-i}^* = V(c_1 + \ldots + c_i, 0).$$

On pose $\mathfrak{a} = L(\mathbb{R}c_1 + \ldots + \mathbb{R}c_r) \subset \mathfrak{p}$. C'est un sous-espace de Cartan dans $\mathfrak{p}$. Nous définissons l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ par

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} \{\{c_i, z, .\} : z \in V(c_i, 1/2) \cap V(c_j, 1/2)\}.$$

Les sous-groupes de G d'algèbres respectives $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ sont notés A et N. Enfin, M désigne le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K.

La composée de la projection orthogonale π_i de V sur V_i (resp. π_i^* de V sur V_i^*) et du déterminant de V_i (resp. V_i^*) est notée Δ_i (resp. Δ_i^*). Posons

$$V^{\#} = \{x \in V \mid \Delta_1(x) \ldots \Delta_r(x) \neq 0\}.$$

Fixons ensuite une détermination du logarithme sur un domaine complexe qui contient les réels privés de 0 : cette détermination sert désormais à la définition des puissances complexes de réels non nuls. Pour x dans $V^{\#}$, nous pouvons alors construire la *fonction puissance* de l'algèbre V :

$$\Delta^\alpha(x) = \Delta_1(x)^{\alpha_1} \ldots \Delta_r(x)^{\alpha_r},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est un r-uplet complexe. Pour simplifier certaines formules, nous adopterons également la notation suivante :

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x) = \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \ldots \Delta_{r-1}(x)^{s_{r-1} - s_r} \Delta_r(x)^{s_r},$$

où $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ est un r-uplet complexe. Le lien entre ces deux notations est donné par :

$$\Delta_{\mathbf{s}} = \Delta^\alpha \Leftrightarrow s_i = \alpha_i + \ldots + \alpha_r, \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Notons $\mathbf{s}^* = (s_r, \ldots, s_1)$. Les principales propriétés de ces fonctions puissances peuvent être résumées en :

Proposition 2.2. *Fixons $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$. La fonction puissance $x \mapsto \Delta_{\mathbf{s}}(x)$ satisfait les propriétés suivantes :*

- *Puissance de l'inverse : Pour x inversible,*

$$\Delta_{\mathbf{s}}(x^{-1}) = \Delta_{-\mathbf{s}^*}^*(x). \tag{2}$$

- *Action du parabolique minimal MAN : pour tout $(m, a, n) \in M \times A \times N$,*

$$\Delta_{\mathbf{s}}(man \cdot x) = \chi_{\mathbf{s}}(a) \Delta_{\mathbf{s}}(x) \tag{3}$$

où $\chi_{\mathbf{s}}$ est le caractère de A défini pour $a = P(\sum_{i=1}^r a_i c_i) \in A$ par :

$$\chi_{\mathbf{s}}(a) := a_1^{2s_1} \ldots a_r^{2s_r}.$$

• *Action du groupe* G *: pour tout* $(g,x)\in G\times V$,

$$\Delta(g\cdot x)=Det(g)^{\frac{r}{n}}\Delta(x). \tag{4}$$

• *Identité de type Bernstein : pour* $\mathbf{m}\in\mathbb{N}^r$ *tel que* $m_1\geq m_2\geq\ldots\geq m_r$, *et* $\partial(p)$ *l'opérateur différentiel défini à partir du polynôme* p *sur* V *par* $\partial(p)\exp(\tau(x,y))=p(y)\exp(\tau(x,y))$, *on a :*

$$\partial(\Delta^*_{\mathbf{m}})\Delta_{\mathbf{s}}(x)=\left(\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{m_{r-i+1}}\left(s_i-m_{r-i+1}+j+(r-i)\frac{d}{2}\right)\right)\Delta_{\mathbf{s}-\mathbf{m}^*}(x). \tag{5}$$

Tous ces résultats figurent dans [4]. L'identité de Bernstein est l'objet de la proposition VII.1.6, la puissance de l'inverse celui de la proposition VII.1.5(ii), l'action du sous-groupe parabolique minimal se déduit de la proposition VI.3.10 et de la remarque de la page 224, et l'action du groupe G est décrite dans la proposition III.4.3.

Notons $\mathbf{1}_1,\ldots,\mathbf{1}_r$ la base canonique de $\mathbb{C}^r$. Soit D un opérateur différentiel sur V, qui dépend de $\alpha\in\mathbb{C}^r$ et de $x\in V$ de façon polynomiale, et soit b un polynôme sur $\mathbb{C}^r$. Nous dirons que le couple (D,b) satisfait la k-ème *identité de Bernstein-Sato* si et seulement si pour tout $x\in V^{\#}$,

$$D(x,\alpha,\partial)\Delta^{\alpha}(x)=b(\alpha)\Delta^{\alpha-\mathbf{1}_k}(x). \tag{6}$$

Le k-ème *idéal de Bernstein* $\mathcal{I}_k$ est l'ensemble des polynômes b qui apparaissent dans les couples qui satisfont (6).

De façon générale, un résultat de C. Sabbah, dans [8], assure l'existence d'identités non triviales ($b\neq 0$) de type (6). Plus précisemment, il prouve l'existence dans $\mathcal{I}_k$ de polynômes qui se décomposent en produits de facteurs de degré un. Toutefois, ces polynômes ne sont pas connus explicitement.

Dans certains cas, on dispose de la forme explicite de ces polynômes. Ainsi, la formule suivante, exhibe un polynôme pour l'identité relative à Δ_r (qui est un cas particulier de (5)) :

$$\begin{aligned}\partial(\Delta_r)\Delta^{\alpha}(x) &= \left(\prod_{i=1}^{r}\omega_{ir}(\alpha)\right)\Delta^{\alpha-\mathbf{1}_r}(x), \qquad (7)\\ \omega_{ij} &: \mathbb{C}^r\to\mathbb{C}\quad \mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_r)\mapsto z_i+\ldots+z_j+\frac{d}{2}(j-i).\end{aligned}$$

Les formes affines ω_{ij} joueront un rôle important dans la suite. Par abus de langage, si $1\leq i\leq j\leq r-1$, on notera encore ω_{ij} la forme affine définie de la même façon sur $\mathbb{C}^{r-1}$.

Dans la section 4., nous construisons des couples satisfaisant (6). Nous nous en servons dans la section 5. pour déterminer la borne inférieure de $\mathcal{I}_k$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur de tous les polynômes qui satisfont (6). Enfin, dans la section 6., nous exploitons ces résultats pour déterminer un ensemble contenant les pôles des intégrales zêta.

3. Construction d'un opérateur auxiliaire

Cette section est dévolue à la construction d'un opérateur différentiel auxiliaire, polynômial en $\alpha \in \mathbb{C}^r$ et en $x \in V$, qui interviendra dans la fabrication d'identités de type (6). Nous aurons besoin du matériel contenu dans le chapitre XI de [4], où les auteurs étudient la décomposition en sous-espaces irréductibles de la représentation quasi-régulière à gauche de G sur les polynômes.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes sur V. On munit $\mathcal{P}$ du produit scalaire de Fisher :

$$(p,q)_F := (\partial(p)\overline{q}(z))|_{z=0}, \forall p,q \in \mathcal{P}.$$

On considère la représentation $(\pi, \mathcal{P})$ de G donnée par

$$\pi(g)p = p \circ g^{-1}, \ \forall p \in \mathcal{P} \text{ et } \forall g \in G.$$

Définissons à présent les polynômes qui seront les vecteurs de plus haut poids restreint pour les représentations irréductibles de la décomposition de $(\pi, \mathcal{P})$. On dit qu'un r-uplet d'entiers $\mathbf{m}$ est *dominant*, et on note $\mathbf{m} \geq 0$, si et seulement si on a les inégalités :

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r \geq 0.$$

Adoptons la notation suivante, avec $\mathbf{m}$ dominant :

$$\Delta_{\mathbf{m}}(x) = \Delta_1(x)^{m_1-m_2}\Delta_2(x)^{m_2-m_3}\ldots\Delta_r(x)^{m_r}.$$

Le sous-espace de $\mathcal{P}$ invariant par π engendré par $\Delta_{\mathbf{m}}$ est noté $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$. Ces espaces satisfont ([4], XI.2.4) :

Proposition 3.1. *Les espaces $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ sont irreductibles pour π. En outre, ils sont deux à deux distincts et inéquivalents comme sous-espaces irréductibles, et on a la somme directe orthogonale suivante :*

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{\mathbf{m}\geq 0} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}.$$

Citons un résultat, extrait de la proposition A5 de [5], qui donne un généralisation de la théorie du plus haut poids des représentations d'algèbres de Lie semi-simples complexes à certaines représentations d'algèbres de Lie réductives réelles.

Proposition 3.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive réelle de dimension finie, munie d'une involution de Cartan θ. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on définit $X' = -\theta(X)$. On choisit une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. Soit $(\rho, \mathcal{E})$ une représentation irréductible réelle. On la suppose involutive, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est un espace de Hilbert, $*$ l'adjoint des endomorphismes par rapport au produit hermitien de $\mathcal{E}$ et $\rho(X') = \rho(X)^*, \forall X \in \mathfrak{g}$. Alors, d'une part, il existe $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, appelé plus haut poids restreint de $(\rho, \mathcal{E})$, tel que*

$$\{x \in \mathcal{E} \mid \mathfrak{n} \cdot x = \{0\}\} = \mathcal{E}_\lambda := \{v \in \mathcal{E} \mid (\forall X \in \mathfrak{a}) : Xv = \lambda(X)v\},$$

et que cet espace soit un $\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$*-module irréductible. Et d'autre part, l'ensemble des poids restreints* $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ *de* $(\rho, \mathcal{E})$ *satisfait à :*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E}} \subseteq \big(\lambda - \mathbb{N}[\Delta^+]\big) \cap conv(\mathcal{W} \cdot \lambda),$$

où $\mathcal{W}$ *est le groupe de Weyl associé au système de racines restreintes* $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$*.*

Remarquons que la représentation $(\pi, \mathcal{P}_{\mathbf{m}})$ est involutive : $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ muni du produit de Fisher est un espace de Hilbert, et π satisfait d'après [4], XI.1.2 :

$$\pi(X') = \pi(X)^*, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Identifions ensuite $\mathbb{C}^r$ au dual $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$ en posant pour $\mu \in \mathbb{C}^r$:

$$\mu : \mathfrak{a} \to \mathbb{C} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i L(c_i) \mapsto \sum_{i=1}^{r} \mu_i a_i.$$

Corollaire 3.3. *Soit* $\mu \in \mathbb{C}^r$ *un poids de la représentation* $(\pi, \mathcal{P}_{\mathbf{m}})$*. Alors on a :*

$$\mu \in \big(\mathbf{m} - \mathbb{N}[\Delta^+]\big) \cap conv(\mathcal{W} \cdot \mathbf{m}). \tag{8}$$

Démonstration. D'après le corollaire XI.2.5 de [4], $\mathbf{m}$ est le plus haut poids restreint de la représentation $(\pi, \mathcal{P}_{\mathbf{m}})$. Le résultat précédent permet alors de conclure. ■

Pour tout $x \in V^{\#}$, tout r-uplet complexe α, et tout entier k compris entre 1 et $r-1$, on pose :

$$D_k(\alpha, x) := \big(\Delta_{k+1}(x)^{1+\alpha_{k+1}} \dots \Delta_r(x)^{1+\alpha_r}\big) \circ \partial(\Delta_k) \circ \big(\Delta_{k+1}(x)^{-\alpha_{k+1}} \dots \Delta_r(x)^{-\alpha_r}\big),$$

où $C^\infty(V^{\#})$ opère par la multiplication usuelle des fonctions. On définit également $D_r(\alpha, x) := \partial(\Delta_r)$.

Nous allons montrer que, pour des raisons d'homogénéité par rapport à la représentation π, ces opérateurs sont polynômiaux en α et x. Donnons d'abord un lemme, analogue fort du fait qu'un opérateur différentiel homogène de degré k annule les polynômes de degré strictement inférieur :

Lemme 3.4. *Soient* $\mathbf{m}$ *et* $\mathbf{n}$ *dominants et tels qu'il existe un entier* $i \in \{1, \dots, r\}$ *vérifiant* $n_i > m_j$ *pour tout* $j \in \{1, \dots, r\}$*. Alors on a :* $\partial(\mathcal{P}_{\mathbf{n}})\mathcal{P}_{\mathbf{m}} = 0$*.*

Démonstration. Commençons par démontrer que $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})\mathcal{P}_{\mathbf{m}} = 0$. Soit $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$, un vecteur de poids restreint μ. D'après la formule (8), on a d'une part

$$\mu \in \mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbb{N}[\mathbf{1}_2 - \mathbf{1}_1, \dots, \mathbf{1}_r - \mathbf{1}_{r-1}],$$

donc $\mu_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. D'autre part, $\mu \in \mathrm{conv}(\mathcal{W} \cdot \mathbf{m})$, donc

$$0 \le \min_{j=1..r} m_j \le \mu_i \le \max_{j=1..r} m_j < n_i.$$

Posons pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} a_t &= P(e + (t-1)c_i) = P(\exp(\log(t)c_i)) \\ &= \exp L(2\log(t)c_i) = \exp L(\log(t^2)c_i), \end{aligned}$$

C'est clairement un élément de A. En vertu de (3) :

$$\pi(a_t)\Delta_{\mathbf{n}} = t^{-2n_i}\Delta_{\mathbf{n}} \text{ et } \pi(a_t^{-1})p = t^{2\mu_i}p.$$

En appliquant la formule de la démonstration XI.1.2 page 222 de [4],

$$\partial(p) \circ \pi(g) = \pi(g) \circ \partial(\pi(g^*)p), \tag{9}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^{2(n_i-\mu_i)}}\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p &= t^{2\mu_i}\partial(\pi(a_t)\Delta_{\mathbf{n}})p \\ &= t^{2\mu_i}\pi(a_t^{-1})(\partial(\Delta_{\mathbf{n}}) \circ \pi(a_t)p) \\ &= \pi(a_t^{-1})(\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p). \end{aligned}$$

Or le membre de droite est polynomial en t, car

$$\{\pi(a_t^{-1})Q\}(X) = Q(P(e + (t-1)c_i)X)$$

est polynômial en t pour tout polynôme Q. Et le membre de gauche n'est borné près de $t = 0$ que si $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p = 0$. On a donc effectivement $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p = 0$.

En utilisant la formule (9), et le fait que $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$ est engendré par $\pi(G)\Delta_{\mathbf{n}}$, on généralise la formule $\partial(\Delta_{\mathbf{n}})p = 0$ à $\mathcal{P}_{\mathbf{n}}$. ∎

Théorème 3.5. *Pour tout entier k compris entre 1 et r, $D_k(\alpha,x)$ est un opérateur différentiel polynômial en x et α.*

Démonstration. Nous allons démontrer que le symbole de $D_k(\alpha,x)$ est polynômial en toutes ses variables. A cette fin, deux étapes seront nécessaires. On va commencer par expliciter l'action de $\partial(\Delta_k)$ sur un produit de h fonctions C^∞ sur V, puis on va l'appliquer aux $h = r - k + 1$ fonctions $\Delta_{k+1}(x)^{-\alpha_{k+1}}, \ldots, \Delta_r(x)^{-\alpha_r}$ et $\exp\tau(x,y)$.

• *Etape 1 : réalisation de $\partial(p)$ sur $\bigotimes_{j=1}^h C^\infty(V) =: C^\infty(V)^{\otimes h}$.*

L'application

$$m : C^\infty(V)^h \to C^\infty(V), (f_1, \ldots, f_h) \mapsto f_1 \ldots f_h$$

étant h-linéaire, elle se factorise par la surjection

$$s : C^\infty(V)^h \to C^\infty(V)^{\otimes h}$$

en une unique :

$$\widetilde{m} : C^\infty(V)^{\otimes h} \to C^\infty(V) \text{ linéaire telle que } \widetilde{m} \circ s = m.$$

Montrons que pour un polynôme p homogène de degré k, il existe un opérateur linéaire sur l'espace $C^\infty(V)^{\otimes h}$,

$$\widetilde{\partial}(p) \in \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_i|=k} \bigotimes_{i=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_i}),$$

tel que

$$\widetilde{m} \circ \widetilde{\partial}(p) = \partial(p) \circ \widetilde{m}.$$

On raisonne par récurrence sur le degré d'homogénéité. Pour $k = 0$, c'est évident. Si Y est un monôme de degré un de $\mathcal{P}$, la formule de dérivation classique nous donne pour tout $f_i \in C^\infty(V)$, $i = 1, \ldots, h$:

$$\partial(Y) \circ m(f_1, \ldots, f_h) = \sum_{i=1}^{h} m(f_1, \ldots, f_{i-1}, \partial(Y) f_i, f_{i+1}, \ldots, f_h),$$

donc

$$\partial(Y) \circ \widetilde{m} = \widetilde{m} \circ \left(\sum_{i=1}^{h} \otimes_{j=1}^{i-1} 1 \otimes \partial(Y) \otimes_{j=i+1}^{h} 1 \right).$$

Or pour tout $i = 1, \ldots, h$:

$$\begin{aligned} \left(\otimes_{j=1}^{i-1} 1 \otimes \partial(Y) \otimes_{j=i+1}^{h} 1\right) \quad & \left(\bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l|=k-1} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l})\right) \\ \subset \quad & \bigoplus \textstyle\sum_{\mathbf{d}_l|=k|\mathbf{d}_i|\geq 1} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}) \\ \subset \quad & \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l|=k} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}). \end{aligned}$$

Ainsi, nous démontrons par récurrence le résultat attendu, en écrivant p homogène de degré k comme une somme de produits d'un monôme de degré un et d'un polynôme homogène de degré $k-1$.

On définit $< j >$ comme étant le r-uplet dont les j premiers coefficients valent 1 et les $r - j$ derniers valent 0. On a en particulier $\Delta_{<j>} = \Delta_j$. Prouvons à présent que pour $p \in \mathcal{P}_{<k>}$,

$$\widetilde{\partial}(p) \in \bigoplus_{\sum n_i=k} \bigotimes_{i=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{<n_i>}) \tag{10}$$

Donnons nous une base $(p_\alpha) = (p_\alpha^1 \otimes \ldots \otimes p_\alpha^h)$ de l'espace

$$\bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l|=k} \bigotimes_{l=1}^{h} \mathcal{P}_{\mathbf{d}_l},$$

et choisissons-la orthonormée pour le produit hermitien $\langle ., . \rangle_F$ hérité de celui des $\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}$, et telle que pour tout α, et tout $l \in \{1, \ldots, h\}$,

$$p_\alpha^l \in \mathcal{P}_{\mathbf{d}_l}$$

pour un certain $(\mathbf{d}_l)_{l=1}^h$. L'espace

$$\bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l|=k} \bigotimes_{l=1}^{h} \partial(\mathcal{P}_{\mathbf{d}_l})$$

est aussi muni du produit hermitien provenant de $\langle .,. \rangle_F$:

$$\langle \partial(p), \partial(q) \rangle_F := \langle p, q \rangle_F \ \ \forall p, q \in \bigoplus_{\sum |\mathbf{d}_l|=k} \bigotimes_{l=1}^{h} \mathcal{P}_{\mathbf{d}_l},$$

qui fait de $(\partial(p_\alpha)) = (\partial(p_\alpha^1) \otimes \ldots \otimes \partial(p_\alpha^h))$ une base orthonormée. Considérons la décomposition de $\widetilde{\partial}(p)$ dans cette base : il existe des complexes λ_α tels que

$$\widetilde{\partial}(p) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial(p_\alpha^1) \otimes \ldots \otimes \partial(p_\alpha^h).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda_\beta &= \sum_\alpha \lambda_\alpha \langle \partial(p_\alpha), \partial(p_\beta) \rangle_F \\
&= \sum_\alpha \lambda_\alpha \left(\partial(p_\alpha^1) p_\beta^1 \otimes \ldots \otimes \partial(p_\alpha^h) p_\beta^h \right) |_0 \\
&= \widetilde{m} \circ \widetilde{\partial}(p) \Big|_0 p_\beta \\
&= \partial(p)|_0 \, (p_\beta^1 \ldots p_\beta^h) \\
&= \left\langle p, p_\beta^1 \ldots p_\beta^h \right\rangle_F \\
&= \left\langle \partial(p_\beta^j) p, p_\beta^1 \ldots p_\beta^{j-1} p_\beta^{j+1} p_\beta^h \right\rangle_F,
\end{aligned}$$

pour tout $j = 1, \ldots, h$. Si $p_\beta \notin \bigotimes_{i=1}^h \partial(\mathcal{P}_{<n_i>})$ pour certains n_i, il existe j tel que $p_\beta^j \in \mathcal{P}_{\mathbf{d}_j}$ avec $\mathbf{d}_j$ ayant l'un de ses coefficients strictement supérieur à 1 :

$$\mathbf{d}_j^i > 1 =< k >_1 = \ldots < k >_k > 0 =< k >_{k+1} = \ldots =< k >_r,$$

et nous sommes dans le cadre d'application du lemme 3.4. Ainsi, $\partial(p_\beta^j)p = 0$ et par conséquent, $\lambda_\beta = 0$. Nous avons bien, en conclusion, la formule (10).

• *Etape 2 : étude de* $\partial(\mathcal{P}_{<k>})\Delta(x)^\alpha$.

La proposition XI.5.1 page 235 de [4] indique que pour tout $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ et $x \in V^\times$,

$$\partial(p)\Delta(x)^\alpha = \left(\prod_{j=1}^{r} \prod_{i=0}^{m_j - 1} \left(\alpha - i + \frac{d}{2}(j-1) \right) \right) \Delta(x)^\alpha p(x^{-1}). \qquad (11)$$

Par ailleurs, comme le montre la formule (2),

$$\Delta_k \left(x^{-1} \right) = \Delta_{r-k}^*(x) \Delta^{-1}(x).$$

Cette relation s'étend à $\mathcal{P}_{<k>}$ car d'une part cet espace est engendré par $\pi(G)\Delta_k$, et d'autre part on a (4) : $\Delta(g \cdot x) = (\det g)^{\frac{r}{n}} \Delta(x)$ et $(g \cdot x)^{-1} = g'^{-1} \cdot x^{-1}$ ([4], proposition VIII.2.5). Par conséquent,

$$\forall p \in \mathcal{P}_{<k>}, \exists q \in \mathcal{P}_{<r-k>} \mid (\forall x \in V^\times) \ p(x^{-1}) = q(x)\Delta(x)^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\partial(p)\Delta(x)^\alpha &= \prod_{j=1}^{k}\left(\alpha+\frac{d}{2}(j-1)\right)\Delta(x)^\alpha p(x^{-1})\\ &= \prod_{j=1}^{k}\left(\alpha+\frac{d}{2}(j-1)\right)q(x)\Delta(x)^{\alpha-1}\\ &= Q_k(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

où Q_k est le polynôme en x et α donné par :

$$Q_k(\alpha,x)=\prod_{j=1}^{k}\left(\alpha+\frac{d}{2}(j-1)\right)q(x).$$

• *Conclusion :*

On pose $f_i(x)=\Delta_{k+i}(x)^{-\alpha_{k+i}}$ pour $i=1,\dots,r-k$ et $f_0(x)=\exp(\tau(x,y))$. D'après la première étape, l'opérateur $\partial(\Delta_k)\in\partial(\mathcal{P}_{<k>})$ agit comme il suit sur le produit $f_0(x)\dots f_{r-k}(x)$:

$$\partial(\Delta_k)f_0(x)\dots f_{r-k}(x)=\sum_{(k=\sum n_i)}\prod_{i=0}^{r-k}\partial(p_{n_i})f_i(x),$$

où $p_{n_i}\in\mathcal{P}_{<n_i>}$. Les facteurs en $\partial(p_{n_0})f_0(x)$ sont de la forme $p_{n_0}(y)\exp(\tau(x,y))$.

Considérons les facteurs $\partial(p_{n_i})f_i(x)$ pour $i\in\{1..r-k\}$. On applique le résultat de la seconde étape à l'algèbre V_{k+i}. Il vient :

$$\partial(p_{n_i})f_i(x)=Q_{n_i}(\alpha_{k+i},x)f_i(x)\Delta_{k+i}(x)^{-1}.$$

Ainsi chaque terme se présente sous la forme :

$$Q(\alpha,x,y)f_0(x)\prod_{j=1}^{r-k}\frac{f_j(x)}{\Delta_{k+j}(x)}=Q(\alpha,x,y)\left(\prod_{j=k+1}^{r}\Delta_j^{1+\alpha_j}(x)\right)^{-1}\exp(\tau(x,y))$$

avec Q polynômial en ses trois variables. D'où nous obtenons :

$$D_k(\alpha,x)\exp(\tau(x,y))=Q(\alpha,x,y)\exp(\tau(x,y)),$$

ce qui achève la preuve du théorème. ∎

Comme D_k, défini sur $V^{\#}$, est polynômial, il s'étend en un opérateur polynômial sur V tout entier.

Proposition 3.6. *Sur V, on a pour chaque entier k compris entre 1 et r, l'identité suivante :*

$$D_k(\alpha,x)\Delta(x)^\alpha=b_k(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbb{1}_k+\mathbb{1}_{k+1}+\dots+\mathbb{1}_r}$$

où

$$\alpha-\mathbb{1}_k+\mathbb{1}_{k+1}+\dots+\mathbb{1}_r=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k-1,\alpha_{k+1}+1,\dots,\alpha_r+1),$$

et

$$b_k(\alpha)=\prod_{i=1}^{k}\omega_{ik}(\alpha)=\prod_{i=1}^{k}\left(\alpha_i+\dots+\alpha_k+\frac{d}{2}(k-i)\right).$$

Démonstration. On utilise la formule (5) dans V_k, appliquée à $\Delta_{\mathbf{s}(\alpha)}$ où $\mathbf{s}(\alpha)_i = \alpha_i + \ldots + \alpha_k$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $\mathbf{m} = \langle k \rangle = (1, \ldots, 1)$. On trouve :

$$\begin{aligned} \partial(\Delta_k)\Delta^{(k)}_{\mathbf{s}(\alpha)} &= \left(\prod_{i=1}^k \left(s(\alpha)_i + (k-i)\tfrac{d}{2}\right)\right) \Delta^{(k)}_{\mathbf{s}(\alpha)-<k>} \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \omega_{ik}(\alpha)\right) \Delta^{(k)}_{\mathbf{s}(\alpha)-<k>} \end{aligned}$$

où

$$(\mathbf{s}(\alpha)- < k >)_i = \alpha_i + \ldots + \alpha_k - 1 = \mathbf{s}(\alpha - \mathbf{1}_k)_i.$$

Puis, en multipliant par $\prod_{j=k+1}^r \Delta_j(x)^{1+\alpha_j}$, nous obtenons le résultat. ■

Remarque 3.7. Nous observons que pour k fixé, D_k ne dépend par définition que des complexes $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r$, alors que b_k ne dépend lui que de $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

4. Identités de Bernstein-Sato

Dans la section précédente, on a mis en évidence une famille explicite d'opérateurs D_k, qui agissent sur Δ^α en décalant l'exposant de

$$-\mathbf{1}_k + \mathbf{1}_{k+1} + \ldots + \mathbf{1}_r.$$

En composant successivement ces opérateurs, avec un bon choix de α à chaque étape, on obtient un opérateur P_k qui satisfait la formule (6). En fonction de l'ordre de composition, l'opérateur P_k et le polynôme B_k obtenus varient, comme vont l'illuster les deux exemples suivants.

Exposons d'abord le procédé de construction des deux exemples.
Dans le premier exemple, nous commenons par appliquer l'opérateur $D_k(\alpha, x)$, afin d'abaisser de 1 l'exposant d'indice k. Les exposants suivant seront alors augmentés de 1. Nous allons ensuite appliquer D_{k+1}, avec le nouveau paramètre $\alpha - \mathbf{1}_k + \mathbf{1}_{k+1} + \ldots + \mathbf{1}_r$. A cette étape, le k-ème exposant est diminué de 1, le $(k{+}1)$ème est inchangé et les suivants sont augmentés de 2. On réitère l'algorithme, en appliquant D_{k+2} deux fois (en prenant soin de changer le paramètre à chaque étape), puis D_{k+3} quatre fois, et ainsi de suite jusqu'à D_r, appliqué 2^{r-k-1} fois. Le décalage final est donc de $-\mathbf{1}_k$.

Dans le second exemple, on choisit l'ordre de composition inverse : on commence par 2^{r-k-1} applications de D_r, puis 2^{r-k-2} applications de D_{r-1}, jusqu'à D_{k+1} appliqué une fois, et enfin une application de D_k. A chaque étape, il faut prendre soin de modifier l'argument en α de chaque opérateur. On obtient d'une autre façon le décalage $-\mathbf{1}_k$.

Exemple 4.1. Considérons les opérateurs suivants, où le produit désigne la composition, effectuée dans l'ordre croissant des indices, et où $j \in \{k+1, \ldots, r\}$:

$$C_{jk}(\alpha, x) := \prod_{i=1}^{2^{j-k-1}} D_j\left(\mathbf{a}(\alpha,k,j,i), x\right),$$

où l'argument $\mathbf{a}(\alpha,k,j,i)$ est donné par :

$$\mathbf{a}(\alpha,k,j,i) = \alpha - \mathbf{1}_k + (2^{j-k-1} - (i-1))\mathbf{1}_j + (i - 1 + 2^{j-k-1})(\mathbf{1}_{j+1} + \ldots + \mathbf{1}_r).$$

Alors, nous avons :

$$C_{jk}(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha-\mathbb{1}_k+2^{j-k-1}(1_j+\ldots+1_r)}=c_{jk}(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbb{1}_k+2^{j-k}(\mathbb{1}_{j+1}+\ldots+\mathbb{1}_r)}.$$

où, compte tenu du fait que $b_j(\alpha)$ ne dépend que de $\alpha_1,\ldots,\alpha_j$,

$$c_{jk}(\alpha)=\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}}b_j\left(\alpha-\mathbb{1}_k+\left(2^{j-k-1}-(i-1)\right)\mathbb{1}_j\right)$$

D'où, l'opérateur $E_k^+(\alpha,x):=C_{r,k}(\alpha,x)\circ\ldots\circ C_{k+1,k}(\alpha,x)\circ D_k(\alpha,x)$ satisfait l'identité (6) :

$$E_k^+(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha}=B_k^+(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbb{1}_k},$$

avec

$$B_k^+(\alpha)=b_k(\alpha)\prod_{j=k+1}^{r}\left(\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}}b_j\left(\alpha-\mathbb{1}_k+(2^{j-k-1}-(i-1))\mathbb{1}_j\right)\right).$$

Exemple 4.2. Considérons une seconde famille d'opérateurs, avec les mêmes conventions pour le produit et la somme, et avec $j\in\{k+1,\ldots,r\}$:

$$A_{jk}(\alpha,x)\ :=\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}}D_j\left(\alpha-(i-1)\mathbb{1}_j+(i-1-2^{j-k})(\mathbb{1}_{j+1}+\ldots+\mathbb{1}_r),x\right),$$

avec la convention qu'une somme d'indice inital strictement supérieur à l'indice final est nulle. Alors, nous avons :

$$A_{jk}(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha-2^{j-k}(\mathbb{1}_{j+1}+\ldots+\mathbb{1}_r)}=a_{jk}(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-2^{j-k-1}(\mathbb{1}_j+\mathbb{1}_{j+1}+\ldots+\mathbb{1}_r)}.$$

où, $b_j(\alpha)$ ne dépendant que de $\alpha_1,\ldots,\alpha_j$, a_{jk} est le polynôme :

$$a_{jk}(\alpha)=\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}}b_j\left(\alpha-(i-1)\,\mathbb{1}_j\right)$$

D'où, l'opérateur

$$E_k^-(\alpha,x):=D_k(\alpha-(\mathbb{1}_{k+1}+\ldots+\mathbb{1}_r),x)\circ A_{k+1,k}(\alpha,x)\circ\ldots\circ A_{r,k}(\alpha,x)$$

vérifie :

$$E_k^-(\alpha,x)\Delta(x)^{\alpha}=B_k^-(\alpha)\Delta(x)^{\alpha-\mathbb{1}_k},$$

avec

$$B_k^-(\alpha)=b_k(\alpha)\prod_{j=k+1}^{r}\left(\prod_{i=1}^{2^{j-k-1}}b_j\left(\alpha-(i-1)\,\mathbb{1}_j\right)\right).$$

Comme nous le verrons dans la section suivante, le plus grand commun diviseur des polynômes B_k^+ et B_k^- est en fait le plus grand commun diviseur de l'idéal $\mathcal{I}_k$.

Proposition 4.3. *Le plus grand commun diviseur de* $B_k^-(\alpha)$ *et* $B_k^+(\alpha)$ *est*

$$\widetilde{B}_k(\alpha) = \prod_{1 \le i \le k \le j \le r} \omega_{ij}(\alpha).$$

Démonstration. Le polynôme $b_k(\alpha)$ est un facteur commun.
Fixons deux vecteurs $\beta, \gamma \in \mathbb{C}^r$.
Observons ensuite que, lorsque $j \neq \ell$, les facteurs de degré un de $b_j(\alpha+\beta)$ et $b_\ell(\alpha+\gamma)$ sont deux à deux distincts (si $j < \ell$, les facteurs de b_ℓ contiennent le monôme α_ℓ, mais pas ceux de b_j.).

On fixe $j > k$. Les polynômes en α donnés par $b_j(\alpha+\beta)$ et $b_j(\alpha+\gamma)$ ont des facteurs communs si et seulement s'il existe $\ell \le j$ tel que

$$\beta_\ell + \ldots + \beta_j = \gamma_\ell + \ldots + \gamma_j.$$

Dans $B_k^+(\alpha)$, les facteurs en b_j sont du type $b_j(\alpha+\beta)$ avec β à coefficients entiers positifs, sauf $\beta_k = -1$, et dans $B_k^-(\alpha)$, il sont du type $b_j(\alpha+\gamma)$ avec γ à coefficients entiers négatifs. Comme $\beta_j > 0$, la condition précédente n'est vérifiée que lorsque $\ell \le k$ et

$$\beta_k = -1; \beta_j = 1; \beta_\ell = \ldots = \beta_{k-1} = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_{j-1} = \gamma_l = \ldots = \gamma_j = 0,$$

On voit qu'il existe, pour chaque j, un et un seul facteur de ce type dans $B_k^+(\alpha)$ et $B_k^-(\alpha)$, respectivement indexés $i = 2^{j-k-1}$ et $i = 1$. Il suffit donc de comparer les facteurs de

$$\begin{aligned} b_j(\alpha - \mathbb{1}_k + \mathbb{1}_j) &= \prod_{i=1}^{k} \omega_{ij}(\alpha) \prod_{i=k+1}^{j} (\omega_{ij}(\alpha)+1)\text{, et} \\ b_j(\alpha) &= \prod_{i=1}^{k} \omega_{ij}(\alpha) \prod_{i=k+1}^{j} \omega_{ij}(\alpha). \end{aligned}$$

Les facteurs communs sont les $\omega_{ij}(\alpha)$ avec $1 \le i \le k < j$. Enfin, on a remarqué que $b_k(\alpha) = \prod_{i=1}^k \omega_{ik}(\alpha)$ était aussi un facteur commun. Nous en déduisons que le plus grand commun diviseur de $B_k^+(\alpha)$ et $B_k^-(\alpha)$ est le polynôme attendu. ■

5. Plus grand commun diviseur de l'idéal $\mathcal{I}_k$

Dans cette section, nous déterminons les facteurs obligatoires des identités de type Bernstein à l'aide des distributions de Riesz classiques.

Associons à l'algèbre de Jordan euclidienne V le cône Ω de ses carrés :

$$\Omega = \{x^2 \mid x \in V^\times\}.$$

Sa structure est décrite en détail dans [4]. Pour α un r-uplet complexe, nous définissons la *fonction gamma* du cône Ω par

$$\Gamma_\Omega(\alpha) = \int_\Omega e^{-\mathrm{tr}(x)} \Delta^\alpha(x) d^\times x,$$

où $d^\times x$ désigne la mesure G-invariante $\Delta(x)^{-\frac{n}{r}}dx$. D'après [4], theorem VII.1.1, cette intégrale converge absolument si et seulement si

$$\mathrm{Re}(\alpha_j + \ldots + \alpha_r) > (j-1)\frac{d}{2} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, r\},$$

et à cette condition, $\Gamma_\Omega(\alpha)$ coïncide avec le produit suivant de fonctions gamma d'Euler, qui permet le prolongement méromorphe de $\Gamma_\Omega(\alpha)$:

$$\Gamma_\Omega(\alpha) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(\omega_{jr}(\alpha) - (r-1)\frac{d}{2}\right).$$

La distribution de Riesz de paramètre α évaluée en f est donnée par

$$R_\alpha(f) := \frac{1}{\Gamma_\Omega(\alpha)} \int_\Omega f(x)\Delta(x)^\alpha d^\times x. \tag{12}$$

Elle converge pour $\mathrm{Re}(\alpha_i + \ldots + \alpha_r) > (i-1)\frac{d}{2}$ $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, lorsque f appartient à $\mathcal{S}(V)$ l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur V. La proposition ([4], theorem VII.2.6) suivante rappelle ses propriétés :

Proposition 5.1. *La fonction $R_\alpha(f)$ se prolonge en une fonction holomorphe de α sur $\mathbb{C}^r$. Pour tout α, R_α est alors une distribution tempérée de V. Pour α et β dans $\mathbb{C}^r$ et $\mathbf{m}$ dominant, elle vérifie*

$$\begin{aligned} \partial(\Delta^*_{\mathbf{m}})R_\alpha &= R_{\alpha-\mathbf{m}^*}, \\ R_\alpha * R_\beta &= R_{\alpha+\beta}, \\ R_0 &= \delta. \end{aligned}$$

En particulier, elle n'est identiquement nulle pour aucun α.

Nous pouvons à présent démontrer le :

Théorème 5.2. *Le polynôme*

$$\widetilde{B}_k(\alpha) = \prod_{1\le i\le k\le j\le r} \omega_{ij}(\alpha).$$

est le plus grand commun diviseur des éléments de l'idéal $\mathcal{I}_k$.

Démonstration. Soit p_k le plus grand commun diviseur des $B_k \in \mathcal{I}_k$. Nous allons montrer que $\widetilde{B}_k = p_k$. Comme p_k divise $\widetilde{B}_k$, p_k est un produit de facteurs de degré un.

Donnons nous un couple (E_k, B_k) satisfaisant l'identité (6).

Etape 1. Considérons la distribution $E_k(\alpha, .)R_{\alpha+\frac{n}{r}\mathbf{1}_r}$. Lorsque pour tout i, $\mathrm{Re}(\alpha_i)$ est suffisamment grande, la distribution $R_{\alpha+\frac{n}{r}\mathbf{1}_r}$ est donnée par la fonction localement intégrable

$$\frac{1}{\Gamma_\Omega\left(\alpha + \frac{n}{r}\mathbf{1}_r\right)}\Delta^\alpha \mathbf{1}_\Omega$$

où $\mathbf{1}_\Omega$ est la fonction caractéristique du cône Ω. Nous obtenons :

$$E_k\left(\alpha,.,\partial\right)R_{\alpha+\frac{n}{r}\mathbf{1}_r}=B_k\left(\alpha\right)\frac{\Gamma_\Omega(\alpha+(1+(r-1)\frac{d}{2})\mathbf{1}_r-\mathbf{1}_k)}{\Gamma_\Omega(\alpha+(1+(r-1)\frac{d}{2})\mathbf{1}_r)}R_{\alpha+\frac{n}{r}\mathbf{1}_r-\mathbf{1}_k},\tag{13}$$

qui demeure vrai pour $\alpha\in\mathbb{C}^r$, par prolongement analytique. Soit

$$d_{k,r}(\alpha)=\prod_{j=1}^{k}\omega_{jr}(\alpha)=\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma(\omega_{jr}(\alpha)+1)}{\Gamma(\omega_{jr}(\alpha))}=\frac{\Gamma_\Omega(\alpha+(1+(r-1)\frac{d}{2})\mathbf{1}_r)}{\Gamma_\Omega(\alpha+(1+(r-1)\frac{d}{2})\mathbf{1}_r-\mathbf{1}_k)}.$$

Dans la formule (13), le membre de gauche est holomorphe, et dans le membre de droite, la distribution $R_{\alpha+\frac{n}{r}\mathbf{1}_r-\mathbf{1}_k}$ n'est la distribution nulle pour aucun α, et elle est holomorphe. Donc,

$$B_k\left(\alpha\right)\frac{\Gamma_\Omega(\alpha+(1+(r-1)\frac{d}{2})\mathbf{1}_r-\mathbf{1}_k)}{\Gamma_\Omega(\alpha+(1+(r-1)\frac{d}{2})\mathbf{1}_r)}=\frac{B_k\left(\alpha\right)}{d_{k,r}\left(\alpha\right)}$$

est holomorphe et par conséquent, le polynôme $d_{k,r}(\alpha)$ divise $B_k\left(\alpha\right)$.

Etape 2. Soit $i\in\{k,\ldots,r-1\}$. Notons $\alpha'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,0,\ldots,0)$. Par définition,

$$E_k(\alpha',x,\partial)\Delta^{\alpha'}(x)=B_k(\alpha')\Delta^{\alpha'-\mathbf{1}_k}(x),$$

pour tout x. Comme E_k ne dépend que des variables de V_i, on peut définir E_k' l'opérateur différentiel sur V_i, donné pour $a,y\in V_i$ par la formule :

$$E_k'(\alpha',y,\partial)\exp(y,a)=E_k(\alpha',y,\partial)\exp(y,a).$$

L'opérateur E_k' est polynomial en toutes ses variables et satisfait l'identité de Bernstein sur V_i :

$$E_k'(\alpha',y,\partial)\Delta^{\alpha'}(y)=B_k(\alpha')\Delta^{\alpha'-\mathbf{1}_k}(y).$$

En appliquant l'étape 1 à l'algèbre V_i et au couple $(E_k',B_k(\alpha'))$, nous avons : $d_{k,i}(\alpha')$ divise $B_k(\alpha')$. Nous en déduisons, que pour tout $j\in\{1,\ldots,i\}$, p_k possède un facteur du type

$$\left(\alpha_j+\ldots+\alpha_i+a_{i+1}\alpha_{i+1}+\ldots+a_r\alpha_r+(i-j)\frac{d}{2}\right).$$

Or p_k divise $\widetilde{B}_k\left(\alpha\right)$, et une inspection des termes constants montre que le seul facteur de ce type dans $\widetilde{B}_k\left(\alpha\right)$ est $\omega_{ji}(\alpha)$.

Conclusion. En conséquence, $\widetilde{B}_k\left(\alpha\right)$ divise p_k, ce qui prouve le théorème. ■

6. Pôles des distributions de Riesz

Nous allons décrire dans cette section un ensemble contenant les pôles des distributions de Riesz généralisées.

L'espace $(P = NAM, V)$ est un espace vectoriel préhomogène réel, d'invariants relatifs $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$. Les orbites ouvertes du groupe parabolique minimal P sont les

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in V : \Delta_i(x)\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_i > 0, \forall i \in \{1, \ldots, r\}\} = P \cdot \sum_{i=1} \varepsilon_i c_i,$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{\pm 1\}^r$. Fixons un tel ε, et définissons les *intégrales zêta,* appelées encore *distributions de Riesz généralisées,* par

$$\Phi_\varepsilon(h; \alpha) = \int_{\Omega_\varepsilon} h(x)\Delta^\alpha(x)dx$$

où $h \in \mathcal{S}(V)$, et dx est une mesure de Lebesgue sur V. Ces intégrales convergent pour $\mathrm{Re}(\alpha_i) > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$.

Lemme 6.1. *Soit $h \in \mathcal{S}(V)$. La fonction*

$$T^\varepsilon(h) : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C} \quad \alpha \mapsto \left(\prod_{1 \leq i \leq j \leq r} \frac{1}{\Gamma(\omega_{ij}(\alpha) + 1)} \right) \Phi_\varepsilon(h; \alpha),$$

se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^r$. Pour tout α, la forme linéaire $T^\varepsilon_\alpha(\cdot)$ définit une distribution tempérée sur V. En particulier, l'ensemble des pôles de $\Phi_\varepsilon(h; \alpha)$ est contenu dans celui de $\prod_{1 \leq i \leq j \leq r} \Gamma(\omega_{ij}(\alpha) + 1)$.

Démonstration. Un domaine de convergence absolue de $\Phi_\varepsilon(h; \alpha)$ est donné par $\mathrm{Re}(\alpha_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Mais en vertu du théorème 5.2, les pôles de $\Phi_\varepsilon(h; \alpha)$ sont parmi ceux des

$$\prod_{i=1}^{j} \Gamma\left(\omega_{ij}(\alpha) + 1\right),$$

pour $j = 1, \ldots, r$. Cela prouve le résultat. ■

Nous allons affiner ce résultat : à l'instar du cas des cônes convexes $\Omega_{(1,\ldots,1)}$ et $\Omega_{(-1,\ldots,-1)}$, orbites de G tout entier, certains Ω_ε sont les orbites de groupes strictement plus gros que P. Considérons l'ensemble des indices critiques :

$$m(\varepsilon) = \{i \in \{1, \ldots, r-1\} \mid \varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}\} \cup \{r\}.$$

Désignons par M_ε le stabilisateur dans K de $e_\varepsilon = \varepsilon_1 c_1 + \ldots + \varepsilon_r c_r$. Le groupe $P_\varepsilon = NAM_\varepsilon$ est alors un sous-groupe parabolique de G, et l'espace (P_ε, V) est un espace vectoriel préhomogène réel d'invariants relatifs $\Delta_k : k \in m(\varepsilon)$: ces invariants suffisent donc à décrire l'orbite $\Omega_\varepsilon := P_\varepsilon \cdot e_\varepsilon$:

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in V \mid \Delta_k(x)\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k > 0, \quad \forall k \in m(\varepsilon)\}.$$

Cette description, combinée à la version faible de l'inégalité de Łojasiewicz qui suit (cf. [3]), va nous permettre de réduire le lieu des pôles prospectifs aux α satisfaisant $\omega_{ij}(\alpha) + 1 \in -\mathbb{N}$ où

$$(i, j) \in l(\varepsilon) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \exists m \in m(\varepsilon) \mid 1 \leq i \leq m \leq j \leq r\}$$

Proposition 6.2. *Soit K un compact semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$. Soient f et g deux fonctions continues semi-algébriques réelles définies sur K. Supposons que $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$. Alors, il existe c et r deux réels strictement positifs tels que pour $x \in K$,*

$$|f(x)| \geq c|g(x)|^r.$$

Théorème 6.3. *Soit $h \in \mathcal{S}(V)$. La fonction $R_\varepsilon(h, .)$ définie par*

$$\alpha \mapsto \left(\prod_{(i,j)\in l(\varepsilon)} \frac{1}{\Gamma(\omega_{ij}(\alpha)+1)} \right) \Phi_\varepsilon(h;\alpha),$$

se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^r$.

Démonstration. Compte tenu du lemme 6.1, il suffit de montrer que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tels que $\{i, \ldots, j\} \cap m(\varepsilon) = \emptyset$, et pour tout μ réel, la forme affine

$$\alpha_i + \ldots + \alpha_j + \mu$$

n'est pas un pôle de $\Phi_\varepsilon(h;\alpha)$. Pour tout $\lambda > 0$, considérons le compact :

$$K_\lambda = \overline{B(0,\lambda) \cap \Omega_\varepsilon}.$$

Notons

$$p(x) = \prod_{k\in m(\varepsilon)} \Delta_k(x).$$

Sur K_λ, on a donc $\Delta_i(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$. En appliquant à K_1 la proposition 6.2, on trouve qu'il existe $C_1, r > 0$ tels que

$$|\Delta_i(x)| \geq C_1 |p(x)|^r.$$

Par homogénéité, pour tout $\lambda > 0$, il existe $C_\lambda > 0$ tel que sur K_λ,

$$|\Delta_i(x)| \geq C_\lambda |p(x)|^r.$$

Ainsi, pour tout α_i et α réels, avec $\alpha_i < 0$ fixé, nous avons pour $x \in K_\lambda$,

$$|\Delta_i(x)^{\alpha_i} p(x)^\alpha| \leq C_\lambda |p(x)|^{r\alpha_i + \alpha}.$$

Fixons alors $\beta = -\mu \mathbf{1}_i + \alpha(\sum_{k\in m(\varepsilon)} \mathbf{1}_k)$, avec $\alpha > r\mu$. Pour tout h lisse à support compact dans V, l'intégrale définissant $\Phi_\varepsilon(h;\beta)$ converge absolument. Or s'il existait un pôle de la forme

$$\alpha_i + \ldots + \alpha_j + \mu,$$

on aurait pour tout α un pôle en β, ce qui est impossible puisque $\Phi_\varepsilon(h;\beta)$ converge absolument, pourvu que α soit assez grand. ∎

Références

[1] Angeli, Y., "Analyse harmonique sur les cônes satellites," Thèse de l'Université de Nancy, 2001.

[2] Bernstein, N., and I. Gelfand, *Meromorphic property of the functions* P^l, Func. Anal. Appl. **3** (1969), 68–69.

[3] Bierstone, E., et P. D. Milman, "Semi analytic and subanalytic sets," Pub. math. de l'IHES n° **67** (1988).

[4] Faraut, J. et A. Korányi, "Analysis on symmetric cones," Oxford Science Publications, 1994.

[5] Hilgert, J., and K.-H. Neeb, *Vector valued Riesz Distributions on Euclidian Jordan Algebras*, J. Geom. Analysis **11** (2001), 43–75.

[6] Lassalle, M., *Algèbre de Jordan et ensemble de Wallach*, Invent. Math. **89** (1987), 375–393.

[7] Riesz, M., *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[8] Sabbah, C., *Proximité évanescente II*, Compositio Math. **64** (1987), 213–241.

Yann Angeli
Institut Élie Cartan (Mathématiques)
Université Henri Poincaré Nancy 1
B.P. 239, F-54506,
Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France
yann.angeli@iecn.u-nancy.fr

Received February 20, 2004
and in final form September 30, 2004