

Average order in cyclic groups

par JOACHIM VON ZUR GATHEN, ARNOLD KNOPFMACHER,
FLORIAN LUCA, LUTZ G. LUCHT et IGOR E. SHPARLINSKI

RÉSUMÉ. Pour chaque entier naturel n , nous déterminons l'ordre moyen $\alpha(n)$ des éléments du groupe cyclique d'ordre n . Nous montrons que plus de la moitié de la contribution à $\alpha(n)$ provient des $\varphi(n)$ éléments primitifs d'ordre n . Il est par conséquent intéressant d'étudier également la fonction $\beta(n) = \alpha(n)/\varphi(n)$. Nous déterminons le comportement moyen de α , β , $1/\beta$ et considérons aussi ces fonctions dans le cas du groupe multiplicatif d'un corps fini.

ABSTRACT. For each natural number n we determine the average order $\alpha(n)$ of the elements in a cyclic group of order n . We show that more than half of the contribution to $\alpha(n)$ comes from the $\varphi(n)$ primitive elements of order n . It is therefore of interest to study also the function $\beta(n) = \alpha(n)/\varphi(n)$. We determine the mean behavior of α , β , $1/\beta$, and also consider these functions in the multiplicative groups of finite fields.

Joachim VON ZUR GATHEN
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Universität Paderborn, 33095 Paderborn, Germany
E-mail : gathen@upb.de
URL: <http://www-math.upb.de/~aggathen/>

Arnold KNOPFMACHER
The John Knopfmacher Centre
for Applicable Analysis and Number Theory
University of the Witwatersrand
P.O. Wits 2050, South Africa
E-mail : arnoldk@cam.wits.ac.za
URL: http://www.wits.ac.za/science/number_theory/arnold.htm

Florian LUCA
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
C.P. 58180, Morelia, Michoacán, México
E-mail : fluca@matmor.unam.mx

Lutz G. LUCHT
Institut für Mathematik

TU Clausthal, Erzstraße 1
38678 Clausthal-Zellerfeld, Germany
E-mail: lucht@math.tu-clausthal.de
URL: <http://www.math.tu-clausthal.de/personen/lucht.html>

Igor E. SHPARLINSKI
Department of Computing
Macquarie University
Sydney, NSW 2109, Australia
E-mail: igor@comp.mq.edu.au
URL: <http://www.comp.mq.edu.au/~igor>