

## Diophantine inequalities with power sums

par AMEDEO SCREMIN

RÉSUMÉ. On appelle somme de puissances toute suite  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  de nombres complexes de la forme

$$\alpha(n) = b_1 c_1^n + b_2 c_2^n + \dots + b_h c_h^n,$$

où les  $b_i \in \overline{\mathbb{Q}}$  et les  $c_i \in \mathbb{Z}$  sont fixés. Soit  $F(x, y) \in \overline{\mathbb{Q}}[x, y]$  un polynôme unitaire, absolument irréductible, de degré au moins 2 en  $y$ . On démontre que les solutions  $(n, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  de l'inégalité

$$|F(\alpha(n), y)| < \left| \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(n), y) \right| \cdot |\alpha(n)|^{-\varepsilon}$$

sont paramétrées par un nombre fini de sommes de puissances. Par conséquent, on déduit la finitude des solutions de l'équation diophantienne

$$F(\alpha(n), y) = f(n),$$

où  $f \in \mathbb{Z}[x]$  est un polynôme non constant et  $\alpha$  est une somme de puissances non constante.

ABSTRACT. The ring of power sums is formed by complex functions on  $\mathbb{N}$  of the form

$$\alpha(n) = b_1 c_1^n + b_2 c_2^n + \dots + b_h c_h^n,$$

for some  $b_i \in \overline{\mathbb{Q}}$  and  $c_i \in \mathbb{Z}$ . Let  $F(x, y) \in \overline{\mathbb{Q}}[x, y]$  be absolutely irreducible, monic and of degree at least 2 in  $y$ . We consider Diophantine inequalities of the form

$$|F(\alpha(n), y)| < \left| \frac{\partial F}{\partial y}(\alpha(n), y) \right| \cdot |\alpha(n)|^{-\varepsilon}$$

and show that all the solutions  $(n, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  have  $y$  parametrized by some power sums in a finite set. As a consequence, we prove that the equation

$$F(\alpha(n), y) = f(n),$$

with  $f \in \mathbb{Z}[x]$  not constant,  $F$  monic in  $y$  and  $\alpha$  not constant, has only finitely many solutions.

Amedeo SCREMIN  
Institut für Mathematik A

---

Manuscrit reçu le 18 mars 2003.

The author was supported by Istituto Nazionale di Alta Matematica “Francesco Severi”, grant for abroad Ph.D.

Technische Universität Graz  
Steyrergasse 30 A-8010 Graz, Austria  
*E-mail* : `scremin@finanz.math.tu-graz.ac.at`