SUR LE THEOREME DE BARTLE-GRAVES DANS LA CATEGORIE DES QUOTIENTS BORNOLOGIQUES

B. Aqzzouz, M. H. Elalj, R. Nouira, Kénitra

(Reçu le 24 février 2005)

Abstract. On Bartle-Graves Theorem in the category of quotient bornological spaces. We prove Bartle-Graves Theorem in the category of quotient bornological spaces (L. Waelbroeck, 1986). Also, this permits us to define some spaces of functions taking their values in quotient bornological spaces.

Résumé. On se propose d'établir le Théorème de Bartle-Graves dans la catégorie des quotients bornologiques. Aussi, cela nous permet de définir certains espaces de fonctions à valeurs dans des quotients bornologiques.

Keywords: Bartle-Graves Theorem, quotient bornological spaces, exact functor, category

MSC 2000: 46M05, 46M15, 46M40

1. Introduction et notations

D'après [6], un quotient bornologique $E|F$ est un espace vectoriel E/F, où (E, β_E) est un b-espace et (F, β_F) un sous-b-espace de E (i.e. F est un sous-espace vectoriel de E, muni d'une bornologie de b-espace β_F telle que l'injection $(F, \beta_F) \longrightarrow (E, \beta_E)$ est bornée).

Dans la construction du calcul symbolique en fonctions d'éléments non réguliers d'une b-algèbre [4], L. Waelbroeck a été amené à considérer une b-algèbre A, un b-idéal α et à étudier A modulo α. Comme le b-idéal α n'est pas nécessairement fermé dans A alors le quotient A/α n'est pas nécessairement un b-espace. Derrière ce calcul symbolique, apparait donc une catégorie abélienne [6]. Dans [7], L. Waelbroeck a défini les fonctions holomorphes à valeurs dans des quotients bornologiques. Pour le faire il a utilisé des foncteurs $C\,(X, \cdot)$, $C^r\,(X, \cdot)$ et $C_b\,(X, \cdot)$ définis sur la catégorie des quotients bornologiques qu'il suppose exacts.

Rappelons que le théorème de Bartle-Graves dit que toute surjection linéaire bornée entre des espaces de Banach admet un inverse à droite continu (non nécessairement linéaire) et borné sur les bornés. Mais le cadre que nous avons choisi est celui de la catégorie des quotients bornologiques et un quotient bornologique est un quotient de b-espaces. Rappelons ici que les b-espaces que nous considérons sont ceux de Waelbroeck [5], qui sont plus générales que les espaces bornologiques (i.e. localement convexes) de Bourbaki [3]. En effet, les b-espaces de Waelbroeck sont des "réunions" d'espaces de Banach (en fait des limites inductives bornologiques). De plus le passage de cette catégorie vers la catégorie des quotients bornologiques sera réalisé par le théorème 1.4 de [6].

L'objectif de ce papier est d'établir donc le théorème de Bartle-Graves [1] dans la catégorie des quotients bornologiques. Pour cela nous montrerons divers isomorphismes du type $\mathscr{F}(X, E|F) = \mathscr{F}(X, E)\,|\mathscr{F}(X, F)$, où $\mathscr{F}(X) = C(X)$, $C_b(X)$, $C_e(X)$ et $\theta(\mathbb{R}, w_o)$.

Avant d'établir les résultats de ce papier, nous rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite. Notons par **EV** (resp. **Ban**) la catégorie des espaces vectoriels et des applications linéaires (resp. espaces de Banach et des applications linéaires bornées).

1. Si E est un espace vectoriel et si B est un disque (i.e. un ensemble convexe équilibré) de E, on note E_B l'espace vectoriel engendré par B muni de la semi-norme

$$\|x\|_B = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ :\ x \in \alpha B\}.$$

On dit que B est complétant si $(E_B, \|\|_B)$ est un espace de Banach.

Une bornologie de b-espace sur E, est une famille β de parties de E telle que:

(1) toute partie finie de E appartient à β.

(2) si $A \in \beta$ et $B \subset A$, alors $B \in \beta$.

(3) β est stable pour la réunion finie.

(4) l'homothétique de tout élément de β est un élément de β.

(5) si $A \in \beta$, alors il existe un disque borné complétant B de β tel que $A \subset B$.

Le couple (E, β) est appelé un b-espace. Un sous-espace vectoriel F d'un b-espace E est dit bornologiquement fermé, si pour tout disque borné complétant B de E, le sous-espace vectoriel $F \cap E_B$ est fermé dans E_B.

Si (E_1, β_1) et (E_2, β_2) sont deux b-espaces, une application linéaire $u\colon\ E_1 \longrightarrow E_2$ est dite bornée si pour tout $A \in \beta_1$ on a $u(A) \in \beta_2$. L'application $u\colon\ E \longrightarrow F$ est dite bornologiquement surjective si pour tout $B' \in \beta_F$, il existe $B \in \beta_E$ tels que $u(B) = B'$.

On désigne par **b**, la catégorie des b-espaces et des applications linéaires bornées. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à [5].

2. Soit (E, β_E) un b-espace, un sous-b-espace F de E est un sous-espace vectoriel de E, muni d'une bornologie de b-espace β_F tel que l'inclusion $(F, \beta_F) \longrightarrow (E, \beta_E)$ est bornée. Un quotient bornologique $E|F$ est un couple (E, F), où E est un b-espace et F un sous-b-espace de E. On dit que $u\colon\ E|F \longrightarrow E_1|F_1$ est un morphisme strict s'il est induit par une application linéaire bornée $u_1\colon\ E \longrightarrow E_1$ dont la restriction $u_{1_{|F}}\colon\ F \longrightarrow F_1$ est bornée; u est un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire bornée $u_1\colon\ E \longrightarrow E_1$ qui est bornologiquement surjective et telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$ bornologiquement (i.e. si $A \in \beta_E$ tel que $u_1(A) \in \beta_{F_1}$ alors $A \in \beta_F$).

Notons par $\tilde{\mathbf{q}}$ la catégorie des quotients bornologiques et des morphismes stricts. Dans cette catégorie, il existe des pseudo-isomorphismes qui ne sont pas inversibles. En effet, si E est un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E, l'application quotient $\pi\colon\ E \longrightarrow E/F$ induit le pseudo-isomorphisme $E|F \longrightarrow (E/F)|\{0\}$ qui n'est pas nécessairement un isomorphisme dans $\tilde{\mathbf{q}}$. L. Waelbroeck [6] a introduit alors la catégorie abélienne $\mathbf{q}$ qui a les mêmes objets que $\tilde{\mathbf{q}}$ et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles.

2. Les résultats principaux

Tout au long de ce papier, nous utiliserons le théorème 1.4 de [6] que nous rappelons ci-dessous.

Théorème [6]**.** *Un foncteur $\widetilde{T}\colon\ \tilde{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbf{q}$ se prolonge en un foncteur $T\colon\ \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$ si, et seulement si, $\widetilde{T}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbf{q}$ lorsque u est un pseudo-isomorphisme de $\tilde{\mathbf{q}}$. De plus, cette extension est unique lorsque elle existe, et si $\widetilde{T}$ est exact, alors T l'est aussi.*

Si X est un compact et E un b-espace, on note par $C(X, E)$ le b-espace $\bigcup\limits_B C(X, E_B)$, où $\bigcup\limits_B$ désigne la limite inductive dans la catégorie des b-espaces, B décrit l'ensemble des disques bornés complétants de E et $C(X, E_B)$ est l'espace des fonctions continues de X à valeurs dans l'espace de Banach E_B.

La bornologie de $C(X, E)$ est définie par la famille suivante: une partie A de $C(X, E)$ est dite bornée s'il existe un disque borné complétant B de E tel que A est contenue dans l'espace de Banach $C(X, E_B)$ et y est bornée.

Notons que si F est un sous-b-espace de E, alors $C(X, F)$ est un sous-b-espace de $C(X, E)$. Par conséquent, $C(X, E)|C(X, F)$ est un quotient bornologique.

Nous établissons maintenant notre premier résultat de ce papier.

Théorème 2.1. *Soient X un compact et $E|F$ un quotient bornologique, alors* $C(X,E|F)=C(X,E)|C(X,F)$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit

$$(0,u,v,0)\colon\ 0\longrightarrow G_1\longrightarrow G_2\longrightarrow G_3\longrightarrow 0$$

une suite exacte dans la catégorie **b**. Il est clair que l'application linéaire bornée

$$C(X,u)\colon\ C(X,G_1)\longrightarrow C(X,G_2),\quad f\longmapsto u\circ f$$

est injective.

Montrons que l'application linéaire bornée

$$C(X,v)\colon\ C(X,G_2)\longrightarrow C(X,G_3),\quad f\longmapsto v\circ f$$

est bornologiquement surjective. En effet, soit A une partie bornée du b-espace $C(X,G_3)$, il existe un disque borné complétant C de G_3 tel que A est une partie bornée dans l'espace de Banach $C(X,(G_3)_C)$. De plus nous pouvons supposer que la partie C est fermée dans l'espace de Banach $(G_3)_C$ (car $(G_3)_C=(G_3)_{\overline{C}}$). Soit B_1 une partie bornée complétante dans le b-espace G_2 telle que $v(B_1)\supset C$. Posons

$$B_2=B_1\cap v^{-1}(C)\subset (G_2)_{B_1}$$

et

$$B=\overline{B}_2$$

où l'adhérence est prise dans l'espace de Banach $(G_2)_{B_1}$. Notons que

$$\overline{B}_2=\Big\{\sum_n\alpha_nx_n\colon\ x_n\in B_2,\ \sum_n|\alpha_n|\leqslant 1\Big\}.$$

On a alors, $v(\sum\limits_n\alpha_nx_n)\in C$ et par suite, l'application linéaire bornée $v\colon\ (G_2)_B\longrightarrow (G_3)_C$ est surjective. Par conséquent, l'application linéaire bornée v admet un inverse à droite $g\colon\ (G_3)_C\longrightarrow (G_2)_B$ qui est continue et bornée sur les parties bornées. Soit $g_3\in C(X,(G_3)_C)$ tel que $||g_3||\leqslant 1$, alors

$$\|g\circ g_3\|\leqslant\sup_{t\in C}\|g(t)\|_B=M$$

où $\|\|_B$ est la norme de l'espace de Banach $(G_2)_B$. Il s'ensuit que $g\circ g_3\in C(X,(G_2)_B)$ et $vo(g\circ g_3)=g_3$. Posons

$$D=\{g\circ g_3\in C(X,(G_2)_B)\colon\ \|g_3\|\leqslant 1\}$$

c'est un borné du b-espace $C(X, G_2)$ tel que

$$C(X, v)(D) = B_{C(X,(G_3)_C)}$$

où $B_{C(X,(G_3)_C)}$ est la boule unité fermée de $C(X, (G_3)_C)$.

Il reste donc à montrer que l'image du b-espace $C(X, G_1)$ par l'application linéaire bornée $C(X, u)$ coïncide (algébriquement et bornologiquement) avec le noyau de l'application linéaire bornée $C(X, v)$. Considérée comme application linéaire bornée du b-espace G_1 vers le b-espace $v^{-1}(\{0\})$, l'application u est bornologiquement surjective, et par suite l'application

$$C(X, u)\colon\ C(X, G_1) \longrightarrow C(X, v^{-1}\{0\})$$

l'est aussi. Il résulte de l'égalité bornologique

$$(C(X, v^{-1}))(\{0\}) = (C(X, v))^{-1}(\{0\})$$

que le foncteur $C(X, \cdot)\colon\ \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ est exact.

D'après le théorème 1.4 de [6], le foncteur exact $C(X, \cdot)\colon\ \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b} \subset \mathbf{q}$ se prolonge en un foncteur exact $C(X, \cdot)\colon\ \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$ et ce prolongement est unique.

D'autre part, le quotient bornologique $E|F$ définit, dans la catégorie $\mathbf{q}$, la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow E|F \longrightarrow 0$$

Son image par le foncteur exact $C(X, \cdot)\colon\ \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$, est la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow C(X, F) \longrightarrow C(X, E) \longrightarrow C(X, E|F) \longrightarrow 0$$

Ceci montre que le quotient bornologique $C(X, E|F)$ est le conoyau du morphisme $C(X, F) \longrightarrow C(X, E)$, i.e.

$$C(X, E|F) = C(X, E)|C(X, F).$$

Ce qui montre le théorème. □

Soit $E^1|E^\circ$ un quotient bornologique, nous définissons $\mathrm{Lat}(E^1|E^\circ)$ comme l'ensemble des b-espaces E tels que E est un sous-b-espace de E^1 et E° est un sous-b-espace de E. Le quotient bornologique $E|E^\circ$ est appelé un sous-quotient de $E^1|E^\circ$. Si $E \in \mathrm{Lat}(E^1|E^\circ)$, alors l'injection canonique $E \to E^1$ induit un morphisme strict $E|E^\circ \longrightarrow E^1|E^\circ$, et l'application identité $Id_{E^1}\colon\ E^1 \to E^1$ induit un morphisme strict $E^1|E^\circ \longrightarrow E^1|E^\circ$.

Il est clair qu'une suite courte exacte dans la catégorie $\mathbf{q}$ est isomorphe à une suite courte exacte de la forme

$$E|E^\circ \longrightarrow E^1|E^\circ \longrightarrow E^1|E$$

où $E \in \mathrm{Lat}(E^1|E^\circ)$.

D'après le théorème 7.3 de [6], si $E|F$ et $E_1|F_1$ sont des quotients bornologiques, un morphisme strict $u\colon\ E|F \longrightarrow E_1|F_1$ est épique si, et seulement si, $E_1 = u_1(E) + F_1$, où $u_1\colon\ E \longrightarrow E_1$ est l'application linéaire bornée qui induit u et l'égalité est algébrique et bornologique. Aussi, le morphisme strict $u\colon\ E|F \longrightarrow E_1|F_1$ est dit monique si $F = (u_1)^{-1}(F_1)$. Enfin, il résulte du théorème 7.4 de [6], que le morphisme strict $u\colon\ E|F \longrightarrow E_1|F_1$ est un isomorphisme si, et seulement si, il est épique et monique.

Comme conséquence du théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.2. (Théorème de Bartle-Graves)**.** *Soient X un compact et $u\colon$ $E|F \longrightarrow E_1|F_1$ un morphisme strict épique entre des quotients bornologiques. Alors le morphisme strict $C(X,u)\colon\ C(X,E|F) \longrightarrow C(X,E_1|F_1)$ est épique.*

D é m o n s t r a t i o n. En effet, comme la catégorie $\mathbf{q}$ est abélienne, alors le morphisme strict u admet un noyau dans $\mathbf{q}$. Il s'ensuit que la suite suivante:

$$0 \longrightarrow \ker(u) \longrightarrow E|F \longrightarrow E_1|F_1 \longrightarrow 0$$

est exacte dans $\mathbf{q}$, où $\ker(u) = E^\circ|F$ avec $E^\circ \in \mathrm{Lat}(E|F)$. D'après la preuve du théorème 2.1, le foncteur $C(X,\cdot)\colon\ \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$ est exact, et donc la suite image suivante:

$$0 \longrightarrow C(X,\ker(u)) \longrightarrow C(X,E|F) \longrightarrow C(X,E_1|F_1) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Ceci montre que le morphisme strict

$$C(X,u)\colon\ C(X,E|F) \longrightarrow C(X,E_1|F_1)$$

est épique. Par conséquent, le corollaire est établi. □

Avant de montrer le résultat suivant, rappelons les définitions suivantes:

Soient X un espace topologique et E un b-espace. Une application $f\colon\ X \longrightarrow E$ est dite continue si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x et une partie bornée complétante B_x de E tels que $f_{|V_x} \in C_b(V_x, E_{B_x})$, où $C_b(V_x, E_{B_x})$ est l'espace des fonctions continues et bornées $V_x \longrightarrow E_{B_x}$.

Sur $C\,(X,E)$, on prend la base de bornologie suivante: une partie B de $C\,(X,E)$ est bornée si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x et un disque borné complétant B_x de E tels que l'ensemble $B_{|V_x} = \left\{f_{|V_x} : \ f \in B\right\}$ est borné dans $C_b\,(V_x, E_{B_x})$.

On définit aussi le b-espace $C_b\,(X,E)$ comme l'espace $\bigcup\limits_B C_b\,(X, E_B)$, où $\bigcup\limits_B$ est la limite inductive dans la catégorie des b-espaces et B décrit les disques bornés complétants de E.

On a le résultat suivant:

Théorème 2.3. *Soient X un espace topologique et $E|F$ un quotient bornologique, alors $C_b(X,E|F) = C_b(X,E)|C_b(X,F)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Montrons d'abord que le foncteur $C_b(X,\cdot)\colon \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ est exact i.e. que l'image par $C_b(X,\cdot)$ de toute suite exacte

$$(0,u,v,0)\colon\ 0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

est la suite exacte dans $\mathbf{b}$

$$0 \longrightarrow C_b(X,G_1) \longrightarrow C_b(X,G_2) \longrightarrow C_b(X,G_3) \longrightarrow 0$$

Il est clair que l'application linéaire bornée $C_b(X,u)\colon\ C_b(X,G_1) \longrightarrow C_b(X,G_2)$ est injective. Il reste donc à montrer que l'application linéaire bornée

$$C_b(X,v)\colon\ C_b\,(X,G_2) \longrightarrow C_b\,(X,G_3) :\ g \longmapsto v \circ g$$

est bornologiquement surjective.

Soit B une partie bornée de $C_b\,(X,G_3)$, il existe un disque borné complétant B_1 de G_3 tel que B est un borné dans l'espace de Banach $C_b\left(X,(G_3)_{B_1}\right)$. Comme l'application linéaire bornée $v\colon\ G_2 \longrightarrow G_3$ est bornologiquement surjective, il existe aussi un borné D de G_2 tel que $v\,(D) = B_1$. Prenons

$$D_1 = \left\{\sum_n \alpha_n x_n :\ x_n \in D, \sum_n |\alpha_n| \leqslant 1\right\}$$

l'enveloppe complétante de D dans le b-espace G_2, c'est un borné complétant de G_2 tel que $v\,(D_1) = B_1$ et $(G_3)_{B_1} = (G_2)_{D1} \,/\, (G_1)_{D_1 \cap G_1}$. L'application $v\colon\ (G_2)_{D_1} \longrightarrow (G_3)_{B_1}$ est donc continue et surjective. Par conséquent, elle admet un inverse à droite $s\colon\ (G_3)_{B_1} \longrightarrow (G_2)_{D_1}$ qui est continue et borné sur les bornés. Si $f \in C_b\left(X,(G_3)_{B_1}\right)$ avec $\|f\| \leqslant 1$ alors

$$s \circ f \in C_b\left(X,(G_2)_{D_1}\right)$$

et

$$\|s\circ f\| \leqslant \sup\{s(x)\colon \ \|x\|_{(G_3)_{B_1}} \leqslant 1\}.$$

Soit

$$A=\{s\circ f\colon \ f\in C_b\left(X,(G_3)_{B_1}\right) \ \text{ et } \|f\|\leqslant 1\}$$

c'est un borné de $C_b\left(X,(G_2)_{D_1}\right)$ tel que

$$C_b\left(X,v\right)(A)=\{v\circ f\colon \ f\in A\}=B$$

et par suite l'application linéaire bornée

$$C_b(X,v)\colon \ C_b\left(X,G_2\right)\longrightarrow C_b\left(X,G_3\right)\colon \ f\longmapsto v\circ f$$

est bornologiquement surjective.

De la même manière que dans le théorème 2.1, nous montrons que l'image du b-espace $C_b(X,G_1)$ par l'application linéaire bornée $C_b(X,u)$ coïncide (algébriquement et bornologiquement) avec le noyau de l'application linéaire bornée $C_b(X,v)$. Ce qui montre que le foncteur $C_b(X,\cdot)\colon \ \mathbf{b}\longrightarrow\mathbf{b}$ est exact.

Maintenant d'après le théorème 1.4 de [6], le foncteur exact $C_b(X,\cdot)\colon \ \mathbf{b}\longrightarrow\mathbf{b}\subset\mathbf{q}$ se prolonge en un foncteur exact $C_b(X,\cdot)\colon \ \mathbf{q}\longrightarrow\mathbf{q}$ et ce prolongement est unique. Par conséquent, si $E|F$ est un quotient bornologique, l'image de la suite exacte suivante:

$$0\longrightarrow F\longrightarrow E\longrightarrow E|F\longrightarrow 0$$

par le foncteur exact $C(X,\cdot)\colon \ \mathbf{q}\longrightarrow\mathbf{q}$, est la suite exacte suivante:

$$0\longrightarrow C_b(X,F)\longrightarrow C_b(X,E)\longrightarrow C_b(X,E|F)\longrightarrow 0$$

Ceci montre que

$$C_b(X,E|F)=C_b(X,E)|C_b(X,F)$$

et le résultat est établi. □

Comme conséquence, nous obtenons le corollaire suivant:

Corollaire 2.4. (Théorème de Bartle-Graves). *Soient X un espace topologique et $u\colon\ E|F \longrightarrow E_1|F_1$ un morphisme strict épique entre des quotients bornologiques. Alors le morphisme strict $C_b(X,u)\colon\ C_b(X,E|F) \longrightarrow C_b(X,E_1|F_1)$ est épique.*

Démonstration. En effet, la suite

$$0 \longrightarrow \ker(u) \longrightarrow E|F \longrightarrow E_1|F_1 \longrightarrow 0$$

est exacte. Comme le foncteur $C_b(X,\cdot)\colon\ \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$ est exact, la suite

$$0 \longrightarrow C_b(X,\ker(u)) \longrightarrow C_b(X,E|F) \longrightarrow C_b(X,E_1|F_1) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ce qui établit le résultat. □

Dans le cas où l'espace topologique X est paracompact, nous obtenons le résultat suivant:

Théorème 2.5. *Soient X un espace topologique paracompact et $E|F$ un quotient bornologique, alors $C(X,E|F) = C(X,E)|C(X,F)$.*

Démonstration. Comme pour les théorèmes 2.1 et 2.3, nous établirons que l'image de toute suite exacte dans $\mathbf{b}$

$$(0,u,v,0)\colon\ 0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

par le foncteur $C(X,\cdot)$, est la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow C_b(X,G_1) \longrightarrow C_b(X,G_2) \longrightarrow C_b(X,G_3) \longrightarrow 0.$$

Comme l'application linéaire bornée $C_b(X,G_1) \longrightarrow C_b(X,G_2)$ est injective, il reste à montrer que l'application linéaire bornée

$$C_b(X,v)\colon\ C_b(X,G_2) \longrightarrow C_b(X,G_3), \quad f \longmapsto v\circ f$$

est bornologiquement surjective.

Soit B un borné de $C(X,G_3)$. Il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout $i\in I$, l'ensemble $B_{|V_i} = \{f_{|V_i}\colon\ f\in B\}$ est borné dans $C_b(V_i,G_3)$. Le recouvrement ouvert (V_i) peut être pris locallement fini et donc il existe une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ subordonnée à $(V_i)_{i\in I}$. Pour chaque $i\in I$, choisissons un borné C_i dans $C_b(V_i,G_2)$ tel que $C_b(V_i,v)(C_i) \supseteq B_{|V_i}$. Prenons $C = \sum\limits_{i\in I}\varphi_i C_i$, il est clair que C est borné dans $C(X,G_2)$ et que $C(X,v)(C) = B$.

Comme pour les théorèmes 2.1 et 2.3, il découle du théorème 1.4 de [6] que $C(X,E|F) = C(X,E)|C(X,F)$. □

Il résulte du théorème précédent le résultat suivant:

Corollaire 2.6 (Théorème de Bartle-Graves). *Soient X un espace paracompact et $u\colon\ E|F \longrightarrow E_1|F_1$ un morphisme strict épique entre des quotients bornologiques. Alors le morphisme strict $C(X,u)\colon\ C(X,E|F) \longrightarrow C(X,E_1|F_1)$ est épique.*

Démonstration. En effet, l'image de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(u) \longrightarrow E|F \longrightarrow E_1|F_1 \longrightarrow 0$$

par le foncteur exact $C(X,\cdot)\colon\ \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$, est la suite exacte

$$0 \longrightarrow C(X,\ker(u)) \longrightarrow C(X,E|F) \longrightarrow C(X,E_1|F_1) \longrightarrow 0$$

D'où le résultat. □

Soient Y un ensemble et E un b-espace, notons par $\beta(Y,E)$ l'espace des applications $f\colon\ Y \longrightarrow E$ telles que $f(Y)$ est borné dans E, que nous munissons de la bornologie équibornée suivante: une partie B de $\beta(Y,E)$ est bornée si l'ensemble $\{f(x)\colon\ f \in B,\ x \in Y\}$ est borné dans E.

Théorème 2.7. *Soient Y un ensemble et $E|F$ un quotient bornologique, alors $\beta(Y,E|F) = \beta(Y,E)\,|\beta(Y,F)$.*

Démonstration. Soit

$$(0,u,v,0)\colon\ 0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{b}$. Comme l'application linéaire bornée

$$\beta(Y,u)\colon\ \beta(Y,G_1) \longrightarrow \beta(Y,G_2), \quad f \longmapsto u \circ f$$

est injective, il suffit de montrer que l'application linéaire bornée

$$\beta(Y,v)\colon\ \beta(Y,G_2) \longrightarrow \beta(Y,G_3), \quad f \longmapsto v \circ f$$

est bornologiquement surjective.

En effet, soit A un borné de $\beta(Y,G_3)$. Comme l'ensemble $D = \{f(x) :\ f \in A,\ x \in Y\}$ est borné dans G_3, il existe donc un borné C de G_2 telle que $v(C) = D$. Par l'axiome du choix, il existe une application $w\colon\ D \longrightarrow C$ tel que $v \circ w = 1_D$, où 1_D est l'application identité de D. Prenons $B = \{g = w \circ f\colon\ f \in A\}$, c'est un borné de $\beta(Y,G_2)$, de plus on a

$$A = v \circ B = \{v \circ g\colon\ g \in B\}.$$

Par conséquent, l'application $\beta(Y,v)$ est bornologiquement surjective.

Maintenant comme le foncteur $\beta(Y,\cdot)\colon\ \mathbf{b}\longrightarrow\mathbf{b}$ est exact, il résulte du théorème 4.1 de [6] que le foncteur $\beta(Y,\cdot)$ admet un prolongement en un foncteur exact $\beta(Y,\cdot)\colon$ $\mathbf{q}\longrightarrow\mathbf{q}$.

Par conséquent, si $E|F$ est un quotient bornologique, l'image de la suite exacte suivante:

$$0\longrightarrow F\longrightarrow E\longrightarrow E|F\longrightarrow 0$$

par le foncteur exact $\beta(Y,\cdot)\colon\ \mathbf{q}\longrightarrow\mathbf{q}$, est la suite exacte suivante:

$$0\longrightarrow\beta(Y,F)\longrightarrow\beta(Y,E)\longrightarrow\beta(Y,E|F)\longrightarrow 0$$

Ceci montre que

$$\beta(Y,E|F)=\beta(Y,E)|\beta(Y,F)$$

et le résultat est établi. $\square$

Comme conséquence, on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.8 (Théorème de Bartle-Graves)**.** *Soient Y un ensemble et $u\colon$ $E|F\longrightarrow E_1|F_1$ un morphisme strict épique entre des quotients bornologiques. Alors le morphisme strict $\beta\,(Y,u):\ \beta\,(Y,E|F)\longrightarrow\beta\,(Y,E_1|F_1)$ est épique.*

D é m o n s t r a t i o n. La même que celle des corollaires précédents. $\square$

Rappelons qu'un b-espace de Schwartz G est une limite inductive d'espaces de Banach G_B, avec la condition que tout disque borné complétant B de G est inclus dans un disque borné complétant B' de G tel que l'application inclusion $i_{B'B}\colon\ G_B\rightarrow G_{B'}$ est compacte.

Soit G un b-espace, on désigne par G_c le b-espace de Schwartz associe i.e. muni de la bornologie pour laquelle une partie A de G est bornée s'il existe un disque borné complétant B de G tel que A est contenue dans l'espace de Banach G_B et y est compacte.

Soient X un compact et E un espace de Banach, on note par $C(X,E)_e$ l'espace des fonctions continues $C(X,E)$, muni de la bornologie équicontinue i.e. une partie A de $C(X,E)$ est bornée s'il est uniformément bornée et équicontinue. Ceci définit un foncteur $C(X,\cdot)_e\colon\ \mathbf{Ban}\longrightarrow\mathbf{b}$.

Théorème 2.9. *Soient X un espace topologique compact et $E|F$ un quotient bornologique, alors $C(X, E|F)_e = C(X, E)_e | C(X, F)_e$.*

D é m o n s t r a t i o n. Etablissons que le foncteur $C(X, \cdot)_e \colon \mathbf{Ban} \longrightarrow \mathbf{b}$ est exact i.e. que l'image de toute suite exacte est une suite exacte.

Soit

$$(0, u, v, 0)\colon\ 0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{b}$. Il est clair que l'application linéaire bornée

$$C(X, u)_e\colon\ C(X, G_1)_e \longrightarrow C(X, G_2)_e$$

est injective.

Montrons que l'application linéaire bornée

$$C(X, v)_e\colon\ C(X, G_2)_e \longrightarrow C(X, G_3)_e, \quad f \longmapsto v \circ f$$

est bornologiquement surjective.

Soit K un borné équicontinu de $C(X, G_3)$. D'après la preuve du théorème 2.7, l'application

$$\beta(K, v)\colon\ \beta(K, G_2) \longrightarrow \beta(K, G_3)$$

est bornologiquement surjective, et donc il résulte du même théorème 2.1 que l'application

$$C(X, \beta(K, v))\colon\ C(X, \beta(K, G_2)) \longrightarrow C(X, \beta(K, G_3))$$

l'est aussi.

D'autre part, comme l'application $i_K\colon\ K \longrightarrow C(X, G_3)$ est à image bornée et équicontinue, alors $i_K \in \beta(K, C(X, G_3)_e)$. Comme $\beta(K, C(X, G_3)_e) = C(X, \beta(K, G_3))$, il existe alors $j_K \in C(X, \beta(K, G_2)) = \beta(K, C(X, G_2)_e)$ tel que $C(X, \beta(K, v))(j_K) = i_K$, où $j_K\colon\ K \longrightarrow C(X, G_2)$ est une application à image bornée et équicontinue. Prenons $K' = j_K(K)$, c'est un borné équicontinu de $C(X, G_2)$ tel que $C(X, v)(K') = K$.

De la même manière que dans le théorème 2.1, nous montrons que l'image du b-espace $C(X, G_2)_e$ par l'application linéaire bornée $C(X, u)_e$ coïncide (algébriquement et bornologiquement) avec le noyau de l'application linéaire bornée $C(X, v)_e$. Ce qui montre que le foncteur $C(X, \cdot)_e\colon\ \mathbf{Ban} \longrightarrow \mathbf{b}$ est exact.

Or si E est un b-espace, alors $C(X, E)_e = \bigcup\limits_B C(X, E_B)_e$, et comme la limite inductive est un foncteur exact sur la catégorie des b-espaces [5], le foncteur $\bigcup\limits_B C(X, \cdot)_e\colon$ $\mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b}$ est exact.

Maintenant d'après le théorème 1.4 de [6], le foncteur exact $C(X,\cdot)_e\colon \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{b} \subset \mathbf{q}$ se prolonge en un foncteur exact $C(X,\cdot)_e\colon \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$ et ce prolongement est unique. Par conséquent, si $E|F$ est un quotient bornologique, l'image de la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow E|F \longrightarrow 0$$

par le foncteur exact $C(X,\cdot)_e\colon \mathbf{q} \longrightarrow \mathbf{q}$, est la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow C(X,F)_e \longrightarrow C(X,E)_e \longrightarrow C(X,E|F)_e \longrightarrow 0$$

Ceci montre que

$$C(X,E|F)_e = C(X,E)_e|C(X,F)_e$$

et le résultat est ainsi établi. □

Comme conséquence du théorème précédent on a

Corollaire 2.10 (Théorème de Bartle-Graves)**.** *Soient X un compact et $u\colon E|F \longrightarrow E_1|F_1$ un morphisme strict épique entre des quotients bornologiques. Alors le morphisme strict $C(X,u)_e\colon C(X,E|F)_e \longrightarrow C(X,E_1|F_1)_e$ est épique.*

Enfin, si E est un b-espace, une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow E$ est dite tempérée s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $\{w_o(t)^N f(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$ est borné dans E, où w_o est la fonction définie par $w_o(t) = (1+t^2)^{-1/2}$. On note par $\theta(\mathbb{R}, w_o, E)$ l'espace de toutes les fonctions tempérées que nous munissons de la bornologie de b-espace suivante: une partie B de $\theta(\mathbb{R}, w_o, E)$ est dite bornée s'il existe N tel que

$$\{w_o(t)^N f(t)\colon t \in \mathbb{R}, f \in B\}$$

est borné dans E.

Notons que le b-espace $\theta(\mathbb{R}, w_o, E)$ a été utilisé par L. Waelbroeck dans sa thèse d'agrégation [4].

Il est clair que si F est un sous-b-espace de E, alors $\theta(\mathbb{R}, w_o, F)$ est un sous-b-espace de $\theta(\mathbb{R}, w_o, E)$. Par conséquent, $\theta(\mathbb{R}, w_o, E)\,|\theta(\mathbb{R}, w_o, F)$ est un quotient bornologique.

Théorème 2.11. *Soit $E|F$ un quotient bornologique, alors $\theta(\mathbb{R}, w_o, E|F) = \theta(\mathbb{R}, w_o, E)\,|\theta(\mathbb{R}, w_o, F)$.*

Démonstration. Comme pour le théorème 2.1, si

$$(0,u,v,0)\colon\ 0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte dans la catégorie **b**, l'application linéaire bornée

$$\theta\left(\mathbb{R}, w_o, u\right):\ \theta\left(\mathbb{R}, w_o, G_1\right) \longrightarrow \theta\left(\mathbb{R}, w_o, G_2\right)$$

est injective, Il suffit donc de montrer que l'application linéaire bornée

$$\theta\left(\mathbb{R}, w_o, v\right):\ \theta\left(\mathbb{R}, w_o, G_2\right) \longrightarrow \theta\left(\mathbb{R}, w_o, G_3\right)$$

est bornologiquement surjective.

Soit B un borné de $\theta(\mathbb{R}, w_o, G_3)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{w_o(t)^N g(t):\ t \in \mathbb{R}, g \in B\}$$

est borné dans G_3. Comme l'application v est bornologiquement surjective, il existe un borné C dans G_2 tel que

$$v\left(C\right) = \{w_o\left(t\right)^N g\left(t\right):\ t \in \mathbb{R}, g \in B\}.$$

D'après l'axiome du choix, pour tout $g \in B$, il existe $f_g \in \theta(\mathbb{R}, w_o, G_2)$ telle que

$$\{w_o\left(t\right)^N f_g\left(t\right):\ t \in \mathbb{R}\} \subset C$$

et $g = vof_g$. Par suite, l'ensemble $A = \{f_g:\ g \in B\}$ est borné dans $\theta(\mathbb{R}, w_o, G_2)$, de plus

$$\theta(\mathbb{R}, w_o, v)(A) = \{v \circ f_g:\ g \in B\} = B.$$

Ceci montre que l'application $\theta(\mathbb{R}, w_o, v)$ est bornologiquement surjective.

Comme pour le théorème 2.1, il découle du théorème 1.4 de [6] que

$$\theta\left(\mathbb{R}, w_o, E|F\right) = \theta\left(\mathbb{R}, w_o, E\right)|\theta\left(\mathbb{R}, w_o, F\right).$$

D'où le résultat. $\square$

Comme conséquence du théorème précédent, nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.12 (Théorème de Bartle-Graves). *Soit* $u\colon E|F \longrightarrow E_1|F_1$ *un morphisme strict épique entre des quotients bornologiques. Alors le morphisme strict* $\theta(\mathbb{R}, w_o, u) : \theta(\mathbb{R}, w_o, E|F) \longrightarrow \theta(\mathbb{R}, w_o, E_1|F_1)$ *est épique.*

Bibliographie

[1] *B. Aqzzouz*: Généralisations du théorème de Bartle-Graves. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. *333* (2001), 925–930.

[2] *R. G. Bartle, L. M. Graves*: Mappings between function spaces. Trans. Am. Math. Soc. *72* (1952), 400–413.

[3] *N. Bourbaki*: Éléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5. Paris etc.: Masson. VII, 1981, pp. 368.

[4] *L. Waelbroeck*: Étude spectrale des algèbres completes. Mem. Cl. Sci., Collect. Octavo, Acad. R. Belg. *31* (1960), 140.

[5] *L. Waelbroeck*: Topological vector spaces and algebras. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1971.

[6] *L. Waelbroeck*: The category of quotient bornological spaces. Aspects of mathematics and its applications. Collect. Pap. Hon. L. Nachbin *34* (1986), 873–894.

[7] *L. Waelbroeck*: Holomorphic functions taking their values in a quotient bornological space. Linear operators in function spaces. 12th Int. Conf. Oper. Theory, Timisoara/Rom. 1988, Oper. Theory, Adv. Appl. *43* (1990), 323–335.

Les adresses des auteurs: *B. Aqzzouz*, *M. H. Elalj*, *R. Nouira*, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Equipe d'analyse fonctionnelle, B.P. 133, Kénitra, Morocco, e-mail: `baqzzouz@hotmail.com`.