

L'ÉQUATION NON-HOMOGENÈNE DE VÉCUA

Miloje Rajović, Rade Stojiljković, Dragan Dimitrovski

Abstrait. Le méthode de Lagrange de la variation des constantes au cas des équations aréolaires avec une conjugaison de la fonction inconnue \bar{w} , où appartient l'équation bien connue de I. N. Vecua [1], n'étant pas valable, on la remplace dans cet article par un méthode des itérations qui est plus immédiat et plus abordable aux traitements numériques.

On connaît, [1], page 156, que l'équation de Vécua

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w}, \quad (1)$$

$w = w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$ étant une fonction complexe de deux variables $z = x + iy$, $\bar{z} = z - iy$, différentiable dans une région fermée et finie G du plan des complexes, Γ étant la frontière de G , et avec les coefficients étant les fonctions mesurables dans l'espace:

$$A(z, \bar{z}), \quad B(z, \bar{z}) \in L_p(G), \quad p > 2,$$

possède une représentation de la solution

$$w(z, \bar{z}) = \Phi(z)e^{\omega(z)}, \quad (2)$$

où Φ est une fonction analytique seulement par rapport à z (c'est à dire au sens des équations de Cauchy-Riemann), en qualité d'une "constante" arbitraire de l'intégration, $\omega(z)$ étant une fonction entière, bornée dans G et donnée par une intégrale Denjoi-Théodorescu

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \left(A(\zeta) + B(\zeta) \frac{\bar{w}(\zeta)}{w(\zeta)} \right) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta). \quad (3)$$

La formule (2) ne présente pas la solution de l'équation (1), mais seulement une forme favorable pour une appréciation qualitative de la solution.

Tout cela dit ci-dessus ayant lieu au cas spécial si $A(z, \bar{z})$ et $B(z, \bar{z})$ sont les fonctions analytiques par chacune des variables indépendentes z et \bar{z} dans une région

fermée et finie G , car dans l'absence des singularités de A et B dans l'intérieur de G , l'intégrale double

$$\left(\iint_G |A(z, \bar{z})|^p dx dy \right)^{1/p}$$

toujours existe.

Dans son thèse du doctorat B. Ilievski [2], et dans l'article [3], sont résolues quelques équations spéciales (1) aux coefficients analytiques (par rapport à z), au moyen des séries aréolaires.

Dans son thèse de la maîtrise des sciences mathématiques, R. Stojiljković résout au moyen des séries aréolaires l'équation (1) avec les coefficients généraux analytiques $A(z, \bar{z})$ et $B(z, \bar{z})$, et il obtient pour la représentation (2) une formule explicite pour la solution de l'équation de Vécua dans la forme d'une série des coefficients avec une disposition symétrique des éléments A , B et l'élément de l'intégration $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned} w(z, \bar{z}) = & \Phi + \left\{ \int A \Phi d\bar{z} + \int B \bar{\Phi} dz \right\} \\ & + \left\{ \int A d\bar{z} \int A \Phi d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int B \bar{\Phi} d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{A} \bar{\Phi} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{B} \bar{\Phi} d\bar{z} \right\} \\ & + \left\{ \int A d\bar{z} \int A d\bar{z} \int A \Phi d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int A dz \int B \bar{\Phi} d\bar{z} \right. \\ & \left. + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int \bar{A} \bar{\Phi} d\bar{z} + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int \bar{B} \bar{\Phi} dz \right\} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

ainsi que les membres sur la k -ième place soient groupés dans une somme de 2^k , k -multiples intégrales des combinaisons et groupements ci-dessus des éléments A , B , et des leurs conjugués.

On va appliquer maintenant à l'équation de Vécua [1] l'idée classique de Lagrange des variations des constantes. Soit dans la représentation (2) $\Phi(z)$, au lieu d'être une "constante" d'intégration arbitraire, puisse être une fonction de deux variables z, \bar{z} , que l'on doit déterminer pour qu'elle soit la solution, avec (6), d'une équation non-homogène de Vécua

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + F, \quad (5)$$

$F(z, \bar{z})$ étant aussi une fonction analytique. On va supposer donc que la fonction

$$w = \Phi(z, \bar{z})e^{\omega(z)}, \quad (6)$$

$\omega(z)$ étant donnée par (3), c'est à dire liée avec une équation homogène correspondante de I. N. Vécua (1).

A partir de la dérivation de (6),

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} e^{\omega(z)} + \Phi e^{\omega(z)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} e^{\omega(z)} + \Phi e^{\omega(z)} \left[A(z, \bar{z}) + B(z, \bar{z}) \frac{\bar{w}}{w} \right] \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} e^{\omega(z)} + w \left[A + B \frac{\bar{w}}{w} \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} e^{\omega(z)} + Aw + B\bar{w},\end{aligned}$$

en remplaçant dans (5) on obtient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} e^{\omega(z)} + Aw + B\bar{w} = Aw + B\bar{w} + F,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = F(z, \bar{z}) e^{-\omega(z)},$$

c'est à dire

$$\Phi(z, \bar{z}) =$$

$$= \Psi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{F(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \iint_G \left[A(u, \bar{u}) + B(u, \bar{u}) \frac{\bar{w}(u)}{w(u)} \right] \frac{d\tau d\sigma}{u - \xi} \right\} \right] d\xi d\eta, \quad (7)$$

Ψ étant une fonctions analytique à l'égard à z en qualité d'une "constante" de l'intégration, $\zeta = \xi + i\eta \in G$, $u = \tau + i\sigma \in G$, $z = x + iy \in \text{int } G$.

Ainsi de cette façon avec (6) et (7) est donnée une représentation de la solution d'une équation non-homogène de Vécua, en dépendance de toutes les trois coefficients $A(z, \bar{z})$, $B(z, \bar{z})$, $F(z, \bar{z})$ analytiques, qui se distingue de la solution proposée dans le livre de Vécua [1], p. 168, formule (5.4):

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\bar{w}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{F(\zeta) d\xi d\eta}{\zeta - z} + \Psi(z), \quad (8)$$

d'une appréciation plus facile de l'exponentiel $e^{\omega(z)}$, à cause de la restrictivité du module du quotient \bar{w}/w .

Cependant, notre formule (7), aussi que la formule de Vécua (8), ne sont pas les solutions explicites, mais seulement les formules représentatives. Que le methode classique de la variation des constantes au sens de Lagrange ici n'aura pas du succès, on le voit de notre solution explicite (4), où la "constante" de l'intégration $\Phi(z)$ n'est pas isolée, ainsi que la variation devienne impossible, c'est à dire on aura une variation de la série des constantes, pas une seule, ce qui arrivera jusqu'à une équation intégrale ou à une équation différentielle d'ordre infinie.

On peut conclure que la variation des constantes au cas des équations de Vécua avec une conjugaison de la fonction inconnue \bar{w} , n'est pas possible au sens classique.

C'est pourquoi dans cet article nous donnerons un méthode de la solution du problème non-homogène de I. N. Vécua au cas des coefficients analytiques, au

moyen des séries aréolaires. Soit valable dans l'équation (5)

$$A(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} z^i \bar{z}^j, \quad B(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} b_{ij} z^i \bar{z}^j, \quad F(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{ij} z^i \bar{z}^j. \quad (9)$$

Alors, suivant le théorème de Cauchy [4], (5) possède une solution analytique

$$w = w(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} z^i \bar{z}^j. \quad (10)$$

Par un remplacement de (9) et (10) dans (8), apres un calcul prolongé, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈM I. *La solution générale de l'équation non-homogène (5) de V'ecua est donnée par l'expression*

$$w = w_{A,\Phi} + w_{B,\Phi} + w_{A,B,\Phi} + w_{A,B,F}, \quad (11)$$

ou $w_{A,\Phi}$ présente cette partie de la solution qui dépend du coefficient A et d'élément arbitraire de l'intégration Φ , $w_{B,\Phi}$ la partie de la solution dépendente de B et Φ , $w_{A,B,\Phi}$ est une influence commune de tous les deux coefficients A et B , tandis que $w_{A,B,F}$ contient l'influence de la non-homogénéité F en collaboration avec A , B , ainsi que ces influences sont données par les séries convergentes symétriques suivantes:

$$w_A = \Phi(z) + \int A \Phi d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int A \Phi d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int A d\bar{z} \int A \Phi d\bar{z} + \dots \quad (12)$$

$$w_B = \int B \bar{\Phi} d\bar{z} + \int B d\bar{z} \int \bar{B} \bar{\Phi} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int \bar{B} \bar{\Phi} dz + \dots \quad (13)$$

$$\begin{aligned} w_{A,B} = & \int A d\bar{z} \int B \bar{\Phi} d\bar{z} + \int B d\bar{z} \int \bar{A} \bar{\Phi} dz \\ & + \int A d\bar{z} \int A dz \int B \bar{\Phi} dz + \int A d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{A} \bar{\Phi} dz \\ & + \int A d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{B} \bar{\Phi} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{A} dz \int \bar{A} \bar{\Phi} dz \\ & + \int B d\bar{z} \int \bar{A} d\bar{z} \int \bar{B} \bar{\Phi} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int \bar{A} \bar{\Phi} d\bar{z} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} G = w_{A,B,F} = & \int F d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int F dz + \int B d\bar{z} \int \bar{F} dz \\ & + \int A d\bar{z} \int A d\bar{z} \int F d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{F} dz \\ & + \int B d\bar{z} \int \bar{A} dz \int \bar{F} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int \bar{F} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int A d\bar{z} \int A d\bar{z} \int A d\bar{z} \int F d\bar{z} + \int A d\bar{z} \int A d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{F} dz \\
 & + \int A d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{A} dz \int \bar{F} dz + \int A d\bar{z} \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int F d\bar{z} \\
 & + \int B d\bar{z} \int \bar{A} dz \int \bar{A} dz \int \bar{F} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{A} dz \int \bar{B} dz \int F d\bar{z} \\
 & + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int \bar{A} dz \int \bar{F} dz + \int B d\bar{z} \int \bar{B} dz \int B d\bar{z} \int F d\bar{z} \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

où (15) ne dépend pas de l'élément d'intégration $\Phi(z)$.

Plus exactement dit, le preuve peut être commencé par les séries (9), ensuite par l'induction on construit les formules (12), (13), (14) et (15), qu'on peut ensuite vérifier d'une démonstration immédiate.

Une autre démonstration peut être faite du méthode d'un remplacement analytique avec les itérations immédiatement de (5).

Ayant le théorème I ainsi formulé, et les solutions explicites, il est facile de formuler les théorèmes suivants, analogues avec les semblables chez les équations différentielles ordinaires:

THÉORÈME II. *La solution générale de l'équation non-homogène (5) est dans la forme d'une somme de la solution générale de l'équation correspondente homogène (1), avec un intégrale particulière de l'équation non-homogène, c'est à dire*

$$w = w_1 + G \quad \text{où} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} \equiv Aw_1 + B\bar{w}_1. \tag{16}$$

La démonstration est évidente.

THÉORÈME III. *La fonction $G(z, \bar{z})$ donnée par (15) est une solution particulière de l'équation non-homogène (5).*

La démonstration va d'une vérification immédiate.

THÉORÈME IV. *Si dans l'équation (5) $F = f_1 + f_2 + \dots + f_k$, c'est à dire si (5) est de la forme*

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + \sum_{i=1}^k f_i(z, \bar{z})$$

et si $G_{f_1}, G_{f_2}, \dots, G_{f_k}$ sont les intégrales particulières des équations plus simples

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + f_1$$

.....

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + f_k,$$

alors l'intégrale particulière de l'équation (5) est

$$G_f = G_{f_1} + G_{f_2} + \cdots + G_{f_k}.$$

La démonstration suit si dans (15) on pose $F = \sum_{i=1}^k f_i$, si l'on développe et arrange les intégrales.

THÉORÈME V. Avec une substitution linéaire de la fonction

$$w = \alpha(z, \bar{z})v + \beta(z, \bar{z}) \quad (17)$$

dans l'équation non-homogène de Vécua (5), où v est une nouvelle fonction inconnue, α et β les coefficients libres, on obtient de nouveau équation non-homogène du type (5)

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \left(A - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right) v + B \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \bar{v} + \frac{1}{\alpha} \left[\bar{\beta} B + F + \beta A - \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} \right]. \quad (18)$$

La démonstration est élémentaire.

Les conséquences:

THÉORÈME VI. On peut éliminer $\alpha(z, \bar{z})$ ainsi que le coefficient près de \bar{v} soit une constante ou l'unité, de

$$B \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \text{const} = C = \text{ou } 1.$$

THÉORÈME VII. On ne peut pas d'une voie élémentaire éliminer β pour que l'équation non-homogène (5) avec une substitution (17) passe dans une équation homogène du type (1).

Car dans ce cas doit être

$$\frac{1}{\alpha} \left[\bar{\beta} B + F + \beta A - \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} \right] = 0$$

ce qui donne $\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} = A\beta + B\bar{\beta} + F$ ce qui est équivalent à (5).

Par cet élément l'équation de Vécua se différencie essentiellement des équations aréolaires ordinaires, qui ne possèdent pas la conjugaison de la fonction \bar{w} .

THÉORÈME VIII. Avec une substitution linéaire de la fonction (17) on ne peut pas éliminer le membre conjugué \bar{v} .

Car dans ce cas vaudrait $B \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 0$, ce qui n'est pas possible au cas général.

Ainsi nous avons éclairé dans cet article quelques questions élémentaires de l'équation Vécua relatives à la non-homogénéité.

LITTERATURE

- [1] I. N. Vécua, *Obobščennie analitičeskie funkcii*, Monographie, Moskva, "Nauka", 2nd ed., 1988
- [2] B. Ilievski, *Thèse du Doctorat*, Skopje, Republika Makedoonija, 1993
- [3] B. Ilievski, *Nekoi analitički rešenija na edna klasa ravenki Vekua*, Matematički Bilten na DMI na Republika Makedonija, **14** (XL), Skopje 1990, 79–86
- [4] D. Dimitrovski, B. Ilievski, *L'équation différentielle aréolaire analytique*, Prilozi MANU **V**, 1–2, section sci. math and techn., Skopje 1984, 25–39

(received 21.04.1994.)

Mašinski fakultet, Kraljevo, Jugoslavija

Viša pedagoška škola, Gnjilane, Jugoslavija

Matematički institut, Prirodno-matematički fakultet, Skopje, p.f.162, BJR Makedonija