PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 34 (48), 1983, pp. 103–107

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CARDINALES

Ljubiša Kočinac

Si (dans une classe définie d'espaces toplogiques) une fonction cardinale est donnée, il est naturel d'examiner son comportement par rapport à quelques opérations avec des espaces, c'est-à-dire sous une application de l'espace: par exemple, comment la fonction est changée par un passage à un sous-espace, à un produit, sous des applications continues (ou quelques autres). Il est évident que le procédé est aussi tout à fait logique quand il est inversé: si la fonction cardinale satisfait cetraines conditions (naturellement)données, on peut se demender dans quelle relation elle se trouve avec les fonctions cardinales connues. Dans ce travail on examine justement cette deuxième manière d'étude des fonctions cardinales.

La terminologie et les notations sont comme dans [**9**] et [**4**]; D et $D(k)$ dénotent l'espace discret de deux points et de k points, respecetivement; tous les espaces considerés sont infines et T_1 si l'on ne dit pas le contraire.

Soit φ une fonction cardinale. Considérons les conditions suivantes pour φ:

(1) pour chaque espace discret X on a $\varphi(X) =| X |$;

(2) $\varphi(X) \leq| X |$ pour chaque espace X;

(3) φ est une fonction monotone, c'est-à-dire, si A est un sous-ensemble de X, alors $\varphi(A) \leq \varphi(X)$;

(4) si A est dense dans X, alors $\varphi(A) \leq \varphi(X)$;

(5) si A est dense dans X, alors $\varphi(X) \leq \varphi(A)$;

(6) si Y est une image continue de l'espace X, alors $\varphi(Y) \leq \varphi(X)$;

(7) si $\{X_s : s \in S\}$ est une famille d'espaces et $X = \Pi\{X_s : s \in S\}$ leur produit (topologique), alors $\varphi(X) \leq| S | \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\}$.

THÉORÈME 1. (i) *Le nombre de Kurepa-Souslin c est la plus petite fonction cardinale qui satisfait aux conditions* (1), (4) *et* (6) *;

AMS Subject Classification (1980): Primary 54 A 25.

*Une caractérisation de c differente de celle-la donnée par B. Efimov (v.[**6**] et [**11**]).

(ii) *L'étendue (spread) s est la plus petite fonction cardinale qui satisfait aux conditions* (1) *et* (3)*;*

(iii) *La densité d est la plus grande fonction cardinale qui satisfait aux conditions* (2) *et* (5).

Démonstration. (i) Soit $\varphi(X) = k$ et soit $\mathcal{G}$ une famille arbitraire de sous-ensembles non-vides, ouverts et deux à deux disjoints de X. Sans limiter la généralité de notre démonstration, nous pouvons supposer que $\mathcal{G}$ est une telle famille maximale. Alors, $Y = \cup\mathcal{G}$ est un ensemble partout dense dans X et c'est pourquoi d'après (4) nous avons

$$(*) \qquad \varphi(Y) \leq \varphi(X)$$

D'autre part, nous pouvons appliquer continuement Y sur un espace discret Z de cardinalité $\mid \mathcal{G} \mid$ (appliquant chaque $U \in \mathcal{G}$ en un point de Z). D'après (1) et (6) nous aurons $\mid \mathcal{G} \mid=\mid Z \mid= \varphi(Z) \leq \varphi(Y)$. La dernières inéqualité avec $(*)$ donne $\mid \mathcal{G} \mid\leq \varphi(X) = k$, ce qui signifie que $c(X) \leq \varphi(X)$.

Puisque, comme il bien connu [**5**; p. 86 et 155], [**9**; p. 14], c satisfait aux conditions (1), (4) et (6), l'affirmation est complètement prouvée.

(ii) Soient $\varphi(X) = k$ et A un sous-espace discret et arbitraire de X. Alors d'après (1) $\varphi(A) =\mid A \mid$, tandis que d'après (3) $\varphi(A) \leq \varphi(X)$. Donc, $\mid A \mid\leq \varphi(X)$. De même

$$s(X) = \sup\{\mid A \mid : A \text{ est discret en } X\} \leq \varphi(X).$$

Puisque s satisfait aux conditions (1) et (3), s est en effet la plus petite fonction cardinale qui satisfait à ces deux conditions.

Remarque 1. D'une manière complètement égale on prouve que p, $(p(X) = \sup\{\mid A \mid : A$ est un sous-espace discret et fermé en $X\})$, est la plus petite fonction cardinale qui satisfait (1) et

$$(3') \text{ pour chaque } A \subset X \text{ fermé on a } \varphi(A) \leq \varphi(X).$$

(iii) Si $d(X) = k$ et A est un espace dense dans X avec $\mid A \mid= k$, alors de (5) il suit que $\varphi(X) \leq \varphi(A)$, et d'après (2) $\varphi(A) \leq\mid A \mid= k$. Dès lors $\varphi(X) \leq d(X)$. Nous terminous la démonstration en remarquant que d satisfait aux conditions (2) et (5).

COROLLAIRE 1. (a) *Soient X un espace métrique et φ une fonction cardinale. Alors $\varphi(X) = c(X)$ si et seulement si φ satisfait aux conditions* (1), (2), (4), (5) *et* (6).

Cela suit du fait que dans les espaces métriques c et d sont égales.

Faisons observer qu'ici on peut supprimer la condition (6) et remplacer (4) par (3), ce qu'on peut facilement démontrer (v. [**10**]).

(b) Si X est un espace linéaire ordonné ou un bicompact séquential ou un bicompact pseudo-radial, et φ satisfait aux conditions (1), (4) et (6), alors $\mid X \mid\leq$

exp $\varphi(X)$ (v.[**8**; p. 18], [**1**; p. 258], et [**4**; p. 38]. respectivement); si X est un bicompact α-séparé (α-expanded), alors $|X| \leq \exp\exp\varphi(X)$ [**3**; p. 507. th. 15].

(c) Si une fonction cardinale φ satisfait aux conditions (1) et (3), alors:

pour tout espace de Hausdorff X nous avons $|X| \leq \exp\exp\varphi(X)$ et $o(X) \leq \exp\exp\varphi(X)$ (v. [**7**; p. 350] et [**9**; p.24], respectivement);

si X est un bicompact α-gauche, alors $|X| \leq \varphi(X)^+$ [**3**; p. 507, th. 16].

(d) Si X est un espace arbitraire de Hausdorff, φ_1 une fonction cardinale qui satisfait aux conditions (1) et (3) et φ_2 satisfait (2) et (5), alors $\varphi_2(X) \leq \exp\varphi_1(X)$ [**7**; p. 347, th. 1]; de plus,

si X est un bicompact, alors $\varphi_2(X) \leq \varphi_1(X)^+$ [**12**; p. 59, th. 1];

si X est un bicompact dyadique, alors $\varphi_2(X) \leq \varphi_1(X)$ [**5**; p. 293].

Remarque 2. Dans (d) on a une inégalité stricte; $h\varphi_2(X) \leq \exp\varphi_1(X)$. En effet, si l'affirmation n'était pas vraie, alors il existerait un $Y \subset X$ tel que $\varphi_2(Y) > \exp\varphi_1(X)$. Puisque selon la supposition φ_1 est une fonction (cardinale) monotone, $\varphi_1(Y) \leq \varphi_1(X)$, d'où nous avons $\varphi_2(Y) > \exp\varphi_1(Y) \geq \exp\varphi_1(Y)$. Cela s'oppose au résultat (d) (puisque Y est un espace de Hausdorff).

THÉORÈME 2. *Soit φ une fonction cardinale qui satisfait aux conditions* (1), (3) et (7). *Alors*

(i) $\varphi(D^k) = k$, *ou même* $\varphi(D(k)^{k+} = k^+$;

(ii) $\varphi(\Pi\{X_s : s \in S\}) \geq |S|$;

(iii) *Dand la classe des espaces nuldimensionels le poids w est la plus grande fonction cardinale qui satisfait aux conditions* (1), (3) *et* (7).

Démonstration. (i) L'espace D^k contient un sous-espace discret A de la puissance k determiné par $A = \{x \in D^k : x_\alpha = 1 \text{ et } x_\beta = 0 \text{ pour } \beta \neq \alpha,\ \alpha \in k\}$. C'est pourquoi d'après (1) et (3), $\varphi(D^k) \geq \varphi(A) = |A| = k$, et d'après (1) et (7), $\varphi(D^k) \leq k \cdot \varphi(D) = k$, c'est-à-dire $\varphi(D^k) = k$.

Pour la preuve de la deuxième partie de l'affirmation nous utiliserons un résultat de Mycielski (v. [**8**; p. 83]) disant qu'on peut immerger $D(k^+)$ (comme un sous-espace fermé) en $D(k)^{k+}$. C'est pourquoi nous avons

$$\varphi(D(k)^{k^+}) \leq k^+ \cdot \varphi(D(k)) = k^+ \cdot k = k^+, \text{ et } \varphi(D(k)^{k^+}) \geq \varphi(D(k^+)) = k^+,$$

ci qui donne $\varphi(D(k)^{k+}) = k^+$.

(ii) Puisque (les espaces étant T_1) l'espace $\Pi\{X_s : s \in S\}$ contient l'ensemble $D^{|S|}$, ce qui d'après (3) entraîne $\varphi(\Pi\{X_s : s \in S\}) \geq \varphi(D^{|S|})$, dès lors d'après (i), $\varphi(D^{|S|}) = |S|$, ce qui prouve notre affirmation.

(iii) Soit X un espace arbitraire nultimentionel de poids $w(X) = k$. D'après un théorème bien connu d'Alexandroff [**5**; th. 6.2. 16], l'espace X peut être immergé dans le cube de Cantor D^k. Selon la condition (3), nous avons maintenant $\varphi(X) \leq \varphi(D^k)$, c'est-à-dire grâce à (i) dans ce théoremè, $\varphi(X) \leq k$. Donc, $w(X) \geq \varphi(X)$.

La fonction w satisfait aux trois conditions données, de manière qu'ell est vraiment la plus gande de ces fonctions cardinales dans la classe des espaces nuldimensionels.

THÉORÈME 3. *Soit* φ *fonction cardinale qui satisfait les conditions* (1), (3), (6) *et* (7). *Alors*

(i) $\varphi(\Pi\{X_s : s \in S\}) =\mid S \mid \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\}$;

(ii) *Dans la classe des bicompacts le poids* w *est la plus grande fonction (cardinale) qui satisfait aux quatre conditions données;*

(iii) *Si* X *est un bicompact et* $\varphi(X) < k$, *alors pour au moins un point* $x \in X$ *on a* $\pi\chi(x, X) < k$;

(iv) *Si* X *est un bicompact extrêmement non-connexe et* $\varphi(X) < k$, $k > \chi_0$, *alors* $\chi(x, X) < k$ *pour au moins un point* $x \in X$.

Démonstration. (i) D'après le théorème 2 de (1), (3) et (7) il suit que $\varphi(\Pi\{X_s : s \in S\}) \geq\mid S \mid$. D'autre part, d'aprés (6), étant que les projections sont des applications continues, nous avons

$$\varphi(\Pi\{X_s : s \in S\} \geq \varphi(X_s), \text{ pour chaque } s \in S,$$

et finalement nous avons $\varphi(\Pi\{X_s : s \in S\}) \geq\mid S \mid \cdot \sup\{\varphi(X_s) : s \in S\}$. Cela avec (7) donne l'égalité.

(ii) Il est connu que chaque bicompact X de poids $w(X) = k$ est un transformé continu d'un sous-espace fermé H du cube de Cantor D^k. Aussi d'aprés (6) nous avons $\varphi(X) \leq \varphi(H)$, tandis que d'après (3), $\varphi(H) \leq \varphi(D^k)$, c'est-à-dire d'après (i) du théorème 2, $\varphi(H) \leq k$. Cela signifie que $\varphi(X) \leq w(X)$

Puisque dans la classe des bicompact le poids w satisfait aux quatre conditions données [**4**; p. 54, cor. 2.1.10] et [**9**; p. 103], notre affirmation est vraie.

(iii) Supposons, contrairement à l'affirmation du théorème, que pour chaque $x \in X$, $\pi\chi(x, X) \geq k$. D'après un résultat de B. Šapirovski [**13**; p. 126, th. 1], [**4**; p. 65, th. 3.1.9], [**9**; p. 63], ou peut appliquer d'une façon continue l'espace X sur I^k, où $I = [0, 1]$. Maintenant d'après (6), nous avons $\varphi(X) \geq \varphi(I^k)$. D'après ce qui fut prouvé en (ii) du théorème 3 et du fait que I est bicompact, nous avons $\varphi(I) \leq w(I) = \aleph_0$, d'où à cause de (1), (3) et (7) nous aurions $\varphi(I^k) = k \cdot \varphi(I) = k$. Donc, $\varphi(X) \geq k$, ce qui contredit l'hypothèse.

(iv) Soit $\chi(x, X) \geq k$ pour chague $x \in X$. D' après un théorème de Bandlov (v. [**4**; p. 71, th. 3. 3. 15]), dans ce cas il est possible de transformer continûment X sur D^k. Aussi (6) donne $\varphi(X) \geq \varphi(D^k)$, c'est-à-dire d'après (i) du théorème 2, $\varphi(X) \geq k$, ce qui est une contradiction.

Le théorème est comlètement prouvé.

COROLLAIRE 2. *Soient* X *un bicompact* α*-séparé,* φ_1 *une fonction cardinale qui satisfait* (1), (3), (6) *et* (7), *et* φ_2 *une fonction cardinale qui satisfait* (1), (4) *et* (6). *Alors* $\varphi_1(X) \leq \exp\, \varphi_2(X)$ (v. [**3**; th. 15], [**4**; p. 37]).

Remarque 3. Pour la classe des bicompacts dyadiques on peut supprimer la condition (3) dans lévaluation du poids de l'espace. En effet, le bicompact dyadique X de poids k est une image continue de D^k (v. [**5**; p. 292]). C'est pourquoi $\varphi(X) \leq \varphi(D^k) \leq k \cdot \varphi(D) = k$, c'est-à-dire $\varphi(X) \leq w(X)$.

De plus, on peut, au lieu de la condition (1), prendre la condition (2); w sera la plus grande fonction cardinale qui dans la classe bicompacts quadiques satisfait (2), (6) et (7).

De la remarque 3 (et du théorème 3) et de (ii) du théorème 1, on obtient une conséquence importante:

COROLLAIRE 3. *Dans la classe des bicompacts dyadiques le poids w est égal à φ sid et seulement si φ satisfait aux conditions* (1) (3) (6) et (7).

Les conditions (1), (3), (6) et (7) sont indépendantes. En effet, les fonctions cardinales

$$s, d, \varphi(X) = \begin{cases} \mid X \mid, & \text{si } X \text{ est discret} \\ \chi(X), & \text{autrement} \end{cases}, \quad \text{et } \varphi(X) = \aleph_0 \text{ pour chaque } X$$

satisfont, respectivement, à toutes les conditions données sauf à la condition (7), (3), (6) et (1), respectivement.

Je tiens à remercier M. A. V. Arhangelskii de ses suggestions bien utiles.

LITÉRATURE

[1] А. В. Архангельский, *Число Суслина и мощность, характеры точек в секвециальных бикомпактак*, ДАН СССР 192:2 (1970), 255–258.

[2] A. V. Arhangel'skiĭ, *On cardinal invariants*, Proc. Third Prague Topological Symp. 1971, Prague, 1972, 37–46.

[3] А. В. Архангельский, *Об α- растянумых пространствах*, ДАН СССР 239:3 (1978), 505–508.

[4] А. В. Архангельский, *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты*, Успехи матем. наук 33:6 (1978), 29–84.

[5] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[6] Б. Ефимов, *Унимодулярные весовые функции и проблема П. С. Александрова и П.С. Урысона в теории бикомпактов*, ДАН СССР 158:6 (1964), 1260–1263.

[7] A. Hajnal, I. Juhasz, *Disrete subspaces of topological spaces*, Indag. Math. **29** (1967), 343–356.

[8] I. Juhasz, *Cardinal functions in topology*, Amsterdam, 1971.

[9] I. Juhasz, *Cardinal functions in topology-ten years later*, Amsterdam, 1980.

[10] Lj. Kočinac, *O nekim osobinama kardinalnoznačnih funkcija*, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, **7** (1981), 301–306.

[11] Đ. Kurepa, Review of [**2**] in MR 53≠14377 (1977).

[12] Б. Шапировский, *Канонические множества и характер. Плотность и вес в бикомпактах*, ДАН СССР 218:1 (1974), 58–61.

[13] Б. Ё. Шапировский, *Об отображениях на тихоновские кубы*, Успехи матем. наук 35:3 (1980), 122–130.

Filozofski fakultet
18000 Niš
Jugoslavija

(Reçu le 11 03 1982)