PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 54 (68), 1993, 80–96

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ m-ПЛОСКОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО n-ПРОСТРАНСТВА

Альфия Шабаева-Масагутова

Резюме. Изучается грассманово многообразие $G^s_{n,m}$ m-плоскостей эллиптического n-пространства S_n в его инвариантной римановой метрике. Даются новые, более простые доказательства теорем о геодезических этого многообразия (m-геликоидах), о вполне геодезических подмногообразиях этого многообразия, о его деривационных формулах и тензоре кривизны. В частности, рассматриваются псевдоконгруэнции Картана, паратактические конгруэнции и паратактические m-геликоиды. Показывается, что m-пучки, проходящие через m-плоскость, определяют метрическую сегреану в бесконечно удаленной гиперплоскости касательного $(m+1)(n-m)$-пространства многообразия $G^s_{n,m}$. Деривационные формулы позволяют изучать дифференциальную геометрию семейств m-плоскостей.

Геометрия многообразия прямых эллиптического 3-пространства S_3 впервые изучалась Штуди [**1**], который показал, что в инвариантной метрике этого многообразия роль геодезических линий играют семейства прямолинейных образующих линейчатых геликоидов. Картан [**2**] рассмотрел симметрическое пространство, реализуемое в виде квадрики комплексного проективного пространства $\mathbf{C}P_n$ и изучал топологические свойства этого пространства; это пространство изометрично многообразию прямых эллиптического n-пространства S_n в его инвариантной метрике [**3**]. Розенфельд [**4**] изучал многообразие m-плоскостей пространства S_n и показал, что в инвариантной метрике этого многообразия роль геодезических линий играют семейства m-плоских образующих $(m+1)$-поверхностей, называемых m-геликоидами (см. также [**5**, с. 719]). Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению многообразия m-плоскостей пространства S_n, здесь находятся деривационные формулы симметрического пространства, изометричного этому многообразию, и находятся уравнения структуры этого пространства, что дает возможность изучать дифференциальную геометрию семейств m-плоскостей пространства S_n, изображаемых поверхностями этого симметрического пространства.

AMS Subject Classification (1990): Primary 51C35

1. Эллиптические грассманианы

Многообразие m-плоскостей n-мерного проективного пространства P_n часто называется *грассмановым многообразием* $G_{n,m}$, так как m-плоскости $(X_0X_1\dots X_m)$ пространства P_n, проходящие через точки X_a $(a = 0,1,\dots,m)$ с проективными координатами x_a^i $(i = 0,1,\dots,n)$, характеризуются *грассмановыми координатами*

$$P^{i_0i_1\dots i_m} = x_0^{[i_0}x_1^{i_1}\dots x_m^{i_m]} \tag{1}$$

где [ ] - знак альтернирования. Если представлять точки $X(x^i)$ пространства P_n векторами $\mathbf{x} = \{x^i\}$ ("аналитическими точками"), то грассмановы координаты $P^{i_0i_1\dots i_m}$ можно рассматривать как координаты $(m+1)$-вектора, являющегося внешним произведением векторов $\mathbf{x}_a$, представляющих точки X_a.

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_m \tag{2}$$

Будем обозначать многообразие m-плоскостей пространства P_n символом $G^p_{n,m}$, а многообразие m-плоскостей эллиптического пространства S_n символом $G^s_{n,m}$.

Грассмановы координаты (1) можно рассматривать как проективные координаты точки P проективного пространства P_N, размерность N которого равна $\binom{n+1}{m+1} - 1$. Координаты (1) удовлетворяют условиям

$$P^{[i_0i_1\dots i_m}P^{j_0]j_1\dots j_m} = 0 \tag{3}$$

Алгебраическая поверхность пространства P_N с уравнениями (3), называется *грассманианой* и обозначается $\Gamma^p_{n,m}$. Точки грассманианы взаимно однозначно и взаимно непрерывно изображают m-плоскости многообразия $G^p_{n,m}$. Поэтому размерность грассманианы $\Gamma^p_{n,m}$ равна размерности многообразия $G^p_{n,m}$, т.е. $(m+1)(n-m)$.

В том случае, когда рассматривается не многообразие $G^p_{n,m}$, а многообразие $G^s_{n,m}$, будем предполагать, что кривизна пространства S_n равна 1, что координаты точки пространства S_n нормированы условием $\sum_i (x^i)^2 = 1$ и что точки X_a являются вершинами автополярного симплекса, т.е. координаты x_i^a удовлетворяют условиям $\sum_i x_a^i x_b^i = \delta_{ab}$, т.е. векторы $\mathbf{x}_a$, представляющие эти точки, образуют ортонормированный репер. В этом случае будем называть грассманиану (3) *эллиптической грассманианой* и обзначим ее $\Gamma^s_{n,m}$.

$(m+1)$-векторы $\mathbf{P}$ можно рассматривать как векторы линейного $(N+1)$-пространства $L_{\binom{n+1}{m+1}}$. Определим в этом пространстве скалярное произведение векторов

$$\mathbf{pq} = \sum_{(i_0i_1\dots i_m)} p^{i_0i_1\dots i_m}q^{i_0i_1\dots i_m} = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_0}\sum_{i_1}\dots\sum_{i_m} p^{i_0i_1\dots i_m}q^{i_0i_1\dots i_m} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^2 &= \sum_{(i_0 i_1 \dots i_m)} (p^{i_0 i_1 \dots i_m})^2 = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_0} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_m} (p^{i_0 i_1 \dots i_m})^2 \\ &= \mathbf{x}_0^2 \cdot \mathbf{x}_1^2 \cdot \dots \cdot \mathbf{x}_m^2 = 1\end{aligned} \tag{5}$$

Так как $|\mathbf{pq}| \leq 1$, то всяким двум $(m+1)$- векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ можно поставить в соответствие положительное число Ω, для которого

$$\cos \Omega = \mathbf{pq} \tag{6}$$

Введем в пространстве P_N метрику эллиптического пространства S_N, в котором расстояние Ω между точками P и Q, представленными $(m+1)$-векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, определяется по формуле (6).

Если мы выберем за точки X_a и Y_a точки пересечения m-плоскостей p и q с общими перпендикулярами этих плоскостей, то

$$\mathbf{pq} = \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{x}_m \mathbf{y}_m = \cos \omega_0 \cos \omega_1 \dots \cos \omega_m, \tag{7}$$

где ω_a-стационарные расстояния m-плоскостей p и q, т.е.

$$\cos \Omega = \cos \omega_0 \cos \omega_1 \dots \cos \omega_m \tag{8}$$

Так как стационарные расстояния ω_a двух m-плоскостей пространства S_n не изменяются при движении этого пространства, нами доказана.

Теорема 1. *Метрика на грассманиане $\Gamma^s_{n,m}$, индуцируемая на ней метрикой пространства S_N с расстоянием Ω, инвариантна при движениях этого пространства, индуцированных движениями пространства S_n.*

В случае, когда расстояния ω_a и Ω бесконечно малы, будем обозначать эти расстояния $d\omega_a$ и $d\Omega$. В этом случае, отбрасывая бесконечно малые высшего порядка, мы можем переписать формулу (8) в виде $1 - (d\Omega)^2/2 = 1 - (d\omega_0)^2/2 - (d\omega_1)^2/2 - \dots - (d\omega_m)^2/2$, т.е.

$$(d\Omega)^2 = (d\omega_0)^2 + (d\omega_1)^2 + \dots + (d\omega_m)^2 \tag{9}$$

Грассманиана $\Gamma^s_{n,m}$, как и грассманиана $\Gamma^s_{n,1}$, рассматривавшаяся в работе Картана [**2**], является симметрическим римановым пространством, причем отражение от точки грассманианы изображает отражение от плоскости пространства S_n.

2. Псевдоконгруэнция Картана и m-геликоиды

Будем называть семейство m-плоскостей пространства *конгруэнцией*, если через каждую точку некоторой области пространства S_n проходит единственная m-плоскость семейства, а *псевдоконгруэнцией* – такое семейство m-плоскостей, что полярные $(n-m-1)$-плоскости этих m-плоскостей образуют конгруэнцию. Поэтому конгруэнция m-плоскостей пространства S_n зависит от $n-m$ вещественных параметров, а псевдоконгруэнция m-плоскостей – от $m+1$ вещественного параметра.

Так как всякое симметрическое пространство можно реализовать в виде вполне геодезической поверхности фундаментальной группы Ли этого пространства, причем эта поверхность состоит из произведений отражений от точек симметрического пространства на отражение от фиксированной точки этого пространства, а всякая подгруппа группы Ли также является вполне геодезической поверхностью этой группы, пересечение этих двух геодезических поверхностей также является вполне геодезической поверхностью как всей группы, так и каждой из этих подгрупп. Среди подгрупп простых групп Ли, к которым относится группа движений пространства S_n, важную роль играет *подгруппа Картана*, состоящая из всех элементов группы, перестановочных с регулярным элементом этой группы. В случае группы движений пространства S_{2n+1} матрицы $U = (U^i_j)$ регулярных элементов приводятся к виду

$$U = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\omega_1 & \cos\omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos\omega_n & \sin\omega_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin\omega_n & \cos\omega_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

а в случае группы движений пространства S_{2n+2} матрицы регулярных элементов приводятся к виду

$$U = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\omega_1 & \cos\omega_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos\omega_n & \sin\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin\omega_n & \cos\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Поэтому матрицы элементов подгруппы Картана групп движений пространств S_{2n+1} и S_{2n+2} приводятся к виду (10) и (11), где числа ω_i принимают все возможные значения.

Пересечение поверхности группы движений пространства S_n, изображающей многообразие $G^s_{n,m}$, с подгруппой Картана является $(m+1)$-поверхностью, которую мы будем называть $(m+1)$-*поверхностью Картана*, а семейство m-плоскостей пространства S_n, изображаемое этой $(m+1)$-поверхностью, будем называть *псевдоконгруэнцией Картана*. Так как $(m+1)$-поверхность Картана является вполне геодезической поверхностью грассманианы $\Gamma^s_{n,m}$, псевдоконгруэнция Картана также является вполне геодезическим подмногообразием многообразия $G^s_{n,m}$ с метрикой, определяемой в этом многообразии метрикой грассманианы $\Gamma^s_{n,m}$.

ТЕОРЕМА 2. *Псевдоконгруэнции Картана пространств S_{2n+1} и S_{2n+2} состоят из m-плоскостей с общей системой общих перпендикуляров, эти псевдоконгруэнции изометричны $(m+1)$-мерному параллелепипеду евклидова пространства E_{m+1} с отождествленными противоположными гранями.*

В самом деле, m-плоскости $(A_0, A_1, \dots, A_m)$, проходящие через точки A_a прямых (E_{2a}, E_{2a+1}), обладают тем свойством, что произведения отражений от этих m-плоскостей на отражение от m-плоскости $(E_0E_1 \dots E_m)$ являются движениями с матрицами (10) и (11), у которых $\omega_{m+1} = \dots = \omega_n = 0$, откуда видно, что псевдоконгруэнция m-плоскостей этого вида является псевдоконгруэнцией Картана и всякую псевдоконгруэнцию Картана можно представить в таком виде. При этом стационарные расстояния m-плоскостей $(E_0E_1 \dots E_m)$ и $(A_0A_1 \dots A_m)$ равны $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$, а стационарные расстояния m-плоскостей $(A_0, A_1, \dots, A_m)$ и $(A'_0, A'_1, \dots, A'_m)$ равны $\omega'_0 - \omega_0, \omega'_1 - \omega_1, \dots, \omega'_m - \omega_m$. Поэтому если мы примем за расстояние между этими m-плоскостями псевдоконгруэнции Картана число $\sqrt{(\omega'_0 - \omega_0)^2 + (\omega'_1 - \omega_1)^2 + \dots + (\omega'_m - \omega_m)^2}$, дифференциал которого совпадает с дифференциалом $d\Omega$, определяемым по формуле (9), псевдоконгруэнция Картана становится локально изометричной евклидову пространству E_{m+1}. Так как общие перпендикуляры m-плоскостей псевдоконгруэнции Картана - эллиптические прямые, изометричные окружностям с длиной π, эта псевдоконгруэнция изометрична параллелепипеду пространства E_{m+1} с отождествленными противоположными гранями.

В случае $m = 1$ псевдоконгруэнция Картана является конгруэнцией перпендикуляров к прямой пространства S_3 и изометрична квадрике Клиффорда радиуса $\pi/4$ этого пространства. В общем случае геометрия $(m+1)$-поверхности, изометричной псевдоконгруэнции Картана, изучалась Розенфельдом в [**6**].

Так как через каждые две m-плоскости пространства S_n можно провести псевдоконгруэнцию Картана, определяемую общими перпендикулярами этих m-плоскостей, геодезическое расстояние ω между двумя m-плоскостями пространства S_n связано с их стационарными расстояниями ω_a соотношениями

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + \dots + \omega_m^2. \tag{12}$$

Поэтому геодезические линии грассманианы $\Gamma_{n,m}$ обладают тем свойством, что их дуги изображаются отрезками прямых в параллелепипедах, изометричных псевдоконгруэнциям Картана. Поэтому геодезические линии грассманианы $\Gamma^s_{n,m}$ изображают семейства m-геликоидов, осями которых служат общие перпендикуляры m-плоскостей псевдоконгруэнции Картана.

Если оси m-геликоида пересекают m-плоскость $p(0)$ этого семейства в точках $A_a(\mathbf{a}_a)$, а полярную $(n-m-1)$-плоскость этой m-плоскости в точках $B_a(\mathbf{b}_a)$, то m-плоская образующая $p(t)$ m-геликоида определяется точками $X_a(t)$, представленными векторами

$$\mathbf{x}_a(t) = \mathbf{a}_a \cos(k_a t) + b_a \sin(k_a t), \tag{13}$$

а $(m+1)$-вектор $\mathbf{p}$, определяющий m плоскость $p(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{x}_0(t) \wedge \mathbf{x}_1(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_m(t) \\ &= (\mathbf{a}_0 \cos(k_0 t) + \mathbf{b}_0 \sin(k_0 t)) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{a}_m \cos(k_m t) + \mathbf{b}_m \sin(k_m t)) \end{aligned} \tag{14}$$

3. Эллиптические сегреаны

Будем называть *сегреаной* $\Sigma^p_{m,n}$, [**7**], поверхность пространства P_{mn+m+n}, точки z которой изображают пары (X,Y) точек пространств P_m и P_n (X из P_m, Y из P_n) по закону

$$z^{au} = x^a y^u \qquad (a,b = 0,1,\ldots,m; u,v = 0,1,\ldots,n) \tag{15}$$

Координаты z^{au} удовлетворяют уравнениям

$$z^{au} \cdot z^{bv} = z^{av} z^{bv} \tag{16}$$

Сегреана $\Sigma^p_{m,n}$ является алгебраической поверхностью порядка $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

Будем называть *эллиптической сегреаной* $\Sigma^s_{m,n}$ [**8**] эллиптического пространства S_{mn+m+n} поверхность этого пространства, точки которой изображают пары (X,Y) точек пространств S_m и S_n (X из S_m, Y из S_n) по закону (15). Если координаты точек X и Y удовлетворяют условиям $\sum_a x^a_b x^a_c = \delta_{bc}$, $\sum_u y^u_v y^u_w = \delta_{uw}$, то координаты (15) удовлетворяют аналогичному условию $\sum_u \sum_u (z^{au})^2 = 1$.

Стационарной подгруппой эллиптической сегреаны $\Sigma^s_{m,n}$ в пространстве S_{mn+m+n} является прямое произведение групп движений пространств S_m и S_n.

За касательные векторы к грассманиане $\Gamma_{n,m}$ в ее точке P, изображающей m-плоскость P, можно принять производные

$$\mathbf{l} = d\mathbf{p}(t)/dt|_{t=0}, \tag{17}$$

где $\mathbf{p}(t)$ – $(m+1)$-вектор (14), определяющий m-плоскую образующую m-геликоида, проходящую через m-плоскость $P(t=0)$. Производные (17) имеют вид

$$\mathbf{l} = \sum_a (\mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{a-1} \wedge k_a \mathbf{b}_a \wedge \mathbf{a}_{a+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_m) \tag{18}$$

Если за точки репера в пространстве S_n выбраны точки $E_a(\mathbf{e}_a)$ m-плоскости P и точки $E_u(\mathbf{e}_a)$ $(u = m+1,\ldots,n)$ ее полярной $(n-m-1)$-плоскости, то векторы $\mathbf{a}_a$ и $\mathbf{b}_a$ можно записать в виде

$$\mathbf{a}_a = a^b_a \mathbf{e}_b, \qquad \mathbf{b}_a = b^u_a \mathbf{e}_u \tag{19}$$

а координаты вектора $\mathbf{l}$ в пространстве E_{N+1} могут быть записаны в виде

$$l^{au} = \sum_b k_b a_a^b b_b^u \tag{20}$$

В силу соотношений $\mathbf{a}_a \mathbf{a}_b = \delta_{ab}$, $\mathbf{b}_a \mathbf{b}_b = \delta_{ab}$, $\sum_c k_c^2 = 1$ координаты l^{au} удовлетворяют условию $\sum_a \sum_u (l^{au})^2 = 1$, т.е. $\mathbf{l}^2 = 1$. Векторы $\mathbf{l}$ можно рассматривать как векторы касательного евклидова пространства $E_{(m+1)(n-m)}$ к грассманиане $\Gamma^s_{n,m}$. Так как $\mathbf{l}^2 = 1$, эти векторы можно рассматривать как радиусы-векторы точек гиперсферы единичного радиуса в пространстве $E_{(m+1)(n-m)}$ или как векторы, представляющие точки L эллиптического пространства $S_{(m+1)(n-m)-1}$, являющегося бесконечно удаленной гиперплоскостью пространства $E_{(m+1)(n-m)}$.

Теорема 3. *Точки $L(\mathbf{l})$ пространства $S_{(m+1)(n-m)-1}$, соответствующие пучкам m-плоскостей пространства S_n, образуют эллиптическую сегреану $\Sigma^s_{m,n-m-1}$.*

В самом деле, в том случае, когда m-геликоид является пучком m-плоскостей, одно из чисел k_b равно единице, а остальные равны нулю; если $k_c = 1$, то k_b можно записать в виде $k_b = \delta_b^c$, формула (20) примет вид

$$l^{au} = a_a^c b_a^u \tag{21}$$

и выполняется соотношение

$$l^{au} l^{bv} = l^{av} l^{bu} \tag{22}$$

Но уравнение (22) представляет собой уравнение эллиптической сегреаны $\Sigma^s_{m,n-m-1}$ в пространстве $S_{(m+1)(n-m)-1}$ (отметим, что $(m+1)((n-m)-1 = m(n-m-1) + m + (m-n-1))$. Сегреана $\Sigma^s_{m,n-m-1}$ представляет собой "сегреану пучков" [**8**] многообразия $G^s_{n,m}$.

Заметим, что в случае, когда m-геликоид является пучком m-плоскостей формула (18) для векторов $\mathbf{l}$ принимает вид

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}_0 \wedge \mathbf{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{a-1} \wedge \mathbf{b}_a \wedge \mathbf{a}_{a+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_m \tag{23}$$

В случае, когда все числа k_a, определяющие m-геликоид, равны друг другу, все m-плоские образующие m-геликоида паратактичны между собой, а m-геликоид представляет собой эллиптическую сегреану $\Sigma^s_{1,m}$, семейством прямолинейных образующих этой сегреаны являются общие перпендикуляры m-плоских образующих m-геликоида.

4. Сегреевклидовы и сегреримановы пространства

Будем называть евклидово пространство $E_{(n+1)(m+1)}$ в бесконечно-удаленной гиперплоскости которого, являющейся эллиптическим пространством S_{mn+m+n}, задана эллиптическая сегреана $\Sigma^s_{m,n}$, а за фундаментальную группу принята подгруппа группы движений пространства

$E_{(n+1)(m+1)}$ переводящая в себя эту сегреану, *сегреевклидовым* пространством $\mathrm{Es}_{(m+1)(n+1)}$.

Понятие сегреевклидова пространства впервые применялось Савоськиной [**9**] и Т. И. Юхтиной в ее кандидатской диссертации. (Аналогично, определяя в бесконечно удаленной гиперплоскости аффинного пространства $A_{(n+1)(m+1)}$ сегреану $\Sigma^p_{m,n}$ и принимая за фундаментальную группу этого пространства подгруппу группы его аффинных преобразований, переводящих в себя эту сегреану, мы получим *сегреаффинное* пространство определенное для любого m, Добромысловым [**10**]). Т. И. Юхтина в своей диссертации определила также, для случая $m = 1$, *сегрериманово* пространство $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$, т. е. риманово пространство $V_{(m+1)(n-m)}$, касательным пространством которого является сегреевклидово пространство $\mathrm{Es}_{(m+1)(n-m)}$.

Теорема 4. *Эллиптическая грассманиана $\Gamma^s_{n,m}$, рассматриваемая как риманово $(m+1)(n-m)$-пространство, является сегримановым пространством* $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$.

Теорема вытекает из того, что в бесконечно удаленной гиперплоскости касательных пространств $E_{(m+1)(n-m)}$ этого риманова пространства определены сегреаны $\Sigma^s_{m,n-m-1}$. Стационарная подгруппа точки пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ изоморфна подгруппе группы вращений пространства $\mathrm{Es}_{(m+1)(n-m)}$, т.е. подгруппе группы движений пространства $S_{(m+1)(n-m)-1}$, переводящей в себя эллиптическую сегреану $\Sigma^s_{n,n-m-1}$. Эта группа изоморфна прямому производению групп движений эллиптических пространств S_m и S_{n-m-1}, этому же прямому произведению изоморфна стационарная подгруппа m-плоскости пространства S_n, так как эта подгруппа переводит в себя m-плоскость и полярную ей $(n-m-1)$-плоскость.

5. Паратактические m-геликоиды, конгруэнции Хопфа и паратактические конгруэнции

Будем называть m-геликоид *паратактическим* в том случае, когда все его m-плоские образующие паратактичны между собой (т.е. $k_0 = k_1 = \ldots = k_m$). В этом случае m-плоские образующие m-геликоида обладают не конечной системой $m+1$ общего перпендикуляра, а бесконечным множеством общих перпендикуляров, причем через каждую точку каждой m-плоской образующей проходит один общий перпендикуляр этих m-плоскостей. Таким образом, паратактический m-геликоид обладает 1-параметрическим семейством m-плоских образующих и m-параметрическим семейством прямолинейных образующих, причем m-плоские и прямолинейные образующие одного семейства паратактичны между собой, а каждая m-плоская образующая перпендикулярна каждой прямолинейой образующей. Отсюда вытекает первое утверждение следующей теоремы.

Теорема 5. *Паратактические m-геликоиды представляют собой эллиптические сегреаны $\Sigma^s_{1,m}$ и изображаются на грассманиане $\Gamma_{n,m}$ окружностями длины $\pi\sqrt{m+1}$.*

Второе утверждение этой теоремы вытекает из формула (12) при $\omega_0 = \omega_1 = \ldots = \omega_m = \pi$.

В пространстве S_{2n+1} имеются паратактические конгруэнции прямых, состоящие из паратактичных между собой прямых, в пространстве S_{4n+3} имеются паратактические конгруэнции 3-плоскостей, состоящие из паратактичных между собой 3-плоскостей, в пространстве S_{15} имеются паратактические конгруэнции 7-плоскостей, состоящие из паратактичных между собой 7-плоскостей. Особенно важны паратактические конгруэнции прямых пространства S_3, паратактические конгруэнции 3-плоскостей пространства S_7 и паратактические конгруэнции 7-плоскостей пространства S_{15}, получаемые из *расслоений Хопфа* 3-сферы, 7-сферы и 15-сферы [11] при отождествлении диаметрально противоположных точек этих сфер, поэтому будем называть эти конгруэнции прямых, 3-плоскостей и 7-плоскостей *конгруэнциями Хопфа.*

Теорема 6. *Конгруэнции Хопфа прямых пространства S_3, 3-плоскостей пространства S_7 и 7-плоскостей пространства S_{15} изометричны соответственно 2-сфере радиуса $\sqrt{2}/2$ пространства E_3, 4-сфере радиуса 1 пространства S_5 и 8-сфере радиуса $\sqrt{2}$ пространства E_9.*

Так как базами расслоений Хопфа являются соответственно 2-сферы, 4-сферы и 3-сферы, конгруэнции Хопфа изометричны соответствено 2-, 4-, 8-сфере. Радиусы этих сфер равны радиусам их больших окружностей, изображающих паратактические m-геликоиды. Но в силу теоремы 5 длины C этих окружностей соответственно равны $\pi\sqrt{2}$, $\pi\sqrt{4} = 2\pi$, $\pi\sqrt{8} = 2\pi\sqrt{2}$, радиусы $R = C/2\pi$ этих окружностей, рассматриваемые как окружности пространств E_3, E_5 и E_7, соответственно равны $\sqrt{2}/2$, 1 и $\sqrt{2}$.

Как известно, паратактические конгруэнции прямых пространства S_{2n+1} и 3-плоскостей пространства S_{4n+3} образуют вещественные интерпретации эрмитовых эллиптических пространств $\mathbb{C}\bar{S}_n$ и $\mathbb{H}\bar{S}_n$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и телом $\mathbb{H}$ кватернионов [5, с. 622].

Теорема 7. *Паратактические конгруэнции прямых пространства S_{2n+1} и 3-плоскостей пространства S_{4n+3} изометричны, соответственно, пространству $\mathbb{C}\bar{S}_n$ кривизны 1/2 и пространству $\mathbb{H}\bar{S}_n$ кривизны 1/4.*

В самом деле, прямые $\mathbb{C}\bar{S}_1$ и $\mathbb{H}\bar{S}_1$ кривизны $1/r^2$, изометричные конгруэнциям Хопфа в пространствах S_3 и S_7, изометричны, соответственно, 2-сфере и 4-сфере радиуса $r/2$ пространств E_3 и E_5 [5, с. 630]. В силу теоремы 6 радиусы этих сфер равны, соответственно, $\sqrt{2}/2$ и 1, поэтому радиусы кривизны прямых $\mathbb{C}\bar{S}_1$ и $\mathbb{H}\bar{S}_1$ и пространств $\mathbb{C}\bar{S}_n$ и $\mathbb{H}\bar{S}_n$ соответственно равны $\sqrt{2}$ и 2, а кривизны этих прямых и пространств соответственно равны 1/2 и 1/4.

Наряду с паратактическими m-гекикоидами и паратактическими конгруэнциями m-плоскостей пространства S_n можно рассмотреть вполне геодезические паратактические k-семейства m-плоскостей, являющихся m-плоскими образующими эллиптических сегреан $\Sigma^s_{k,m}$.

Теорема 8. *Вполне геодезическое семейство m-плоских образующих эллиптической сегреаны $\Sigma^s_{k,m}$ пространства S_n изометрично эллиптическому пространству S_k кривизны* $1/(m+1)$.

В самом деле, так как семейства m- и n- плоских образующих сегреаны $\Sigma^s_{m,n}$ изометричны, соответственно, пространствам S_n и S_m, семейство m-плоских образующих элиптической сегреаны $\Sigma^s_{k,m}$ изометрично пространству S_n. Так как прямые этого пространства изображают паратактические m-геликоиды, длины этих прямых равны $\pi\sqrt{m+1}$. Поэтому, так как длины прямых пространства S_n кривизны $1/r^2$ равны πr, радиус кривизны пространства S_k, изометричного семейству m-плоских образующих сегреаны $\Sigma^s_{k,m}$ равен $\sqrt{m+1}$, а кривизна этого пространства равна $1/(m+1)$.

6. $(m-1)$-связи и $(m+1)$-поля m-плоскостей

Будем называеть $(m-1)$-*связкой* m-плоскостей пространства S_n совокупность m-плоскостей, проходящих через фиксированную $(m-1)$-плоскость, а $(m+1)$-*полем* m-плоскостей, пространства S_n – совокупность m-плоскостей, лежащих в фиксированной $(m+1)$-плоскости. При $n=3$, $m=1$ роль $(m-1)$-связок играют связки прямых, а роль $(m+1)$-полей – плоские поля прямых.

Теорема 9. $(m-1)$-*связка m-плоскостей пространства S_n в метрике, определенной нами в многообразии m-плоскостей пространства S_n, изометрична пространству S_{n-m} кривизны* 1, *а* $(m+1)$-*поле m-плоскостей пространства S_n в метрике, определенной в многообразии m-плоскостей пространства S_n, изометрично пространству S_{m+1} той же кривизны.*

Второе утверждение вытекает из применения принципа двойственности пространства S_{m+1} к $(m+1)$-полю m-плоскостей, первое утвеждение вытекает из применения принципа двойственности пространства S_n к $(m-1)$-связке и из применения принципа двойственности пространства S_{n-m} к полученному $(n-m)$-полю.

Отсюда видно, что $(m-1)$-связка m-плоскостей является частным случаем конгруэнции m-плоскостей, а $(m+1)$-поле m-плоскостей является частным случаем псевдоконгруэнции m-плоскостей.

Из теоремы 3 видно, что $(m-1)$-связка изображается на грассманиане $\Gamma^s_{n,m}$ $(n-m)$-плоскими образующими, а $(m+1)$-поле изображается на грассманиане $\Gamma^s_{n,m}$ $(m+1)$-плоскими образующими.

Роль геодезических линий в $(m-1)$-связках и $(m+1)$-полях m-плоскостей играют m-геликоиды, изображающиеся прямыми пространств

S_{n-m} и S_{m+1}, изображающих эти семейства m-плоскостей, т.е. пучками m-плоскостей. Отсюда вытекает, что $(m-1)$-связки и $(m+1)$-поля m-плоскостей являются вполне геодезическими семействами m-плоскостей.

7. Адаптированные реперы и деривационные формулы

Свяжем с каждой точкой эллиптической грассманианы $\Gamma^s_{n,m}$ адаптированный репер в касательном пространстве $\mathrm{Es}_{m+1}n-m$ в этой точке, состоящий из векторов $\mathbf{l}$, одна координата которых равна 1, а все остальные координаты равны нулю. Будем обозначать эти векторы $\mathbf{e}_{au}$. Всякий вектор $\mathbf{l}$ можно представить в виде суммы $\mathbf{l} = \sum\sum l^{au}\mathbf{e}_{au}$. В метрике пространства $\mathrm{E}sm+1n-m$, индуцированной в ней евклидовой метрикой пространства E_{N+1}, векторы $\mathbf{e}_{au}$ образуют ортонормированный репер.

При движениях стационарной подгруппы пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ изоморфной прямому произведению групп движений $'x^a = U^a_b x^b$ и $'x^u = U^u_v x^v$ пространств S_n и S_{n-m-1}, векторы $\mathbf{e}_{au}$ преобразуются по закону

$$'\mathbf{e}_{bv} = U^u_v \mathbf{e}_{au} U^a_b \tag{24}$$

Деривационные формулы пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ как и всех римановых пространств имеют вид

$$d\mathbf{x} = \omega^{au}\mathbf{e}_{au}, \qquad d\mathbf{e}_{au} = \omega^{bv}_{au}\mathbf{e}_{bv} \tag{25}$$

Так как пространство $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ является римановым, а адаптированный репер – ортонормированный, формы ω^{bv}_{au} удовлетворяют условию

$$\omega^{bv}_{au} = -\omega^{au}_{bv} \tag{26}$$

Так как стационарная подгруппа группы движений пространства $V_{(m+1)(n-m)}$ имеет размерность $m(m+1)/2+(n-m-1)(n-m)/2$, а группа вращений пространства $E_{(m+1)(n-m)}$ имеет размерность $(m+1)(n-m)[(m+1)(n-m)-1]/2$, формы ω^{lv}_{au} связаны условиями, число которых равно разности этих двух размерностей.

Теорема 10. *Дифференциальные формы ω^{bv}_{au} можно записать в виде*

$$\omega^{bv}_{au} = \Omega^b_a\delta^v_u + \Omega^v_u\delta^b_a, \quad \Omega^b_a = -\Omega^a_b, \quad \Omega^v_u = -\Omega^u_v \tag{27}$$

В самом деле, так как уравнения (16) сегреаны $\Sigma^S_{m,n-m-1}$ являются уравнениями гиперквадрик, прежде всего найдем условия налагаемые на формы ω^{bv}_{au} вследствие того, что стационарная подгруппа группы движений пространства переводит в себя одну из этих гиперквадрик. Если уравнение гиперквадрики Q пространства P_n имеет вид $X^TQX=0$ ($Q=Q^T$), где T – знак транспонирования матрицы, то матрицы U коллинеаций, переводящих в себя эту гиперквадрику, удовлетворяют условию

$$U^TQU = Q. \tag{28}$$

Так как условия, налагаемые на дифференциальные формы ω^{bv}_{au}, совпадают с условиями, налагаемыми на матрицы, получаемые транспонированием матриц элементов алгебры Ли стационарной подгруппы, заметим, что эти условия для алгебры Ли группы коллинеаций, переводящих в себя гиперквадрику Q, получаемые дифференцированием условия (28), имеют вид

$$A^T Q + QA = 0. \tag{29}$$

В случае, когда уравнение гиперквадрики Q имеет вид (16), подматрица матрицы Q, элементы которой стоят на пересечении строк и столбцов с номерами, обозначаемыми парами букв au, av, bu, bv, имеет вид

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

а все остальные элементы матрицы Q равны нулю. Тогда подматрица матрицы A, элементы которой стоят на пересечении строк и столбцов с теми же номерами au, av, bu, bv, имеющая вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} A^{au}_{au} & A^{au}_{av} & A^{au}_{bu} & A^{au}_{bv} \\ A^{av}_{au} & A^{av}_{av} & A^{av}_{bu} & A^{av}_{bv} \\ A^{bu}_{au} & A^{bu}_{av} & A^{bu}_{bu} & A^{bu}_{bv} \\ A^{bv}_{au} & A^{bv}_{av} & A^{bv}_{bu} & A^{bv}_{bv} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

удовлетворяет условию, получаемому из условия (29) заменой матриц Q и A на матрицы Q_0 и A_0. Это условие имеет вид

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} A^{au}_{au} & A^{av}_{au} & A^{bu}_{au} & A^{bv}_{au} \\ A^{au}_{av} & A^{av}_{av} & A^{bu}_{av} & A^{bv}_{av} \\ A^{au}_{au} & A^{av}_{bu} & A^{bu}_{bu} & A^{bv}_{bu} \\ A^{au}_{bv} & A^{av}_{bv} & A^{bu}_{bv} & A^{bv}_{bv} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} A^{au}_{au} & A^{au}_{av} & A^{au}_{bu} & A^{au}_{bv} \\ A^{av}_{au} & A^{av}_{av} & A^{av}_{bu} & A^{av}_{bv} \\ A^{bu}_{au} & A^{bu}_{av} & A^{bu}_{bu} & A^{bu}_{bv} \\ A^{bv}_{au} & A^{bv}_{av} & A^{bv}_{bu} & A^{bv}_{bv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{bv}_{au} & -A^{bu}_{au} & -A^{av}_{au} & A^{au}_{au} \\ A^{bv}_{av} & -A^{bu}_{av} & -A^{av}_{av} & A^{au}_{av} \\ A^{bv}_{bu} & -A^{bu}_{bu} & -A^{av}_{bu} & A^{au}_{bu} \\ A^{bv}_{bv} & -A^{bu}_{bv} & -A^{av}_{bv} & A^{au}_{bv} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} A^{bv}_{au} & A^{bv}_{av} & A^{bv}_{bu} & A^{bv}_{bv} \\ -A^{bu}_{au} & -A^{bu}_{av} & -A^{bu}_{bu} & -A^{bu}_{bv} \\ -A^{av}_{au} & -A^{av}_{av} & -A^{av}_{bu} & -A^{av}_{bv} \\ A^{au}_{au} & A^{au}_{av} & A^{au}_{bu} & A^{au}_{bv} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{gathered} \tag{32}$$

откуда получаем

$$\begin{gathered} A^{bv}_{au} = A^{bu}_{av} = A^{av}_{bu} = A^{au}_{bv} = 0, \quad A^{bu}_{au} = A^{bv}_{av} \\ A^{av}_{au} = A^{bv}_{bu}, \quad A^{au}_{av} = A^{bu}_{bv}, \quad A^{au}_{bu} = A^{av}_{bv}. \end{gathered} \tag{33}$$

с другой стороны, в силу соотношения (26)

$$\begin{aligned} &A^{au}_{au} = A^{av}_{av} = A^{bu}_{bu} = A^{bv}_{bv} = 0, \quad A^{au}_{av} = -A^{av}_{au} \\ &A^{au}_{bv} = -A^{bv}_{au}, \quad A^{au}_{bu} = -A^{bu}_{au}, \quad A^{bu}_{bv} = -A^{bv}_{bu}. \end{aligned} \tag{34}$$

Из формул (33) и (34) видно, что если мы обозначим $A^{au}_{av} = A^{bu}_{bv} = A^u_v$, $A^{au}_{bu} = A^{av}_{bv} = A^a_b$, мы можем записать подматрицу A_0 в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & A^u_v & A^a_b & 0 \\ -A^u_v & 0 & 0 & A^a_b \\ -A^a_b & 0 & 0 & A^u_v \\ 0 & -A^a_b & -A^u_v & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Требуя, чтобы все подматрицы A_0, матрицы A имели вид (35), мы получим, что элементы A^{au}_{bv} матрицы A при любых a, b, u, v могут быть записаны в виде

$$A^{au}_{bv} = A^a_b \delta^u_v + A^u_v \delta^a_b, \quad A^a_b = -A^b_a, \quad A^u_v = -A^v_u. \tag{36}$$

Откуда, в силу того, что условия, налагаемые на дифференциальные формы ω^{bv}_{au} совпадают с условиями, налагаемыми на матрицы A^T, мы получаем, что дифференциалные формы ω^{bv}_{au} можно записать в виде (27). В частности, в случае прямых пространства S_3 $(n = 3, m = 1)$ матрица (ω^{bv}_{au}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega^2_3 & \Omega^0_1 & 0 \\ -\Omega^2_3 & 0 & 0 & \Omega^0_1 \\ -\Omega^0_1 & 0 & 0 & \Omega^2_3 \\ 0 & -\Omega^0_1 & -\Omega^2_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

в случае прямых пространства S_4 $(n = 4, m = 1)$ матрица (ω^{bv}_{au}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega^2_3 & \Omega^2_4 & \Omega^0_1 & 0 & 0 \\ -\Omega^2_3 & 0 & \Omega^3_4 & 0 & \Omega^0_1 & 0 \\ -\Omega^2_3 & \Omega^3_4 & 0 & 0 & 0 & \Omega^0_1 \\ -\Omega^0_1 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2_3 & \Omega^2_4 \\ 0 & -\Omega^0_1 & 0 & -\Omega^2_3 & 0 & \Omega^3_4 \\ 0 & 0 & -\Omega^0_1 & -\Omega^2_4 & -\Omega^3_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

в случае прямых пространства S_5 $(n = 5, m = 1)$ матрица (ω^{bv}_{au}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega^3_2 & \Omega^2_4 & \Omega^2_5 & \Omega^0_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega^2_3 & 0 & \Omega^3_4 & \Omega^3_5 & 0 & \Omega^0_1 & 0 & 0 \\ -\Omega^2_4 & -\Omega^3_4 & 0 & \Omega^4_5 & 0 & 0 & \Omega^0_1 & 0 \\ -\Omega^2_5 & -\Omega^3_5 & -\Omega^4_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^0_1 \\ -\Omega^0_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega^2_3 & \Omega^2_4 & \Omega^2_5 \\ 0 & -\Omega^0_1 & 0 & 0 & -\Omega^2_3 & 0 & \Omega^3_4 & \Omega^3_5 \\ 0 & 0 & -\Omega^0_1 & 0 & -\Omega^2_4 & -\Omega^3_4 & 0 & \Omega^4_5 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega^0_1 & \Omega^2_5 & -\Omega^3_5 & -\Omega^4_5 & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

в случае 2-плоскостей пространства S_4 $(n=4, m=2)$ матрица (ω_{au}^{bv}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_4^3 & \Omega_1^0 & 0 & \Omega_2^0 & 0 \\ -\Omega_4^3 & 0 & 0 & \Omega_1^0 & 0 & \Omega_2^0 \\ -\Omega_1^0 & 0 & 0 & \Omega_4^3 & \Omega_2^1 & 0 \\ 0 & -\Omega_1^0 & -\Omega_4^3 & 0 & 0 & \Omega_2^1 \\ -\Omega_2^0 & 0 & -\Omega_2^1 & 0 & 0 & \Omega_4^3 \\ 0 & -\Omega_2^0 & 0 & -\Omega_2^1 & -\Omega_4^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

в случае 2-плоскостей пространства S_5 $(n=5, m=2)$ матрица (ω_{au}^{bv}) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_4^3 & \Omega_5^3 & \Omega_1^0 & 0 & 0 & \Omega_2^0 & 0 & 0 \\ -\Omega_4^3 & 0 & \Omega_5^4 & 0 & \Omega_1^0 & 0 & 0 & \Omega_2^0 & 0 \\ -\Omega_5^3 & -\Omega_5^4 & 0 & 0 & 0 & \Omega_1^0 & 0 & 0 & \Omega_2^0 \\ -\Omega_1^0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_4^3 & \Omega_5^3 & \Omega_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_1^0 & 0 & -\Omega_4^3 & 0 & \Omega_5^4 & 0 & \Omega_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_1^0 & -\Omega_5^3 & -\Omega_5^4 & 0 & 0 & 0 & \Omega_2^1 \\ -\Omega_2^0 & 0 & 0 & -\Omega_2^1 & 0 & 0 & 0 & \Omega_4^3 & \Omega_5^3 \\ 0 & -\Omega_2^0 & 0 & 0 & -\Omega_2^1 & 0 & \Omega_4^3 & 0 & \Omega_5^4 \\ 0 & 0 & -\Omega_2^0 & 0 & 0 & -\Omega_2^1 & -\Omega_5^3 & -\Omega_5^4 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

8. Уравнения структуры

Уравнения структуры пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$, как и уравнения структуры любого риманова пространства V_N имеют вид $\mathcal{D}\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I$, $\mathcal{D}\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J - \frac{1}{2} R_{\dot{K}\dot{L},\dot{I}}^{J} \omega^K \wedge \omega^L$, где $R_{\dot{K}\dot{L},\dot{I}}^{J}$-тензор кривизны пространства.

Так как в случае пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ векторы адаптированного репера записывают в виде $\mathbf{e}_{au}$, будем записывать тензор $R_{\dot{K}\dot{L},\dot{I}}^{J}$ в виде $R_{au,bv;cw}^{dt}$. Так как репер $\{\mathbf{e}_{au}\}$-ортонормированный, координаты $R_{au,bv;cw}^{dt}$ равны соответствующим координатам $R_{au,bv;cw,dt}$.

Теорема 11. *Тензор кривизны $R_{au,bv;cw,dt}$ пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ в адаптированном репере $\mathbf{e}_{au}$ этого пространства имеет вид*

$$\begin{aligned} R_{au,bv;cw,dt} = (&\delta_b^d \delta_w^t \delta_{ac} \delta_{uv} - \delta_a^d \delta_w^t \delta_{bc} \delta_{uv} \\ + \ &\delta_c^d \delta_v^t \delta_{ab} \delta_{uw} - \delta_c^d \delta_u^t \delta_{ab} \delta_{vw}) \end{aligned} \tag{42}$$

В самом деле, сегрериманово пространство $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ является симметрическим римановым пространством, группа движений которого – група движений пространства S_n, являющаяся компактной простой группой Ли. Так как всякое симметрическое риманово пространство, группой движений которого является компактная простая группа Ли, может быть погружено в виде вполне геодезической поверхности в группу его движений с инвариантной римановой метрикой, определенной в этом случае с точностью до масштаба, причем эта поверхность проходит через единицу группы, это относится и к пространству $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$. Поэтому тензор кривизны пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$ совпадает с ограничением тензора кривизны группы движений пространства S_n на этой вполне геодезической поверхности. Тензор кривизны $R^L_{\dot I\dot K,\dot K}$ группы Ли в ее инвариантной метрике имеет вид

$$R^L_{\dot I\dot J,\dot K} = \rho C^H_{IJ} C^L_{HK} \tag{43}$$

где C^K_{IJ}- структурные константы группы, а ρ – некоторый вещественный множитель, определяемый масштабом инвараинтной метрики в группе [**11**, с. 454].

Касательное пространство к симметрическому пространству можно рассматривать как подпространство $\mathbb{E}$ алгебры Ли $\mathbb{G}$ группы G движений этого пространства, причем алгебра Ли $\mathbb{G}$ является прямой суммой подпространства $\mathbb{E}$ и алгебры Ли $\mathbb{G}_0$ группы вращений симметрического пространства. Если базис алгебры Ли $\mathbb{G}$ состоит из элементов e_x алгебры Ли $\mathbb{G}_0$ и элементов e_i пространства $\mathbb{E}$, то из структурных констант C^K_{IJ} отличны от нуля только $C^\gamma_{\alpha\beta}$, $C^j_{i\alpha}$ и C^α_{ij}, а тензор кривизны симметрического пространства имеет вид

$$R^l_{\dot i\dot j,\dot k} = \rho C^\alpha_{ij} C^l_{\alpha k} \tag{44}$$

[**12**, с. 462]. Из формулы (44) вытекает, что тензор $R^l_{\dot i\dot j,\dot k}$ можно вычислить, составляя двойной коммутатор $[[e_i e_j]e_k]$ по формуле

$$R^l_{\dot i\dot j,\dot k} e_l = \rho[[e_i e_j]e_k]. \tag{45}$$

Если мы обозначим матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы равны нулю, через E_{ij}, то базисными элементами подпространства $\mathbb{E}$ являются матрицы $A_{au} = E_{au} - E_{ua}$. Поэтому, заменяя в формуле (45) индексы i, j, k, l парами индексов au, bv, cw, dt, а элементы e_i матрицами A_{au} мы можем переписать эту формулу в виде

$$R^{dt}_{au,bv;cw} A_{dt} = \rho[[A_{au}A_{bv}]A_{cw}]. \tag{46}$$

Заменяя в формуле (46) матрицы A_{au}, A_{bv}, A_{cw} и A_{dt} их выражениями через матрицы E_{ij}, мы получим

$$[A_{au}A_{bv}] = (E_{ba} - E_{ab})\delta_{uv} + (E_{vu} - E_{uv})\delta_{ab} \tag{47}$$

$$[[A_{au}A_{bv}]A_{cw}] = A_{bw}\delta_{ac}\delta_{uv} - A_{aw}\delta_{bc}\delta_{uv} + A_{cv}\delta_{ab}\delta_{uw} - A_{cu}\delta_{ab}\delta_{vw} \tag{48}$$

Представляя матрицы A_{aw}, A_{bw}, A_{cw}, A_{cv} в виде $\delta^d_a\delta^t_w A_{dt}$, $\delta^d_l\delta^t_w A_{dt}$, $\delta^d_c\delta^t_v A_{dt}$ получим

$$\begin{aligned} R^{dt}_{\dot a\dot u,\dot b\dot v;\dot c\dot w} = \rho(&\delta^d_b\delta^t_w\delta_{ac}\delta_{uv} - \delta^d_a\delta^t_w\delta_{ac}\delta_{uv} \\ &+ \delta^d_c\delta^t_v\delta_{ab}\delta_{uw} - \delta^d_c\delta^t_u\delta_{ab}\delta_{vw}) \end{aligned} \tag{49}$$

Для определения множителя ρ рассмотрим $(m-1)$-связки и $(m+1)$-поля m-плоскостей, являющихся вполне геодезическими семействами m-плоскостей. В случае $(m-1)$-связки матрица A_{au} состоит из одной строки, а в случае $(m+1)$-поля матрица A_{au} состоит из одного столбца. Поэтому для вычисления тензора кривизны в $(m-1)$-связке достаточно положить в формуле (49) $a = b = c = d$ и, заменяя u, v, w, t на i, j, k, l мы получим

$$R^l_{ij,k} = \rho(\delta_{ik}\delta^l_j - \delta_{jk}\delta^l_i) \tag{50}$$

Но, как известно, тензор кривизны пространства S_n кривизны $1/r^2$ имеет вид

$$R^l_{ij,k} = r^{-2}(\delta_{ik}\delta^l_j - \delta_{jk}\delta^l_i) \tag{51}$$

Отсюда находим, что в нашем случае $\rho = 1$. Откуда и получается формула (42).

Аналогично, для вычисления тензора кривизны в $(m+1)$-поле достаточно положить в формуле (49) $u = v = w = t$ и, заменяя a, b, c, d на i, j, k, l, мы снова получим формулу (50), откуда снова получим, что $\rho = 1$.

9. Семейства m-плоскостей

Будем рассматривать k-параметрические семейства m-плоскостей пространства S_n при следующих значения k: $k = 1$ (моносистемы), $k = n - m$ (конгруэнции), $k = m+1$ (псевдоконгруэнции), $k = (m+1)(n-m) - 1$ (гиперкомплексы).

В случае моносистемы для всякого вектора $\mathbf{l} = l^{au}\mathbf{e}_{au}$ всегда можно с помощью движения $'\mathbf{e}_a = U^b_a\mathbf{e}_b$ в m-плоскости $(E_0E_1\dots E_m)$ и движения $'\mathbf{e}_u = U^v_u\mathbf{e}_v$ в $(n-m-1)$-плоскости $(E_{m+1}\dots E_n)$, при которых векторы $\mathbf{e}_{au}$ преобразуются по закону $'\mathbf{e}_{au} = U^b_aU^v_u\mathbf{e}_{bv}$, привести к виду, при котором матрица $(l^{a,m+1+b})$, состоящая из $m+1$ первых столбцов матрицы (l^{au}), приводится к диагональному виду (l_a, δ_{ab}). Если считать точки E_a и E_{m+1+b}, представляемые векторами $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_{m+1+b}$, векторами репера, связанного с m-плоскостью моносистемы, то тем самым мы выбрали $2m+2$ вектора этого репера. В случае, когда $n = 2m+1$ тем самым в каждой m-плоскости моносистемы выбран канонический репер пространства, который в этом случае является репером первого порядка. В случае, когда $n > 2m+1$ для полученного канонического репера моносистемы необходимо рассмотрение дифференциальных окрестностей высшего порядка.

Гиперкомплексы m-плоскостей изображают гиперповерхности сегре-риманова пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$. Если мы рассмотрим вектор $\mathbf{l} = l^{au}\mathbf{e}_{au}$, направленный по нормали к этой гиперповерхности, то движениями в m-плоскостях $(E_0E_1\dots E_m)$ и $(E_{m+1}\dots E_n)$ этот вектор также можно привести к виду, при котором матрица $(l^{a,m+1+b})$ становится диагональной матрицей. Тем самым мы выбрали точки E_a и E_{m+1+a} репера, связанного с m-плоскостью гиперкомплекса, который при $n = 2m+1$ является каноническим репером, а при $n > 2m+1$ для получения канонического репера гиперкомплекса необходимо рассмотрение дифференциальных окрестностей высшего порядка.

Теория конгруэнций и псевдоконгруэнций m-плоскостей пространства S_n рассматривалась Розенфельдом [**13**]. В случае конгруэнций m-плоскостей строки матрицы $(\mathbf{l}^{au})$ линейно зависят друг от друга и матрицы этих линейных отображений определяют тензоры, являющиеся обобщениями тензоров Куммера прямолинейных конгруэнций 3-пространства, а в случае псевдоконгруэнций аналогичные линейные зависимости имеются между столбцами матрицы (l^{au}), с помощью этих тензоров могут быть найдены системы инвариантов, определяющие конгруэнции и псевдоконгруэнции m-плоскостей пространства S_n с точностью до движения этого пространства. Так как внутренняя геометрия псевдоконгруэнций Картана m-плоскостей пространства S_n является евклидовой, а эти псевдоконгруэнции изображаются вполне геодезическими $(m+1)$-поверхностями пространства $\mathrm{Vs}_{(m+1)(n-m)}$, секционные кривизны этого пространства в площадках, параллельных этим $(m+1)$-поверхностям, равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] É. Study, *Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie*, Amer. J. Math. **29** (1907), 101–167.

[**2**] E. Cartan, *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes, Oeuvres complétes*, t.1, Paris, 1951, 1227–1246.

[**3**] Н. Д. Пецко, *Проективные мероопределения и комплексные числа, Проективные метрики*. Уч. зап. Коломенского пед. ин-та. **8** (1965), 127–143.

[**4**] Б. А. Розенфельд, *Внутренняя геометрия множества m-мерных плоскостей n-мерного эллиптического пространства*, Изв. Ан. СССР. Сер. Мат. **5** (1941), 353–368.

[**5**] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы геометрии*, Гостехиздат, Москва, 1955.

[**6**] Б. А. Розенфельд, *Многомерное обобщение поверхности Клиффорда*, Уч. зап. МГУ Математика **1** (1946), 150–154

[**7**] Б. А. Розенфельд, М. А. Половцева, Л. А. Рязанова, Т. И. Юхтина, *Сегреаны и квазисегреаны и их применение к геометрии семейств прямых и плоскостей*, Изв. вузов. Математика **5** (1988), 50–56.

[**8**] Б. А. Розенфельд, Г. В. Криворучко, Н. В. Шульга, Т. И. Юхтина, *Метрические и симплектические сегреаны и квазисегреаны*, Изв. вузов. Математика **4** (1988), 52 – 60.

[**9**] И. И. Савоськина, *Конгруэнции прямых квазиэллиптического пространства S_n^1*, в: *Геометрия погруженных многообразий*, Москва, 1986, 93–99.

[**10**] В. А. Добромыслов, *О геометрии k-квазиаффинного пространства,* в: *Ткани и квазигруппы.*, КГУ, Калинин, 1988, 147-155.

[**11**] Б. А. Розенфельд, С. Л. Атанасян, Т. А. Тимошенко, *Геометрия расслоений Хопфа*, Изв. Вузов. Математика **6** (1987), 52–57.

[**12**] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, Москва, 1969.

[**13**] Б. А. Розенфельд, *Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **11** (1947), 283-308.

Кафедра геометрии
Педагогический институт
Стерлитамак, Башкортостан
Россия

(Поступила 09 02 1993)