PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 75(89) (2004), 59–65

# ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ КОНФОРМНОЙ ПАРАБОЛИЧНОСТИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

**В. М. Кесельман**

**Резюме.** Доказан достаточный признак конформной параболичности некомпактной $n$-мерной гиперповерхности евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Из него непосредственно следует, например, конформная параболичность произвольной некомпактной алгебраической поверхности.

**1.** Настоящая заметка касается хорошо известного ныне понятия $p$-параболического и $p$-гиперболического типа $n$-мерного риманова многообразия (см., например, работы [1], [2], [3] и библиографию в них). Это понятие представляет собой распространение на $n$-мерный случай классического понятия конформного типа римановой поверхности. (Напомним, что произвольная некомпактная односвязная двумерная поверхность конформно эквивалентна либо плоскости – параболический тип, либо единичному кругу – гиперболический тип.)

Существует несколько эквивалентных определений конформного типа (в общем случае $p$-параболического и $p$-гиперболического типа) $n$-мерного риманова многообразия (см., например, [4], [5], [6]). Мы будем исходить из следующего емкостного определения $p$-параболического и $p$-гиперболического ($p > 1$) типа $n$-мерного ($n \geqslant 2$) риманова многообразия $M^n \equiv (M^n, g)$, где $g$ – риманова метрика на $M^n$.

Будем говорить, что *многообразие $M^n$ имеет $p$-параболический тип или является $p$-параболическим*, если $p$-емкость любого компактного множества $K \subset M^n$ равна нулю. В противном случае *многообразие $M^n$ имеет $p$-гиперболический тип или является $p$-гиперболическим.* При $p = n$, говоря о типе многообразия в указанном смысле, будем использовать традиционные названия *конформно-параболический* и *конформно-гиперболический* типы, отражающие

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53A20, 53C20.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 02-01-01086.

инвариантность конформного типа многообразия при конформных преобразованиях его метрики. При этом, под *p-емкостью компакта* $K$ понимается величина

$$\operatorname{cap}_p K := \inf \int_{M^n} \|\nabla u\|^p dv, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем финитным в $M^n$ локально-липшицевым функциям $u$ таким, что $u|_K \equiv 1$. Кроме того, через $\|\nabla u\|$ и $dv$ здесь обозначены, соответственно, норма градиента $\nabla u$ функции $u$ и элемент объема многообразия $M^n$ относительно римановой метрики $g$.

**2.** Нахождению геометрических условий, обеспечивающих $p$-параболический или $p$-гиперболический тип рассматриваемого многообразия, посвящено немало работ (см., например, [1]–[7] и библиографию в них). Среди серии достаточных условий $p$-параболичности, связанных с ростом объемов или площадей сфер геодезических шаров на многообразии, наиболее общим является следующее, восходящее к Альфорсу [8], условие: если для полного некомпактного риманова многообразия $M^n$

$$\int^{+\infty} S^{1/(1-p)}(t)dt = \infty, \tag{2}$$

где через $S(t)$ обозначена “площадь” (т.е. $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа) геодезической сферы радиуса $t$ (с фиксированным центром для всех $t$), то многообразие $M^n$ является $p$-параболическим. Условие (2) можно распространить с геодезических сфер на множества уровня прозвольной функции исчерпания многообразия, роль которой в услови (2) на полном многообразии играет функция геодезического расстояния до фиксированного центра.

Уточним, что ниже под *функцией исчерпания* $h$ *многообразия* $M^n$ будем понимать непрерывную положительную собственную (т.е. с компактным множеством меньших значений) функцию $h$ на $M^n$ и такую, что $\sup h = +\infty$. Для такой функции $h$ при каждом значении $t > 0$ множества

$$\mathcal{B}_h(t) := \{x \in M^n \mid h(x) \leqslant t\}, \quad \mathcal{E}_h(t) := \{x \in M^n \mid h(x) = t\}$$

(т.е. *h-шары* и *h-сферы*, соответственно) компактны, причем для произвольной возрастающей числовой последовательности $t_k \to +\infty$ последовательность $h$-шаров $\{\mathcal{B}_h(t_k)\}$ образует исчерпание многообразия $M^n$.

Введем также следующее обозначение

$$S_h(t) := \int_{\mathcal{E}_h(t)} \|\nabla h\|^{p-1} dH^{n-1},$$

где $dH^{n-1}$ – элемент $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. Имеет место (см., например, [1], [3], [4]) Предложение. *Если на многообразии $M^n$ существует локально-липшицева функция исчерпания $h$ такая, что выполняется условие* (2), *в котором обозначено $S(t) := S_h(t)$, то многообразие $M^n$ является $p$-параболическим.*

Действительно, пусть $h$ – указанная в условии Предложения функция исчерпания многообразия $M^n$. Возьмем произвольное компактное множество $K \subset M^n$. Зафиксируем какое-либо значение $t_0 > 0$, для которого $K \subset \mathcal{B}_h(t_0)$, и для произвольного значения $t_1 > t_0$ определим вещественную функцию

$$\varphi(t) = \left(\int_t^{t_1} S_h^{1/(1-p)} d\tau\right) \left(\int_{t_0}^{t_1} S_h^{1/(1-p)} d\tau\right)^{-1}$$

при $t \in [t_0, t_1]$, а также $\varphi(t) = 1$ при $t \leqslant t_0$ и $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant t_1$. Тогда функция $u = \varphi(h)$ является финитной в $\mathcal{B}_h(t_1)$ и такой, что $u|_K \equiv 1$. Следовательно, из определения (1)

$$\operatorname{cap}_p K \leqslant \int_{\mathcal{B}_h(t_1)} \|\nabla u\|^p \, dv.$$

Представляя здесь правую часть с помощью формулы Кронрода–Федерера [9] в виде

$$\int_{\mathcal{B}_h(t_1)} \|\nabla u\|^p \, dv = \int_{t_0}^{t_1} |\varphi'(t)|^p \, dt \int_{\mathcal{E}_h(t)} \|\nabla h\|^{p-1} \, dH^{n-1}$$

и вычисляя затем $\varphi'(t)$, получаем неравенство

$$\operatorname{cap}_p K \leqslant \left(\int_{t_0}^{t_1} S_h^{1/(1-p)} dt\right)^{1-p}.$$

Отсюда, учитывая произвольность значения $t_1$ и переходя к пределу при $t_1 \to +\infty$, на основании условия (2) заключаем, что $\operatorname{cap}_p K = 0$.

Следствие. *Если для некоторой липшицевой функции исчерпания $h$ выполняется условие* (2), *в котором $S(t)$ есть $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа $h$-сферы $\mathcal{E}_h(t)$, то многообразие $M^n$ имеет $p$-параболический тип.*

**3.** Всюду далее в качестве риманова многообразия $M^n$ рассматривается вложенная в $\mathbb{R}^{n+1}$ гладкая гиперповерхность, риманова метрика которой индуцируется внешней евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Произвольную точку $x \in M^n$ будем обозначать также в координатной форме $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_{n+1})$, где $x_k$ есть $k$-ая декартова координата точки $x$. Будем предполагать, что поверхность $M^n$ является *некомпактной и внешне-полной*. Последнее означает, что любая последовательность точек в $M^n$, расходящаяся относительно внутренней метрики $g$ многообразия $M^n$, расходится также и относительно внешней евклидовой метрики из $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда в качестве функции исчерпания на поверхности $M^n$ может выступать, например, функция $q(x) := \max\{|x_k|, \ k = 1, \ldots n+1\}, \ \ x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, которая является также липшицевой в $M^n$, причем $\|\nabla q\| \leqslant 1$ почти всюду в $M^n$

(поскольку величина $||\nabla q||$ равна проекции вектора $\nabla q \in \mathbb{R}^{n+1}$ на касательную плоскость к поверхности $M^n$).

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем одно специальное понятие. Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – произвольное $m$-мерное $(m \leqslant n)$ множество. Обозначим через $\nu(U)$ наименьшее из натуральных чисел $\nu$ таких, что для $m$-почти всех координатных прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$ число точек пересечения каждой из них с множеством $U$ не превышает числа $\nu$.

Здесь, как обычно, под *координатной прямой* в $\mathbb{R}^{n+1}$ понимается такая прямая, вдоль которой меняется только одна, скажем $k$-ая декартова координата $x_k$, а все остальные декартовы координаты точек этой прямой остаются постоянными. Тем самым, каждая координатная прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$ естественным образом отождествляется с некоторой точкой $y = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$ пространства $\mathbb{R}^n$. Будем обозначать такую координатную прямую через $l_k(y)$. При указанном отождествлении слова "для $m$-почти всех" координатных прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$ понимаются по отношению к $m$-мерной мере $H^m$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

**Теорема.** *Пусть гиперповерхность $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является некомпактной и внешне-полной. Предположим, что выполняется следующее условие:*

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{t\nu^{1/(n-1)}(t)} = \infty, \tag{3}$$

*где обозначено $\nu(t) := \nu(\mathcal{E}_q(t))$. Тогда многообразие $M^n$ является конформно-параболическим.*

Доказательство Теоремы получим на основании Следствия, примененного к липшицевой функции исчерпания $q$ поверхности $M^n$. При этом, для оценки величины $S(t)$, т.е. $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа $H^{n-1}$ множества уровня $\mathcal{E}_q(t)$, воспользуемся следующим неравенством (см. [9, Теорема 3.2.27]):

*Если $W \subset \mathbb{R}^{m+1}$ есть $(H^m, m)$ – спрямляемое множество, то*

$$H^m(W) \leqslant \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\mathbb{R}^m} \nu_k(y, W)\, dH^m_y, \tag{4}$$

*где через $\nu_k(y, W)$ обозначено число точек пересечения с множеством $W$ координатной прямой $l_k(y)$ пространства $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Множество $\mathcal{E}_q(t)$ (при произвольном фиксированном значении $t > 0$) представляет собой объединение $n+1$ пары множеств вида

$$E_i^{\pm}(t) := \{x \in M^n \mid x_i = \pm t,\ |x_j| \leqslant t,\ j \neq i\}, \quad i = 1, \dots, n+1, \tag{5}$$

которые лежат в пересечении поверхности $M^n$ с плоскостями $x_i = \pm t$ и потому могут рассматриваться как подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. При таком рассмотрении каждая координатная прямая $l_k(y)$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, пространства $\mathbb{R}^n$

является координатной прямой $l_k(\tilde{y})$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, где $\tilde{y}_i = \pm t$, а остальные координаты точек $y$ и $\tilde{y}$ совпадают. Поэтому

$$\forall y \in \mathbb{R}^{n-1} : \nu_k(y, E_i^{\pm}(t)) \leqslant \nu(\mathcal{E}_q(t)),$$

причем $\nu_k(y, E_i^{\pm}(t)) = 0$, если $|y| > t$ (ввиду самого определения (5) множеств $E_i^{\pm}(t)$). Следовательно,

$$\forall k = 1, \ldots, n : \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu_k(y, E_i^{\pm}(t)) dH_y^{n-1} \leqslant \nu(\mathcal{E}_q(t))(2t)^{n-1}.$$

Тогда, ввиду неравенства (4) получаем оценку

$$S(t) := H^{n-1}(\mathcal{E}_q(t)) \leqslant 2^n(n+1)\,\nu(\mathcal{E}_q(t))\,t^{n-1}.$$

Отсюда, в силу предположения (3) вытекает справедливость условия (2) и значит, на основании Следствия, поверхность $M^n$ имеет конформно-параболический тип. Теорема доказана.

Замечание. Условие (3) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{\nu(t)}{F^{n-1}(t)} < \infty$$

для какой-либо положительной функции $F(t)$ такой, что

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{tF(t)} = \infty.$$

В частности, в качестве функции $F(t)$ могут выступать, например, функции $\ln t$, $\ln t \cdot \ln \ln t$ и т.п.

**4.** Рассмотрим непосредственные применения Теоремы к некоторым специальным классам гиперповерхностей.

Пример 1. Назовем поверхность $M^n$ *полиномиальной* (или *алгебраической*), если она задается в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением вида $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$, в котором функция $f$ представляет собой некоторый вещественный полином степени $s \geqslant 1$ от переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$

$$f(x_1, \ldots x_{n+1}) = \sum_{k_1 + \cdots + k_{n+1} \leqslant s} p_{k_1 \ldots k_{n+1}} \cdot x_1^{k_1} \cdots x_{n+1}^{k_{n+1}},$$

где $p_{k_1 \ldots k_{n+1}}$ – коэффициенты полинома. Ясно, что произвольная координатная прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, скажем, прямая $l_k(y)$, либо пересекает полиномиальную поверхность не более чем в $s$ точках, соответствующих корням полинома $f$ (рассматриваемого как полином одной переменной $x_k$ при фиксированном наборе значений $y$ остальных переменных) либо прямая $l_k(y)$ целиком лежит на данной поверхности, что возможно только, если функция $f$ не зависит от переменной $x_k$, причем в последнем случае множество таких прямых, очевидно, имеет $n$-мерную меру ноль. Таким образом, $\nu(M^n) \leqslant s$ и на основании Теоремы заключаем, что *произвольная $n$-мерная некомпактная полиномиальная поверхность имеет конформно-параболический тип.*

Пример 2. Пусть гиперповерхность $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана в явной форме с помощью некоторой гладкой функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ при всех $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f$ обладает следующим свойством: для каждого номера $k = 1, \dots, n$ на любом промежутке $|x_k| \leqslant t$ $(t > 0)$ изменения переменной $x_k$ множество нулей частной производной $f'_{x_k}$ (как функции от $x_k$ при любых фиксированных значениях остальных переменных) является конечносвязным, т.е. состоит из конечного числа $\mu_k(t)$ точек или отрезков. Тогда, если для данной поверхности $M^n$ выполняется условие (3), в котором вместо $\nu(t)$ надо взять величину $\mu(t) = \max\{\mu_k(t),\ k = 1, \dots, n\}$, то поверхность $M^n$ имеет конформно-параболический тип.

В самом деле, в этом случае для любой координатной прямой $l_k(y)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ $(k = 1, \dots, n)$ при почти всех $y \in \mathbb{R}^n$ число точек пересечения $l_k(y)$ с множеством $B_q(t)$ (а тем более, с $E_q(t)$) не превышает величины $\mu_k(t) + 1$, так как между двумя нулями функции лежит нуль ее производной. Следовательно, $\nu(t) \leqslant \mu(t) + 1$ и выполняется условие (3) Теоремы, на основании которой поверхность $M^n$ – конформно-параболична.

Замечание. Можно сказать, что величина $\nu(U)$ характеризует степень *“волнистости”* или *“слоистости”* подмножества $U$ гиперповерхности $M^n$.

Теорема показывает, что конформная параболичность гиперповерхности $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гарантируется слабым ростом волнистости $q$-сфер $\mathcal{E}_q(t)$ при $t \to +\infty$.

Доказанное утверждение с естественной адаптацией, конечно, справедливо и для иной, отличной от $q$, функции исчерпания $h$ поверхности, например, для функции расстояния в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Заметим, что слоистость $h$-шаров $\mathcal{B}_h(t)$ может при этом иметь произвольную асимптотику роста. Например, некомпактная внешне-полная поверхность вращения всегда является конформно-параболической, хотя площадь геодезическо круга может расти сколь угодно быстро при том, что его граница — стандартная окружность.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. А. Зоричу за постановку вопросов и их обсуждение, в результате чего и была написана эта работа.

## Литература

[1] В. М. Миклюков, *Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей*, Изв. РАН. Сер. матем. **60**:4 (1996), 111–158.

[2] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, *О конформном типе риманова многообразия*, Функц. анализ прил. **30**:2 (1996), 40–55.

[3] A. Grigor’yan, *Analytic and geometric backgraund of recurrence and non-explosion of the Brownian motion*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36**:2 (1999), 135–249.

[4] В. М. Кесельман, *$p$-Параболические многообразия и их свойства*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Институт математики СОАН, Новосибирск, 1988.
[5] M. Troyanov, *Parabolicity of Manifolds*, Siberian Adv. Math. **9** (1999), 125–150.
[6] V. Gol'dstein, M. Troynov, *The Kelvin-Nevanlinna-Royden criterion for $p$-parabolicity*, Math. Z. **232** (1999), 607–619.
[7] I. Holopainen, P. Koskela, *Volume growth and parabolicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3425–3435.
[8] L. Ahlfors, *Sur le type d'une surface de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **201** (1935), 30–32.
[9] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987.

Кафедра математики
Московский государственный
индустриальный университет
109280 Москва
Россия

kvlm@online.ru