Revista Colombiana de Estadística

Volumen 24 (2001) N° 1, páginas 13 *a* 26

PROCESO DE GALTON-WATSON

Raydonal Ospina Martínez. *

Resumen

Se presenta una síntesis de las principales características que se incluyen al realizar un análisis del proceso de Galton-Watson: el tiempo de extinción del proceso, los resultados asintóticos para los casos crítico, subcrítico y supercrítico, la estimación por máxima verosimilitud del promedio de reproducción y la construcción de algunas variables aleatorias simuladas para verificar su comportamiento normal asintótico.
Palabras Claves: Procesos de ramificación, proceso de Galton-Watson, promedio de reproducción, estimación, simulación.

Abstract

A synthesis of the practical theoretical main results is presented that involves the analysis of the process of Galton-Watson; as they are the results asympotycs for the cases critical subcritical and supercritical, the time of extinction of the process, the estimate of the reproduction average way maximum likelihood and the construction of some random variables which were simulated to verify their behavior normal asymptotically.
Key Words: Branching processes, Galton-Watson process, mean of reproduction, estimation, simulation.

*Universidad Nacional de Colombia. Departamento de Matemáticas y Estadística. Bogotá-Colombia. Email: or161365@eudoramail.com

1. Introducción

En la población colombiana existen algunas comunidades indígenas aisladas, localizadas en zonas de la región Amazónica y de la Sierra Nevada de Santa Marta principalmente. Estas comunidades poseen una gran riqueza cultural que proviene de muchos años de experiencia y del intercambio de conocimiento, generación tras generación.

El devenir de los tiempos ha ocasionado que dichas comunidades sean des plazadas y sometidas a cambios estructurales a nivel sociocultural y en su medio ambiente. Cabe entonces preguntarse ¿Es posible que sucumban a los cambios generacionales? ¿Están en peligro de extinción? ¿Si están en peligro de extinción, en qué momento se esperaría que se extinguieran? ¿Es posible que crezcan?

Existen algunos modelos matemáticos que bajo ciertas condiciones podrían responder a algunas de estas preguntas. Entre dichos modelos se encuentran los denominados *Procesos de Ramificación*,usados frecuentemente en biología y física nuclear. Los procesos de ramificación permiten describir el desarrollo de una población compuesta por miembros denominados también individuos o partículas. Se asume que éstos se desarrollan independientemente unos de otros y de la historia del proceso.

El proceso de ramificación más simple, es el de Galton-Watson, el cual tiene un ingrediente particular, y es el uso de la teoría de probabilidad y los procesos estocásticos.

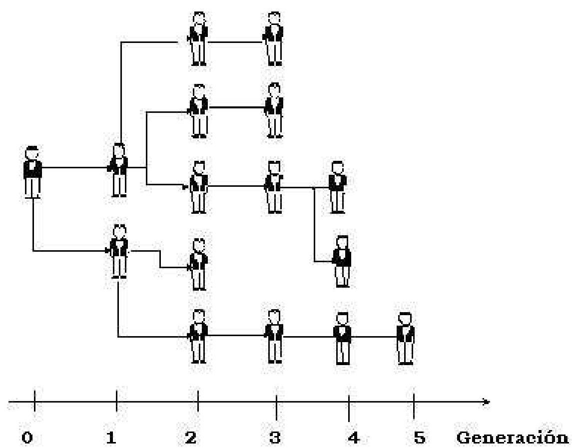
Los primeros indicios sobre el uso de los procesos de ramificación se encuentran en el siglo XVIII en el famoso libro de tres volúmenes del investigador Thomas Malthus, titulado *Essay on the Principles of Populations*, en el cual se plantea que una población no controlada deberá crecer exponencialmente. Malthus relata que en un pueblo de Berna, de las 487 familias burguesas existentes, 379 se extinguieron en el lapso de dos siglos (1583-1783). El primero en tratar de explicar el fenómeno relatado por Malthus fue el matemático francés I. J. Bienaymé (1796-1878). Aunque no hay constancia escrita, parece ser que Bienaymé relacionó correctamente la probabilidad de extinción con el promedio de hijos varones de cada individuo.

Independientemente de Bienaymé, el matemático Inglés Sir Francis Galton (1822-1911) formuló el problema de extinción de una manera más general al suponer que en una población, el número de hijos de cada individuo x es una variable aleatoria ξ_x con distribución denotada $p := (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, siendo $p_n :=$ *"probabilidad de tener n hijos"* con $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Para evitar situaciones triviales, se supone que $p_0 + p_1 < 1$; de lo contrario la población se extingue con probabilidad 1.

El número de hijos que cada individuo tiene es independiente de su historia familiar y del número de hijos de los demás individuos. Los hijos tienen sus propios hijos con la misma distribución. (Harris,1963).

Pensemos que el proceso se inicia con un individuo el cual constituye la $0-$ésima generación, sus hijos forman la primera generación, sus nietos la segunda y así sucesivamente. De esta manera, si denotamos la variable aleatoria Z_n como el número de individuos en la n-ésima generación, entonces se tiene que $Z_0 = 1$ y Z_1 posee distribución p. (Athreya ,1972).



Si en la n-ésima generación hay $i \geq 1$ individuos, entonces en la generación $(n + 1)$ habrá $Z_n(1) + Z_n(2) + ... + Z_n(i)$ individuos, donde $Z_n(k)$ denota el número de hijos del k-ésimo individuo de la n-ésima generación, $k = 1, 2, ...i$. Como los $Z_n(k)$ son independientes y tienen la misma distribución p, entonces la probabilidad de transición $\pi_{ij} := P\left(Z_{n+1} = j|\, Z_n = i\right) = p_j^{*i}$ es la $j-$ésima componente de la $i-$ésima convolución de p .

En otros términos, la distribución de Z_{n+1} dado que $Z_n = i$, es igual a la distribución de una suma de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución p. Esta última propiedad es la que caracteriza a los procesos de ramificación.

Galton se pregunta por la probabilidad de extinción del proceso $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para ello calcula $q := \lim\limits_{n\to\infty} P\left(Z_n = 0\right) = P\left(Z_n \to 0\right)$

Se tiene que si el individuo inicial tiene k hijos, entonces se podría pensar que su descendencia se extingue con probabilidad q^k, esto es,

$$q \quad := \quad \sum_{k=0}^{\infty} P\left(k\ hijos\right) P\left(extinción|\ k\ hijos\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k q^k$$

q es por lo tanto solución de la ecuación $s = f(s)$ donde $f(s) = Es^{Z_1}$ con $0 \leq\ s \leq\ 1$.

Así, $f(s)$ denota la función generadora de probabilidades de la variable aleatoria Z_1 con promedio de reproducción $m = EZ_1$. $f(s)$ es continua, estrictamente creciente y convexa en $0 \leq\ s \leq\ 1$ y además $f(0) = P(Z_1 = 0) = p_0$ y $f(1) = 1$.

La única respuesta al problema de extinción planteado por Galton fue dada por el clérigo Henry Watson, quien sin embargo concluyó erróneamente que $q = 1$ (Iosifescu,1973).

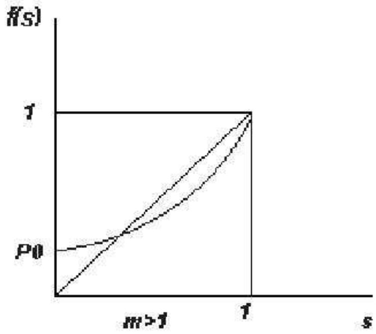
De las propiedades de f se puede deducir que la ecuación $s = f(s)$ tiene a lo más dos soluciones:

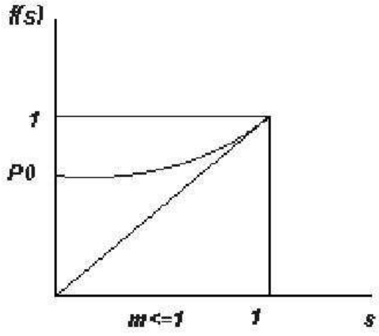
1. Si $m = f'(1) \leq 1$, entonces $f'(s) < 1$ para $0 \leq s < 1$. Por lo tanto, toda la gráfica de $f(s)$ en $(0, 1)$ se encuentra por encima de la diagonal. Esto implica que 1 es la única solución de la ecuación $f(s) = s$, esto es, $q = 1$.

2. Si $m = f'(1) > 1$, entonces $f'(s_0) > 1$ para algún $s_0 < 1$ suficientemente cercano a 1. Entonces en $(s_0, 1)$ la gráfica de $f(s)$ debe estar por debajo de la diagonal. Si $p_0 > 0$, debe existir t, $0 < t < 1$, tal que $f(t) = t$. Puesto que q es la menor solución no negativa de la ecuación $f(s) = s$, se deduce que $0 < q < 1$. En el caso en que $p_0 = 0$ se tiene que $f(0) = 0$ y por tanto $q = 0$.

El danés J.F. Steffensen publicó por primera vez en el año de 1929 un análisis completo de la probabilidad de extinción demostrando que la solución $q = 1$ es válida si y solo si $m \leq\ 1$ donde $m = f'(1)$.

Se puede demostrar que $f_n(s) = f(f_{n-1}(s))$ y $EZ_n = m^n$, con lo cual la función generadora de probabilidades de Z_n es la $n-$ésima iterada de f y $P(Z_n \to 0) + P(Z_n \to \infty) = 1$. Es decir, el proceso se extingue o explota con probabilidad 1.





2. Definición del Proceso de Galton-Watson.

Un proceso de *Galton-Watson* se define como una cadena de Markov homogénea sobre los enteros no negativos donde sus probabilidades de transición se definen en términos de una distribución dada $\{p_k, k = 1, 2...\}$, $p_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$; de esta manera

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &:= P\left(Z_{n+1} = j \middle| Z_n = i\right) \\ &= \begin{cases} p_j^{*i} \ , \ i \geq 1, \ j \geq 0 \\ \delta_{0j} \ , \ i = 0, \ j \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker y $\{p_k^{*i}, k = 1, 2...\}$ es la $i-$ésima componente de la $j-$ésima convolución de $\{p_k, k = 0, 1, 2...\}$. Se puede verificar que para este proceso todos los estados $k \neq 0$ son transitorios.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $Z_0 = 1$, ya que el proceso $\{Z_n(i), n = 0, 1, 2..\}$ en el que $Z_0 = i$, es la suma de i copias independientes del proceso $\{Z_n, n = 0, 1, 2...\}$.

El proceso original de Galton-Watson y sus generalizaciones están íntimamente relacionados con los trabajos de Niels Abel acerca de las ecuaciones funcionales, la teoría de las funciones iteradas y la teoría de los procesos estocásticos (Blanco,1996).

Para muchas de las aplicaciones de este modelo es conveniente considerar una población en la que hay k tipos diferentes de individuos, siendo k un número natural fijo. En este caso la distribución del número de hijos de cada individuo depende del tipo de cada individuo. También se supone que los hijos se reproducen independientemente unos de otros e independientemente del pasado del proceso.

Se define el **tiempo de extinción** v como el menor subíndice n tal que $Z_n = 0$. Así, v puede interpretarse como el número de generaciones que se producen hasta la extinción, de donde se deduce que: $P(v = 0) = 0$ y $P(v = n) = f_n(0) - f_{n-1}(0)$.

Definición : Un proceso de Galton -Watson es:

Subcrítico si $m < 1$
Crítico si $m = 1$
Supercrítico si $m > 1$.

3. RESULTADOS ASINTÓTICOS

Si $0 < m < \infty$ al definir la variable aleatoria $W_n := Z_n/EZ_n = Z_n/m^n$ entonces se puede verificar que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala adaptada a $\Im_n$ la σ-álgebra generada por $Z_0, Z_1, ...Z_n$. Más aún, como $W_n \geq 0$ debe existir una variable aleatoria no negativa W con $EW \leq 1$ tal que $W_n \to W$ casi siempre. De esta manera se podría pensar que asintóticamente Z_n se comporta como Wm^n.

Desafortunadamente esta interpretación no es del todo correcta, pues es posible que $Z_n \to \infty$ y que $W = 0$, lo que indicaría que m^n crece más rápido que Z_n

3.1. Caso Supercrítico

Bajo las condiciones $m > 1$, $\sigma^2 < \infty$ y $Z_0 = 1$ se obtiene:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} E(W_n - W)^2 = 0$.
2. $EW = 1$ y $VarW = \sigma^2/m(m-1)$
3. $P(W = 0) = q$.

Esto es W es no degenerada.

3.2. Caso Subcrítico

En el caso subcrítico $m < 1$, se sabe que con probabilidad uno la población se extingue. Por lo tanto se está interesado en analizar el comportamiento asintótico del proceso Z_n condicionado por la hipótesis $Z_n \neq 0$.

En este caso se obtiene:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n = k|Z_n > 0) =: b_k \quad \forall \ k \in \mathbb{N}$.
2. $b_k \geq 0$ y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = 1$.
3. $g(s) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k s^k$ entonces: $g(f(s)) = mg(s) + 1 - m$.

Es decir, la distribución límite condicionada a la no extinción es no degenerada y la correspondiente función generadora de probabilidades de los b_k denotada por $g(s)$ es la única solución de la ecuación funcional de Schröder.

3.3. Caso crítico

Cuando $m = 1$ se tiene que $P(Z_n \to 0) = 1$ o equivalentemente $P(Z_n > 0) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En este caso se está interesado en analizar la tasa de convergencia a cero. Se deduce que para $m = 1$, $\sigma^2 < \infty$ y $Z_0 = 1$,

1. $nP[Z_n > 0] \to 2/\sigma^2$.
2. $E[Z_n|Z_n > 0] \to \sigma^2/2$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} P[(Z_n/n) > x|Z_n > 0] = exp(-2x/\sigma^2)$.

El resultado anterior indica que el decrecimiento de una población que se comporta según un proceso de Galton-Watson con $m = 1$ es exponencial.

Para el caso supercrítico se podrían debilitar las condiciones que garantizan que W_n converge a un límite no degenerado al suponer que $E(Z_1 \log Z_1) < \infty$.

Así, existe una sucesión de constantes $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ con $c_n \to \infty$ y $c_{n+1}/c_n \to m$ cuando $n \to \infty$ tal que $W_n := Z_n/c_n$ converge casi siempre a una variable W con $P(W > 0) = 1 - q$ (Heyde,1970).

Este resultado nos muestra como construir otra normalización del proceso Z_n para el caso supercrítico que garantiza la convergencia de W_n.

4. Simulación

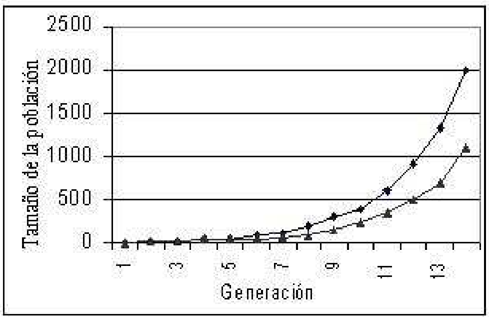
Bajo la metodología planteada por (Stefanescu, 1997) se realizaron simulaciones de trayectorias las cuales representan el comportamiento de una población que se desarrolla según un proceso de Galton-Watson, bajo una ley de reproducción inicial Binomial, Poisson y Geométrica .

4.1. Generación de Trayectorias de un proceso de Galton-Watson bajo diferentes parámetros iniciales

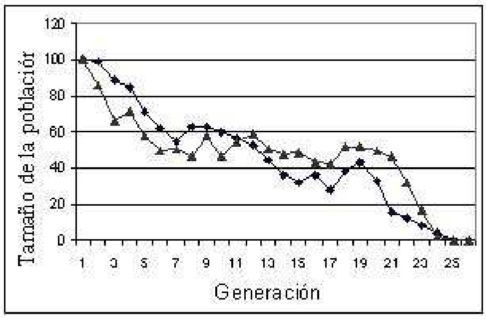
Parámetros de simulación:

N tamaño inicial de la población.
P distribución inicial.
n longitud de la trayectoria.
m promedio de reproducción.

De dicha simulación se observan los siguientes comportamientos (Ospina, 2001):

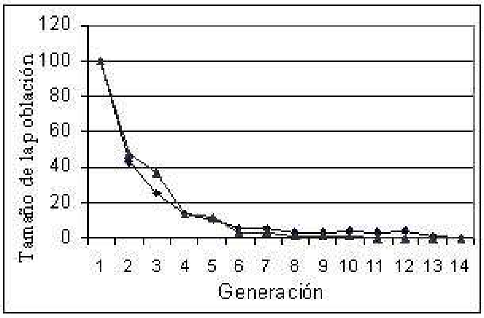


$N = 1$, $P(Z_1 = k) = P(\lambda)$
λ=1.3, 1.5, $n = 15$, $m > 1$.

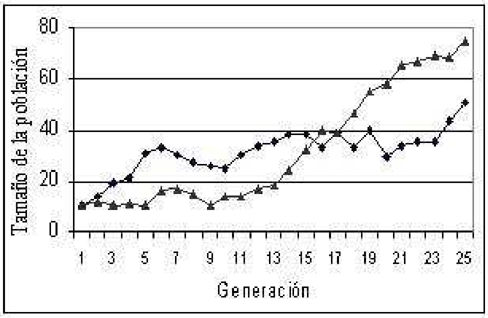


$N = 100$, $P(Z_1 = k) = P(\lambda)$
λ=1, n =15, $m = 1$.

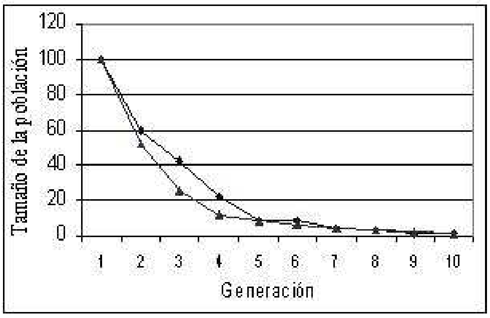
Con estos resultados, observamos que si una población se desarrolla según un proceso de Galton-Watson con promedio de reproducción $m = EZ_1 \leq 1$ se espera que decrezca hasta extinguirse y si $m = EZ_1 > 1$ se espera que la comunidad crezca indefinidamente.



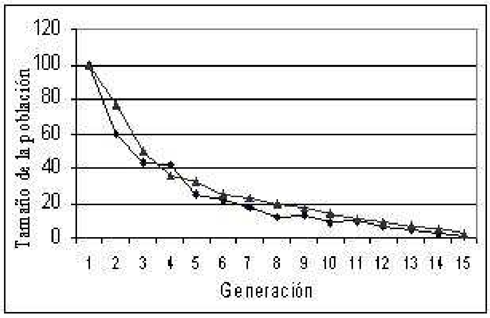
$N = 100$, $P(Z_1 = k) = P(\lambda)$
λ=1.3, 1.5, $n = 15$, $m < 1$.



$N = 10$, $P(Z_1 = k) = B(d, p)$
d=10, p=0.3, 0.5, n=25, $m > 1$.



$N = 100$, $P(Z_1 = k) = B(d, p)$
d=10, p=0.1, n=25, $m = 1$.

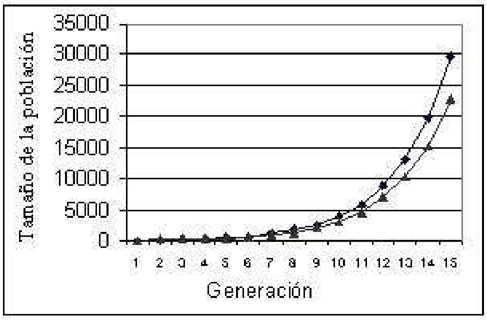


$N = 100$, $P(Z_1 = k) = B(d, p)$
d=10, p=0.03, 0.05, n=15, $m < 1$.

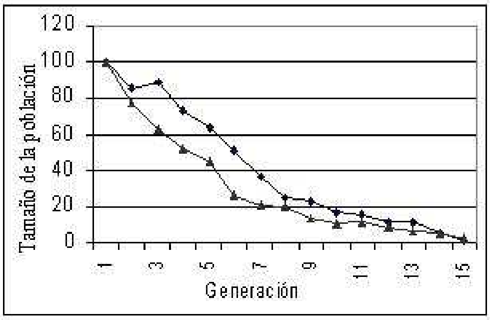
5. Estimación

Como observamos el proceso de Galton-Watson está caracterizado por el promedio de reproducción m. En la práctica es necesario desarrollar técnicas estadísticas que permitan calcular dicho promedio. Una alternativa es la estimación vía máxima verosimilitud.

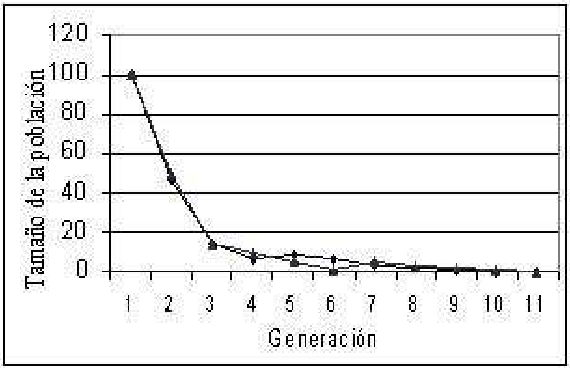
Sea Z_n un proceso de Galton Watson con Z_0 ancestros y $\widehat{m}$ el estimador de máxima verosimilitud de m basado en la observación de Z_{jk}, $j, k = 0, 1, \cdots$ siendo Z_{jk} el número de individuos de la j-ésima generación con exactamente k descendientes. $\widehat{m}$ se construye como sigue:



$N = 1$, $P(Z_1 = k) = G(p)$
p=0.2, 0.3, n=15, $m > 1$.



$N = 100$, $P(Z_1 = k) = G(p)$
p=0.5, n=15, $m = 1$.



$N = 1$, $P(Z_1 = k) = G(p)$
p=0.2, 0.3, n=15, $m < 1$.

$Z_j = \sum kZ_{jk}$ representa el número de individuos de la j-ésima generación. La distribución conjunta de Z_{jk}, $k = 0, 1, ..$ dado Z_j está dada por:

$$P\left(Z_{j0} = i_0, Z_{j1} = i_1, \cdots | Z_j\right) = \frac{Z_j!}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} i_k!} \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{i_k},$$

La función de verosimilitud basada en las observaciones Z_{jk}, $j = 0, .., n-1$, está dada por:

$$L = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{Z_j!}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} i_k!} \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{i_k} \right)$$

Utilizando multiplicadores de Lagrange para maximizar esta función obtenemos:

$$\widehat{p_k} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} Z_{jk}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} Z_j} \qquad \text{y} \qquad \widehat{m} = \sum_{k=0}^{\infty} k\widehat{p_k} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} Z_{j+1}}{\sum\limits_{j=0}^{n-1} Z_j}.$$

El comportamiento asintótico de $\widehat{m}$ puede ser estudiado de tres maneras:

1. Suponiendo que el número de generaciones crezca indefinidamente
2. Suponiendo que el tamaño de la población inicial y el número de generaciones crezca indefinidamente pero simultáneamente
3. Suponiendo que el número de generaciones es fijo pero el tamaño de la población inicial tiende a infinito

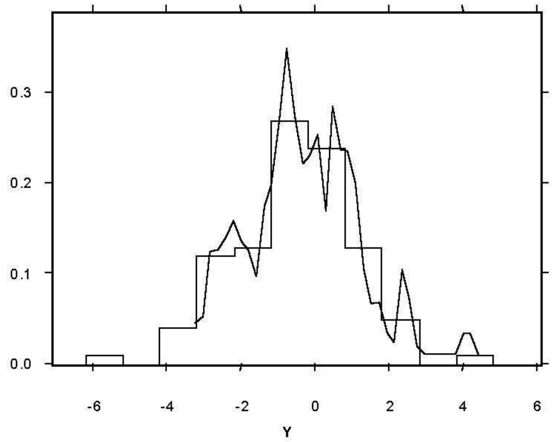
Se puede verificar que el estimador de máxima verosimilitud basado en cualquiera de los casos anteriores es un estimador fuertemente consistente, (Jagers,1975). Además, se obtienen los siguientes resultados, Nanthi (1983):

1. Si $1 < m < \infty$ y $0 < \sigma^2 < \infty$, la variable aleatoria $Y = (\widehat{m} - m)\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} Z_j}$ converge en distribución a una variable aleatoria $N(0, \sigma^2)$.
2. Si $0 < m < 1$ y $0 < \sigma^2 < \infty$, la variable aleatoria $Y = (\widehat{m} - m)\sqrt{\frac{N}{1-m}}$ converge en distribución a una variable aleatoria $N(0, \sigma^2)$.
3. Sea $m = 1$ y $0 < \sigma^2 < \infty$, entonces la variable aleatoria $Y = (\widehat{m} - m)\sqrt{\frac{nN}{\sigma^2}}$ converge en distribución a una variable aleatoria con distribución $N(0, 1)$ cuando $n, N \to \infty$ y $n/N \to 0$.
4. Sea $m > 1$, $0 < \sigma^2 < \infty$ y $E(Z_1^4) < \infty$, entonces la variable aleatoria $Y = (\widehat{m} - m)\sqrt{\frac{N(m^n-1)}{\sigma^2(m-1)}}$ converge en distribución a una variable aleatoria con distribución $N(0, 1)$ cuando $n, N \to \infty$.

5. Sea $0 < m < \infty$, n fijo y $0 < \sigma^2 < \infty$, entonces: $Y = (\widehat{m} - m)\sqrt{N \sum_{k=0}^{n-1} m^k}$ converge en distribución a una variable aleatoria $N(0, \sigma^2)$ cuando $n, N \to \infty$.

Para cada uno de los casos anteriores se verifico por simulación dichos resultados. Como un ejemplo, para el caso No.1 se simuló la variable aleatoria $Y = (\widehat{m} - m)\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} Z_j}$ bajo distribución inicial de Poisson, λ=1.5, n=25, con lo cual se tiene:

Así, al realizar una prueba de bondad de ajuste *Ji*-cuadrado a un nivel α=0.001 y agrupando los datos en 5 clases se obtuvo que no existía suficiente evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad asintótica.



Simulación de la variable aleatoria Y

$\chi^2 = 8{,}4$.

Esta misma conclusión se mantuvo en todos los casos anteriores (Ospina, 2001).

6. Conclusiones

- La clasificación del proceso de Galton Watson en los casos crítico, subcrítico y supercrítico, permite determinar el comportamiento asintótico del proceso.

- El comportamiento de este tipo de procesos recae en el conocimiento del promedio de reproducción m.
- El proceso de Galton Watson es un modelo bastante atractivo para describir fenómenos de alta velocidad de crecimiento (decrecimiento) y poca duración.
- Los métodos de simulación son herramientas efectivas para describir el comportamiento de este tipo de procesos.
- Las variables estudiadas ayudan a explicar procesos que se asemejan a un proceso de Galton-Watson.
- La simulación del proceso permite verificar la normalidad asintótica de las variables propuestas.

7. Propuestas de investigación.

- Encontrar estimadores no-parámetricos de los parámetros de un proceso de Galton-Watson.
- Analizar y estimar el tiempo de extinción de procesos generales de Galton-Watson.
- Estudiar el proceso

$$Q_n = \begin{cases} 1, \text{ si } Z_n - W_n > 0, \\ 0, \text{ si } Z_n - W_n = 0, \\ -1, \text{ si } Z_n - W_n > 0, \end{cases}$$

  Donde $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso de Galton-Watson y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso estocástico, no necesariamente de Galton-Watson.

  Si Z_n y W_n representan el desarrollo de dos poblaciones, entonces $Q_n = 1$ indicaría que Z_n crece mas rápido que W_n, $Q_n = 0$ indicaría que Z_n y W_n se desarrollan armoniosamente y $Q_n = -1$ indicaría que W_n crece mas rápido que Z_n.

  De manera natural surgen algunas preguntas como ¿cuál es el comportamiento asintótico de Q_n?, ¿converge Q_n a una variable aleatoria no degenerada ?, ¿si lo hace, bajo que condiciones?, ¿es Q_n una caminata aleatoria ?

Nota

Este documento es un resumen del trabajo de grado en Estadística; titulado *Proceso de Galton Watson*, realizado por Raydonal Ospina M. y dirigido por la profesora Liliana Blanco del departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia.

8. Referencias Bibliográficas

1. ATHREYA, P. (1972), *Branching Processes*, New York: Springer Verlag.
2. BLANCO, L. (1996). ¿Qué es un Proceso de Ramificación?. Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, Santa fe de Bogotá, Vol. III, pp. 43-50.
3. HARRIS, T.E. (1963), *The Theory of Branching processes*, Springer Verlag, Berlín.
4. HEYDE, C. C.(1970). Extension of a result of Seneta for the Super-Critical. Galton-Watson Process. Ann. Math. Statist. 41, 739-742.
5. IOSIFESCU, M. y TAUTU (1973). *Stochastic processes and aplications in biology and medicine*, Springer Verlag, Berlin.
6. NANTHI, K. (1983). *Statistical Estimation for Stochastic Processes.* Queens Papers in Pure and Applied Mathematics, No 52. Ontario.
7. OSPINA, R. (2001). *Proceso de Galton Watson.* Trabajo de grado. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
8. STEFANESCU, C. (1997), Simulation of Multitype Galton-Watson Chains. Preprint.