Séminaires & Congrès
7, 2003, p. 101–167

ESPACES HILBERTIENS INVARIANTS DE FONCTIONS HOLOMORPHES

par

Jacques Faraut

Résumé. — Lorsqu'un espace hilbertien de fonctions holomorphes est invariant par un groupe d'automorphismes, la théorie des représentations permet de l'analyser et, dans certains cas, de déterminer son noyau reproduisant. La méthode d'analyse que nous présentons utilise la théorie de Choquet sur la représentation intégrale dans les cônes convexes. Nous considérons en particulier le cas des espaces hilbertiens de fonctions holomorphes sur un domaine invariant dans la complexification d'un espace symétrique compact.

***Abstract* (Spaces of holomorphic functions).** — When a Hilbert space of holomorphic functions is invariant under a group of automorphisms, representation theory can be used for analyzing it, and, in some cases, for computing its reproducing kernel. The method we are presenting uses Choquet theory of integral representation in convex cones. We consider in particular Hilbert spaces of holomorphic functions on the complexification of a compact symmetric space.

Un espace hilbertien de fonctions holomorphes sur une variété complexe Z est un sous-espace $\mathscr{H}$ de l'espace $\mathscr{O}(Z)$ des fonctions holomorphes sur Z muni d'une structure hilbertienne telle que l'injection de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{O}(Z)$ soit continue, l'espace $\mathscr{O}(Z)$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On considère un groupe G d'automorphismes holomorphes de Z. Si l'espace hilbertien $\mathscr{H}$ est invariant par G, l'action de G dans $\mathscr{H}$ définit une représentation unitaire de G. La théorie des représentations permet d'analyser un tel espace et, dans certains cas, de déterminer son noyau reproduisant. La méthode d'analyse que nous présentons utilise la théorie de Choquet sur la représentation intégrale dans les cônes convexes, plus précisément une version récente due à E. Thomas. En effet l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{O}(Z)$ qui sont invariants par G peut être muni d'une structure de cône convexe, et les génératrices extrémales de ce cône correspondent aux sous-espaces hilbertiens invariants irréductibles. Cette structure de cône s'explique facilement en associant à tout sous-espace hilbertien son noyau reproduisant. On peut formuler une

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 32M05, 43A90, 53C35.
Mots clefs. — Noyau reproduisant, espace symétrique, fonction sphérique.

condition géométrique simple qui assure que tout sous-espace hilbertien invariant se décompose sans multiplicité. Il suffit pour cela qu'il existe une involution antiholomorphe τ de Z telle que, pour tout z de Z, z et $\tau(z)$ soient sur la même orbite de G.

Dans les deux derniers chapitres nous considérons le cas d'un domaine Ω dans la complexification d'un espace symétrique compact U/K, qui est invariant par U. Après avoir rappelé quelques résultats de base concernant la géométrie des espaces symétriques compacts et les représentations irréductibles sphériques, nous présentons les résultats de Lassalle sur les séries de Laurent généralisées. Nous verrons que, si $\mathscr{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{O}(Z)$ qui est invariant par U, la représentation de U dans $\mathscr{H}$ se décompose sans multiplicité en somme directe de représentations irréductibles sphériques. Comme application nous montrons pour finir comment l'analyse de Fourier sphérique permet de donner une démonstration simple d'un résultat de Stenzel, généralisant un résultat antérieur de Hall. Il s'agit de montrer que l'image de $L^2(U/K)$ par la transformation de Bargmann-Segal est un espace de Bergman pondéré. Pour cela il suffit de montrer que ces deux sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{O}(U_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}})$ ont le même noyau reproduisant.

CHAPITRE I
FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN DOMAINE DE $\mathbb{C}^n$

Ce chapitre est un bref rappel des propriétés élémentaires des fonctions holomorphes de plusieurs variables, et de l'espace vectoriel topologique $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Dans la dernière section nous considérons les séries de Laurent de plusieurs variables. Les résultats qui y sont présentés seront généralisés dans le chapitre V où l'espace $(\mathbb{C}^*)^n$ sera remplacé par la complexification d'un espace symétrique compact.

I.1. Fonctions holomorphes sur un domaine de $\mathbb{C}^n$

Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^n$, et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans Ω à valeurs complexes. On définit

$$D_w f(z) = \frac{d}{dt} f(z+tw)\big|_{t=0}.$$

À l'aide des coordonnées cela s'écrit, si $z_j = x_j + iy_j$, $w_j = u_j + iv_j$,

$$D_w = \sum_{j=1}^{n} \Big(u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big).$$

Introduisons les notations
$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big),$$
et, pour $w\in\mathbb{C}^n$,
$$\partial_w=\sum_{j=1}^n w_j\frac{\partial}{\partial z_j},\quad \overline{\partial}_w=\sum_{j=1}^n \overline{w}_j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}.$$
Alors D_w s'écrit
$$D_w=\partial_w+\overline{\partial}_w.$$
C'est la décomposition de D_w en sa partie $\mathbb{C}$-linéaire et sa partie $\mathbb{C}$-antilinéaire,
$$D_{iw}=i\partial_w-i\overline{\partial}_w.$$
La fonction f est dite *holomorphe* si
$$D_{iw}f=iD_wf\quad (w\in\mathbb{C}^n),$$
ce qui équivaut à dire que sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. Cela se traduit par $\overline{\partial}_wf=0$, pour tout $w\in\mathbb{C}^n$, et aussi par
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}=0,\quad j=1,\ldots,n.$$
Ce sont les *équations de Cauchy-Riemann.* La fonction f est dite *antiholomorphe* si
$$D_{iw}f=-iD_wf,$$
ou bien $\partial wf=0$, et aussi
$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=0,\quad j=1,\ldots,n.$$
L'espace des fonction holomorphes dans un domaine Ω est noté $\mathscr{O}(\Omega)$. C'est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

Une fonction f est dite *analytique* dans Ω si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point z^0 de Ω,
$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha(z-z^0)^\alpha,$$
où
$$z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$
Une fonction analytique dans Ω est holomorphe dans Ω et
$$a_\alpha=\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(z^0),$$
où
$$\partial^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}},\qquad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!.$$
La formule de Cauchy permet d'établir la réciproque. Soit f une fonction holomorphe dans Ω, et soit $D_r(z^0)$ un polydisque de centre z^0 et de rayon r,
$$D_r(z^0)=\{w\in\mathbb{C}^n\mid |w_j-z_j^0|<r\}$$

tel que $\overline{D_r(z^0)} \subset \Omega$. On note $\partial_0 D$ la frontière distinguée de $D = D_r(z^0)$,

$$\partial_0 D = \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - z_j^0| = r\}.$$

Alors, pour $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{w_j - z_j} dw_1 \cdots dw_n.$$

C'est la *formule de Cauchy pour un polydisque.* Par dérivation sous le signe intégrale on en déduit que

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(w_j - z_j)^{\alpha_j + 1}} dw_1 \cdots dw_n.$$

I.1.1. Théorème. — *Une fonction holomorphe dans Ω est analytique dans Ω.*

Démonstration. — Pour $z \in D = D_r(z^0)$, $w \in \partial_0 D$,

$$\prod_{j=1}^n \frac{1}{w_j - z_j^0} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \prod_{j=1}^n \frac{(z_j - z_j^0)^{\alpha_j}}{(w_j - z_j^0)^{\alpha_j + 1}},$$

la convergence étant uniforme en w. En multipliant par $f(w_1, \ldots, w_n)$ et en intégrant terme à terme la série nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (z - z^0)^\alpha \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D} f(w) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(w_j - z_j^0)^{\alpha_j + 1}} dw_1 \cdots dw_n \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(z^0)(z - z^0)^\alpha. \end{aligned}$$

□

De la formule de Cauchy on déduit également les *inégalités de Cauchy.* Soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω et soit $D_r(z_0) \subset \Omega$. Si $|f(z)| \leqslant M$ dans $D_r(z^0)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$|\partial^\alpha f(z^0)| \leqslant M \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}}.$$

Une fonction holomorphe possède la *propriété de moyenne* : soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω, et soit $\overline{D_r(z)} \subset \Omega$, alors

$$f(z) = \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} f(w)\, d\lambda(w),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Plus généralement

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j + 1)!}{r^{2|\alpha|}} \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} f(w) \overline{(w - z)^\alpha}\, d\lambda(w).$$

Par suite

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} |f(w)|\, d\lambda(w),$$

$$|\partial^\alpha f(z)| \leqslant \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)!}{r^{|\alpha|}} \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} |f(w)|\, d\lambda(w).$$

Une conséquence de la propriété de moyenne est la suivante : soient Ω un domaine, Q un compact contenu dans Ω, et ω un voisinage ouvert relativement compact de Q d'adhérence $\overline{\omega}$ contenue dans Ω. Il existe des constantes C_α ($\alpha \in \mathbb{N}^n$) telles que, pour toute fonction f holomorphe dans Ω,

$$\sup_Q |\partial^\alpha f| \leqslant C_\alpha \int_\omega |f|\, d\lambda.$$

Il existe en effet $r > 0$ tel que, pour tout z de Q, le polydisque $D_r(z)$ soit contenu dans ω. D'après ce qui précède, si f est holomorphe dans Ω, $z \in Q$,

$$|\partial^\alpha f(z)| \leqslant C_\alpha \int_{D_r(z)} |f(w)|\, d\lambda(w) \leqslant C_\alpha \int_\omega |f(w)|\, d\lambda(w),$$

où

$$C_\alpha = \frac{\prod_{j=1}^n (\alpha_j+1)!}{r^{|\alpha|}} \frac{1}{(\pi r^2)^n}.$$

Le *principe du prolongement analytique* s'énonce : si deux fonctions holomorphes dans un domaine Ω coïncident au voisinage d'un point, elles sont égales dans Ω.

Si une fonction f est holomorphe dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$ ($n = 1$), et si l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation $z^0 \in \Omega$, alors f est identiquement nulle. Ce n'est plus vrai dans le cas des fonctions holomorphes de plusieurs variables ($n \geqslant 2$). Mais alors nous disposons de l'énoncé suivant qui nous sera utile pour démontrer des égalités de fonctions holomorphes.

I.1.2. Théorème. — *Soit M une variété réelle contenue dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'en tout point z de M le sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$ engendré par l'espace tangent $T_z(M)$ de M est égal à $\mathbb{C}^n$. Alors une fonction holomorphe f dans Ω qui s'annule sur M est identiquement nulle.*

Démonstration. — Soit $z \in M$. Pour tout $w \in T_z(M)$,

$$D_w f(z) = 0,$$

et, puisque f est holomorphe, cela implique que

$$D_{iw} f(z) = 0.$$

Donc les dérivées du premier ordre de f sont nulles sur M. Par suite toutes les dérivées de f sont nulles sur M. Puisque f est analytique, f est nulle au voisinage de M, donc f est identiquement nulle d'après le principe du prolongement analytique. □

Indiquons deux exemples où ce théorème s'applique.

(a) $\Omega = (\mathbb{C}^*)^n$, $\quad M = \mathbb{T}^n = \{z \in (\mathbb{C}^*)^n \mid |z_j| = 1\}$.

(b) $\Omega = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^N$, $(N = n^2)$, $M = \mathrm{U}(n)$, le groupe unitaire.

Références. — [**Hör79**].

I.2. Topologie de l'espace $\mathscr{O}(\Omega)$

L'espace vectoriel $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Dire que la suite f_n converge vers f signifie que, pour tout compact $Q \subset \Omega$, et tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, si $n \geqslant N$,

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon \qquad (z \in Q).$$

Les ensembles

$$V_{Q,\varepsilon} = \{f \in \mathscr{O}(\Omega) \mid \forall\, z \in Q,\ |f(z)| \leqslant \varepsilon\}$$

(Q compact $\subset \Omega$, $\varepsilon > 0$) constituent un système fondamental de voisinages de 0. Nous allons voir que l'espace vectoriel topologique $\mathscr{O}(\Omega)$ est métrisable. Soit Q_n une suite exhaustive de compacts de Ω, c'est-à-dire que $Q_n \subset Q_{n+1}$, et que tout compact de Ω est contenu dans l'un des Q_n. (On montre qu'une telle suite Q_n existe pour tout domaine Ω de $\mathbb{C}^n$). On pose, pour $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$,

$$M_n(f) = \sup_{z \in Q_n} |f(z)|, \quad \delta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf\bigl(M_n(f), 1\bigr), \quad d(f,g) = \delta(f-g).$$

Alors d est une distance sur $\mathscr{O}(\Omega)$ et la topologie définie par cette distance est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

I.2.1. Théorème de Weierstrass. — *Soit Ω un domaine. Si f_k est une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge uniformément sur tout compact, sa limite f est holomorphe. De plus, pour tout α, $\partial^\alpha f_k$ converge vers $\partial^\alpha f$ uniformément sur tout compact.*

Démonstration. — Soit $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Pour tout k, et pour $z \in D_r(a)$,

$$f_k(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D_r(a)} f_k(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{w_j - z_j} dw_1 \cdots dw_n,$$

et, quand k tend vers l'infini,

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D_r(a)} f(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{w_j - z_j} dw_1 \cdots dw_n,$$

ce qui montre que f est holomorphe. De plus

$$\partial^\alpha f_k(z) = \frac{\alpha!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D_r(a)} f_k(w_1, \ldots, w_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{(w_j - z_j)^{\alpha_j + 1}} dw_1 \cdots dw_n,$$

et par suite
$$\lim_{k\to\infty} \partial^\alpha f_k = \partial^\alpha f$$
uniformément sur tout compact. □

Ce théorème a les conséquences suivantes :

– $\mathscr{O}(\Omega)$ est fermé dans $\mathscr{C}(\Omega)$, espace des fonctions continues muni de la convergence uniforme sur les compacts.

– $\mathscr{O}(\Omega)$ est complet, c'est donc un espace de Fréchet. Rappelons qu'un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel topologique qui est localement convexe, métrisable et complet.

– Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'application $\partial_\alpha : f \mapsto \partial_\alpha f$ est continue.

Dans un espace vectoriel topologique un ensemble B est dit *borné* si, pour tout voisinage V de 0, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda V$. Une partie B de $\mathscr{O}(\Omega)$ est bornée si, pour tout compact $Q \subset \Omega$, il existe une constante M_Q telle que
$$|f(z)| \leqslant M_Q \qquad (f \in B,\ z \in Q).$$

I.2.2. Théorème de Montel. — *Les ensembles compacts de $\mathscr{O}(\Omega)$ sont les ensembles fermés bornés.*

(Un espace vectoriel topologique qui possède cette propriété est appelé *espace de Montel*.)

Démonstration. — Il est clair qu'un ensemble compact est fermé et borné. Pour montrer qu'un ensemble fermé borné est compact on utilise le théorème de Ascoli-Arzéla :

Soit X un espace métrique compact. Soit B un ensemble de fonctions continues sur X vérifiant

– B est borné : il existe $M > 0$ tel que
$$|f(x)| \leqslant M \quad (f \in B, x \in X),$$

– B est équicontinu : pour tout $x_0 \in X$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si $d(x, x_0) \leqslant \delta$, alors
$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \quad (f \in B, x \in X).$$
Alors B est relativement compact dans l'espace $\mathscr{C}(X)$ muni de la norme uniforme.

Soit donc B un ensemble fermé borné de $\mathscr{O}(\Omega)$. Soit $Q \subset \Omega$ un compact convexe. Il existe une constante M telle que
$$|f(z)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}\right| \leqslant M \quad (f \in B, z \in Q).$$
Du théorème des accroissements finis on déduit que les restrictions à Q des fonctions de B sont équicontinues. Puisque tout compact $Q \subset \Omega$ peut être recouvert par un nombre fini de compacts convexes contenus dans Ω, la propriété est vraie pour tout compact $Q \subset \Omega$. Ainsi, d'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, pour tout compact $Q \subset \Omega$

les restrictions à Q des fonctions de B constituent un ensemble relativement compact de $\mathscr{C}(Q)$.

On va montrer que de toute suite f_n de fonctions de B on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact. On considère une suite exhaustive de compacts Q_k. On extrait de la suite f_n une sous-suite $f_n^{(1)}$ qui converge uniformément sur Q_1, puis de la suite $f_n^{(1)}$ une sous-suite $f_n^{(2)}$ qui converge uniformément sur Q_2, et ainsi de suite. La suite diagonale $f_n^{(n)}$ est une sous-suite de la suite f_n qui converge uniformément sur tout compact. □

I.3. Développements de Taylor et Laurent

Un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ est appelé *domaine de Reinhardt* si

$$(z_1, \ldots, z_n) \in \Omega,\ (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega.$$

Autrement dit un domaine de Reinhardt est un domaine invariant sous l'action du groupe $\mathbb{T}^n$.

I.3.1. Théorème. — *Soit Ω un domaine de Reinhardt contenant l'origine, et soit f une fonction holomorphe dans Ω. Alors f est développable en série de Taylor,*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \quad (z \in \Omega),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω. Les coefficients a_α sont uniques.

Démonstration

(a) L'unicité résulte immédiatement de ce que

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0).$$

(b) Établissons l'existence du développement. Pour $r > 1$ posons $\Omega_r = \frac{1}{r}\Omega$, et soit Ω'_r la composante connexe de $\Omega \cap \Omega_r$ contenant 0. Notons que

$$\Omega = \bigcup_{r>1} \Omega'_r.$$

Pour $z \in \Omega'_r$ posons

$$h(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D_r(0)} f(\zeta_1 z_1, \ldots, \zeta_n z_n) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\zeta_j - 1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

La fonction h est holomorphe dans Ω'_r. Soit U un voisinage de 0 contenu dans Ω tel que

$$z \in U,\ \zeta \in \overline{D_r(0)} \Longrightarrow (\zeta_1 z_1, \ldots, \zeta_n z_n) \in \Omega.$$

D'après la formule de Cauchy, $f(z) = h(z)$ pour $z \in U$, et puisque Ω'_r est connexe, $f = h$ dans Ω'_r. Le développement en série

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\zeta_j - 1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \zeta_1^{-\alpha_1 - 1} \cdots \zeta_n^{-\alpha_n - 1}$$

converge uniformément sur $\partial_0 D_r(0)$. En intégrant terme à terme on obtient

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha(z),$$

avec

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial_0 D_r(0)} f(\zeta_1 z_1, \ldots, \zeta_n z_n) \prod_{j=1}^{n} \zeta_j^{-\alpha_j - 1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω'_r. Pour $z \in U$,

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) z^\alpha,$$

donc pour $z \in \Omega'_r$. □

Considérons maintenant le cas où le domaine de Reinhardt Ω est contenu dans $(\mathbb{C}^*)^n$. Il peut s'écrire

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \exp \omega\},$$

où ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ et

$$\exp \omega = \{(e^{\xi_1}, \ldots, e^{\xi_n}) \mid (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \omega\}.$$

Le domaine Ω est dit *logarithmiquement convexe* si ω est convexe. En général notons $\widehat{\omega}$ l'enveloppe convexe de ω. Le plus petit domaine logarithmiquement convexe contenant Ω s'écrit

$$\widetilde{\Omega} = \{z \in (\mathbb{C}^*)^n \mid (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in \exp \widehat{\omega}\}.$$

I.3.2. Théorème. — *Soit Ω un domaine de Reinhardt contenu dans $(\mathbb{C}^*)^n$, et soit f une fonction holomorphe dans Ω.*

(i) *Alors f est développable en série de Laurent,*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha,$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω. Les coefficients a_α sont uniques.

(ii) *La série de Laurent de f converge en tout point de $\widetilde{\Omega}$, et sa somme définit un prolongement holomorphe de f à $\widetilde{\Omega}$.*

La méthode que nous allons utiliser sera reprise et généralisée au chapitre V lorsque nous étudierons la série de Laurent d'une fonction holomorphe sur un domaine d'un espace symétrique complexe réductif.

Au cours de la démonstration nous aurons besoin de la notion de fonction d'appui. Soit E un espace euclidien. La *fonction d'appui* d'un ensemble borné $Q \subset E$ est la fonction h_Q définie sur E par

$$h_Q(\xi) = \sup_{\eta \in Q} (\xi|\eta).$$

C'est une fonction continue et positivement homogène,

$$h_Q(t\xi) = th_Q(\xi) \qquad (t > 0).$$

Si Q_1 et Q_2 sont deux parties bornées

$$h_{Q_1+Q_2} = h_{Q_1} + h_{Q_2},$$
$$h_{Q_1 \cup Q_2} = \sup(h_{Q_1}, h_{Q_2}).$$

Si $\widehat{Q}$ désigne l'enveloppe convexe de Q,

$$h_{\widehat{Q}} = h_Q.$$

Si Q est la boule de centre 0 et de rayon R,

$$h_Q(\xi) = R\|\xi\|.$$

Démonstration. — Soit f une fonction holomorphe sur le domaine Ω, et posons, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $z \in \Omega$,

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) e^{-i(\alpha_1\theta_1 + \cdots + \alpha_n\theta_n)} d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

La fonction f_α est holomorphe et vérifie

$$f_\alpha(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) = e^{i(\alpha_1\theta_1 + \cdots + \alpha_n\theta_n)} f_\alpha(z_1, \ldots, z_n).$$

Il en résulte qu'il existe un nombre $a_\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$f_\alpha(z) = a_\alpha z^\alpha.$$

En effet la fonction $z \mapsto z^{-\alpha} f_\alpha(z)$ est holomorphe et, pour z^0 fixé, est constante sur la variété

$$\{(e^{i\theta_1} z_1^0, \ldots, e^{i\theta_n} z_n^0) \mid (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n\},$$

donc constante sur Ω d'après le théorème I.1.2.

Pour z fixé, le nombre $f_\alpha(z) = a_\alpha z^\alpha$ est le coefficient de Fourier d'indice α de la fonction définie sur le tore $\mathbb{T} = \big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)^n$ par

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \longmapsto f(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n).$$

Cette fonction étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (puisque f est holomorphe), elle est égale à la somme de sa série de Fourier

$$f(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} f_\alpha(z) e^{i(\alpha_1\theta_1 + \cdots + \alpha_n\theta_n)},$$

et, pour $\theta_1 = \cdots = \theta_n = 0$,

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} f_\alpha(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha.$$

***I.3.3. Lemme* (Inégalités de Cauchy)**. — *Soit $Q \subset \omega$ un compact, et $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. On pose*

$$M(f,Q) = \sup_{(|z_1|,\dots,|z_n|)\in\exp Q} |f(z)|.$$

Alors

$$|a_\alpha| \leqslant M(f,Q)e^{-h_Q(\alpha)}.$$

Démonstration. — Pour $(|z_1|,\dots,|z_n|) \in \exp Q$,

$$|a_\alpha z_\alpha| = |f_\alpha(z)| \leqslant M(f,Q),$$

et, en considérant la borne supérieure du premier membre, on obtient

$$|a_\alpha|e^{h_Q(\alpha)} \leqslant M(f,Q). \qquad \square$$

Nous allons maintenant montrer que la série de Laurent de f converge uniformément sur tout compact de $\widetilde{\Omega}$. Soit $Q \subset \omega$ un compact. Son enveloppe convexe $\widehat{Q}$ est contenue dans $\widehat{\omega}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, si B_ε désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon ε de $\mathbb{R}^n$, le compact $Q_\varepsilon = Q + B_\varepsilon$ soit contenu dans ω. Pour $(|z_1|,\dots,|z_n|) \in \exp\widehat{Q}$,

$$|z^\alpha| \leqslant e^{h_{\widehat{Q}}(\alpha)}.$$

Puisque

$$h_{Q_\varepsilon}(\xi) = h_Q(\xi) + \varepsilon\|\xi\|,$$
$$h_{\widehat{Q}}(\xi) = h_Q(\xi),$$

on en déduit que

$$|a_\alpha z^\alpha| \leqslant M(f,Q_\varepsilon)e^{-\varepsilon\|\alpha\|}.$$

Par suite la série converge uniformément sur le compact $K \subset \widetilde{\Omega}$ défini par

$$K = \{z \mid (|z_1|,\dots,|z_n|) \in \exp\widehat{Q}\}. \qquad \square$$

Lorsque Ω est un domaine de Reinhardt de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine il y a un énoncé analogue. Dans ce cas ω est l'ouvert contenu dans $([-\infty,\infty[)^n$ défini par

$$\omega = \{(\xi_1,\dots,\xi_n) \mid (\exp\xi_1,\dots,\exp\xi_n) \in \Omega\},$$

en posant $\exp(-\infty) = 0$, et $\widehat{\omega}$ n'est pas l'enveloppe convexe de ω, mais l'ensemble défini par

$$\widehat{\omega} = \{\xi \mid \forall\,\eta \in (\mathbb{R}_+)^n,\ (\xi|\eta) \leqslant h_\omega(\eta)\}.$$

On peut alors énoncer :

Soit Ω un domaine de Reinhardt contenu dans $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine, et soit f une fonction holomorphe dans Ω.

(i) *Alors f est développable en série de Taylor,*

$$f(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha,$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω. Les coefficients a_α sont uniques.

(ii) *La série de Taylor de f converge en tout point de $\widetilde{\Omega}$, et sa somme définit un prolongement holomorphe de f à $\widetilde{\Omega}$.*

La démonstration est tout à fait semblable.

Nous généraliserons au chapitre V la formule classique de Gutzmer. Pour une fonction $f\in\mathscr{O}(\Omega)$ elle s'écrit

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}|f(r_1e^{i\theta_1},\ldots,r_ne^{i\theta_n})|^2d\theta_1\cdots d\theta_n=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}|a_\alpha|^2r^{2\alpha},$$

où $(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n\cap\Omega$.

CHAPITRE II
ESPACES HILBERTIENS DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. L'espace $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω est muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts. Un *espace hilbertien de fonctions holomorphes* sur Ω est un sous-espace $\mathscr{H}$ de $\mathscr{O}(\Omega)$ qui est muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que l'injection

$$\mathscr{H}\hookrightarrow\mathscr{O}(\Omega)$$

soit continue, ce qui se traduit par la propriété suivante : pour tout compact $Q\subset\Omega$ il existe une constante $M=M(Q)$ telle que

$$\forall\, f\in\mathscr{H},\ \forall\, z\in Q,\ |f(z)|\leqslant M\|f\|.$$

Un tel espace possède un noyau reproduisant. L'espace de Bergman en est un exemple de base. Dans la deuxième section nous arrivons au sujet principal de ce cours : l'étude des espaces hilbertiens de fonctions holomorphes qui sont invariants par un groupe d'automorphismes holomorphes.

II.1. Noyau reproduisant d'un espace hilbertien de fonctions holomorphes

Soit $\mathscr{H}$ un espace hilbertien de fonctions holomorphes sur Ω. Pour $w\in\Omega$, l'application

$$f\longmapsto f(w),\quad \mathscr{H}\longrightarrow\mathbb{C},$$

est continue. Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $\mathscr{K}_w \in \mathscr{H}$ telle que

$$f(w) = (f|\mathscr{K}_w) \quad (f \in \mathscr{H}).$$

Le noyau $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}(z,w) = \mathscr{K}_w(z)$, est appelé le *noyau reproduisant* de $\mathscr{H}$.

II.1.1. Proposition. — *Le noyau reproduisant $\mathscr{K}$ est hermitien et de type positif. En particulier $\mathscr{K}(z,z) \geqslant 0$ pour tout z, et $\mathscr{K}(z,z) = 0$ si et seulement si $f(z) = 0$ pour toute fonction $f \in \mathscr{H}$.*

Rappelons qu'un noyau $\mathscr{K}$ est dit *hermitien* si

$$\overline{\mathscr{K}(z,w)} = \mathscr{K}(w,z),$$

et *de type positif* si

$$\forall\, z_1, \ldots, z_N \in \Omega,\ \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j,k=1}^{N} \mathscr{K}(z_k, z_j)\alpha_j \overline{\alpha}_k \geqslant 0.$$

Démonstration. — Il résulte de la définition que

$$\begin{aligned} &\mathscr{K}(z,w) = (\mathscr{K}_w|\mathscr{K}_z) = \overline{(\mathscr{K}_z|\mathscr{K}_w)} = \overline{\mathscr{K}(w,z)}, \\ &\mathscr{K}(z,z) = \|\mathscr{K}_z\|^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

et aussi que

$$\sum_{j,k=1}^{N} \mathscr{K}(z_k, z_j)\alpha_j \overline{\alpha}_k = \sum_{j,k=1}^{N} (\mathscr{K}_{z_j}|\mathscr{K}_{z_k})\alpha_j \overline{\alpha}_k = \Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mathscr{K}_{z_j} \Big\|^2 \geqslant 0. \qquad \square$$

Le noyau reproduisant $\mathscr{K}(z,w)$ est holomorphe en z, antiholomorphe en w. Du théorème de Hartogs on déduit que $\mathscr{K}(z,\overline{w})$ est holomorphe sur $\Omega \times \overline{\Omega}$. Le noyau $\mathscr{K}$ est en particulier continu sur $\Omega \times \Omega$. (En fait la partie difficile de la démonstration du théorème de Hartogs est d'établir la continuité.) Mais on peut démontrer la continuité de $\mathscr{K}$ sur $\Omega \times \Omega$ assez simplement sans utiliser le théorème d'Hartogs comme on le verra quelques lignes plus loin.

La norme de la forme linéaire $f \mapsto f(z)$ $(z \in \Omega)$ est égale à $\|\mathscr{K}_z\|$. On en déduit que

$$\mathscr{K}(z,z) = \max_{f \in \mathscr{H}, \|f\| \leqslant 1} |f(z)|^2 \quad (z \in Q),$$

et que $\mathscr{K}(z,z)$ est une fonction bornée sur tout compact : $\mathscr{K}(z,z) \leqslant M(Q)^2$.

De cette propriété on peut déduire que le noyau reproduisant est continu de la façon suivante. Soit Q un compact convexe contenu dans Ω. En utilisant la propriété de moyenne on montre qu'il existe une constante $M_1 = M_1(Q)$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathscr{H}$,

$$\forall\, z \in Q,\ \Big|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\Big| \leqslant M_1\|f\|,$$

$$\forall\, z_1, z_2 \in Q,\ |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant nM_1\|f\|\,\|z_1 - z_2\|.$$

On en déduit que

$$\|\mathscr{K}_{z_1} - \mathscr{K}_{z_2}\| \leqslant nM_1\,\|z_1 - z_2\|.$$

En écrivant

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(z_1, w_1) - \mathscr{K}(z_2, w_2) &= (\mathscr{K}_{w_1}|\mathscr{K}_{z_1}) - (\mathscr{K}_{w_2}|\mathscr{K}_{z_2})\\ &= (\mathscr{K}_{w_1} - \mathscr{K}_{w_2}|\mathscr{K}_{z_1}) + (\mathscr{K}_{w_2}|\mathscr{K}_{z_1} - \mathscr{K}_{z_2}),\end{aligned}$$

on obtient

$$|\mathscr{K}(z_1, w_1) - \mathscr{K}(z_2, w_2)| \leqslant \|\mathscr{K}_{z_1}\|\,\|\mathscr{K}_{w_1} - \mathscr{K}_{w_2}\| + \|\mathscr{K}_{w_2}\|\,\|\mathscr{K}_{z_1} - \mathscr{K}_{z_2}\|.$$

En utilisant ce qui précède on en déduit que $\mathscr{K}$ est continu.

II.1.2. Proposition. — *L'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est séparable, et, pour toute base hilbertienne $\{\psi_m\}$ de $\mathscr{H}$,*

$$\mathscr{K}(z, w) = \sum_m \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)},$$

la convergence étant absolue et uniforme sur tout compact de $\Omega \times \Omega$.

Démonstration. — Si $\{z_i\}$ est une suite dense dans Ω, alors $\{\mathscr{K}_{z_i}\}$ est un ensemble total dans $\mathscr{H}$, donc $\mathscr{H}$ est séparable. De la propriété de noyau reproduisant on déduit que

$$(\psi_m|\mathscr{K}_w) = \psi_m(w),$$

et de la formule de Parseval

$$\sum_m |\psi_m(w)|^2 = \|\mathscr{K}_w\|^2 = \mathscr{K}(w, w).$$

Il résulte du lemme de Dini que la convergence est uniforme sur tout compact. De plus

$$\mathscr{K}_w = \sum_m (\mathscr{K}_w|\psi_m)\psi_m = \sum_m \overline{\psi_m(w)}\psi_m,$$

la convergence ayant lieu pour la topologie de $\mathscr{H}$, donc pour la topologie de $\mathscr{O}(\Omega)$: pour tous $z, w \in \Omega$,

$$\mathscr{K}(z, w) = \sum_m \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}.$$

De l'inégalité

$$\Big(\sum_{m=p}^{q} |\psi_m(z)||\psi_m(w)|\Big)^2 \leqslant \sum_{m=p}^{q} |\psi_m(z)|^2 \sum_{m=p}^{q} |\psi_m(w)|^2$$

il résulte que la convergence est absolue et uniforme sur tout compact de $\Omega \times \Omega$. $\square$

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. L'*espace de Bergman* $\mathscr{B}^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur Ω qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ,

$$\mathscr{B}^2(\Omega) = \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{L}^2(\Omega, \lambda),$$

muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\, d\lambda(z).$$

II.1.3. Proposition. — *L'espace de Bergman* $\mathscr{B}^2(\Omega)$ *est un espace hilbertien de fonctions holomorphes.*

Démonstration. — Si f est holomorphe dans un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$, et si le polydisque fermé

$$\overline{D}_r(z) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w_j - z_j| \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

est contenu dans Ω,

$$f(z) = \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} f(w)\, d\lambda(w).$$

C'est la propriété de moyenne (voir la section 1 du chapitre I). À l'aide de l'inégalité de Schwarz on en déduit que

$$|f(z)|^2 \leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} |f(w)|^2\, d\lambda(w).$$

Soit Q un compact contenu dans Ω. Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in Q$, le polydisque $\overline{D}_r(z)$ soit contenu dans Ω. Soit $f \in \mathscr{B}^2(\Omega)$. Pour $z \in Q$,

$$|f(z)|^2 \leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{D_r(z)} |f(w)|^2\, d\lambda(w) \leqslant \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_\Omega |f(w)|^2\, d\lambda(w),$$

ou

$$|f(z)| \leqslant M(Q)\|f\|,$$

avec

$$M(Q) = \frac{1}{(\pi r^2)^{n/2}}.$$

Il en résulte qu'une suite de Cauchy dans $\mathscr{B}^2(\Omega)$ converge uniformément sur tout compact de Ω. Sa limite est une fonction holomorphe de carré intégrable. Ainsi $\mathscr{B}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, et l'inégalité précédente montre que c'est un espace hilbertien de fonctions holomorphes. □

Le noyau reproduisant $\mathscr{K}$ de l'espace de Bergman $\mathscr{B}^2(\Omega)$ s'appelle le *noyau de Bergman* de Ω. Pour toute fonction $f \in \mathscr{B}^2(\Omega)$,

$$f(z) = \int_\Omega \mathscr{K}(z, w) f(w)\, d\lambda(w).$$

Exemple. — Le noyau de Bergman du disque unité de $\mathbb{C}$,

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

est égal à

$$\mathscr{K}(z, w) = \frac{1}{\pi}(1 - z\overline{w})^{-2}.$$

En effet les fonctions

$$\psi_m(z) = \sqrt{\frac{m+1}{\pi}}\, z^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

constituent une base hilbertienne de $\mathscr{B}^2(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \mathscr{K}(z, w) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) z^m \overline{w}^m \\ &= \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}. \end{aligned}$$

Notons

$$|z| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |z_j|, \quad \text{et} \quad \delta(z) = \inf_{w \in \partial D} |z - w|,$$

où $\partial\Omega$ désigne le bord de Ω. De la démonstration de la proposition II.1.3 on déduit que, pour toute fonction $f \in \mathscr{B}^2(\Omega)$,

$$|f(z)| \leqslant \frac{\pi^{-n/2}}{\delta(z)^n} \|f\|,$$

et que

$$\mathscr{K}(z, z) \leqslant \frac{\pi^{-n}}{\delta(z)^{2n}}.$$

Plus généralement on considère les espaces de Bergman pondérés. Soit p une fonction mesurable positive sur Ω, et soit $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions holomorphes f sur Ω telles que

$$\|f\|^2 = \int_\Omega |f(z)|^2 p(z)\, d\lambda(z) < \infty.$$

Supposons que pour tout compact Q de Ω il existe une constante $c > 0$ telle que $p(z) \geqslant c$ pour tout z de Q. Pour tout compact $Q \subset \Omega$ et pour toute fonction $f \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned} \int_Q |f|\, d\lambda &\leqslant \Big(\int_Q \frac{1}{p(z)}\, d\lambda(z)\Big)^{1/2} \Big(\int_Q |f(z)|^2 p(z)\, d\lambda(z)\Big)^{1/2} \\ &\leqslant M(Q) \|f\|. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert et que c'est un espace hilbertien de fonctions holomorphes.

Soient Ω et Ω' deux domaines de $\mathbb{C}^n$, et soit φ un isomorphisme holomorphe de Ω sur Ω', c'est-à-dire une bijection holomorphe ainsi que son inverse. On note $J_\varphi(z)$ la matrice jacobienne de φ en $z \in \Omega$.

II.1.4. Proposition. — *L'application*

$$T_\varphi : f \longmapsto (f\circ\varphi)\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi$$

est un isomorphisme unitaire de $\mathscr{B}^2(\Omega')$ *sur* $\mathscr{B}^2(\Omega)$. *Les noyaux de Bergman* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{K}'$ *de* Ω *et* Ω' *sont reliés par*

$$\mathscr{K}(z,w) = \mathscr{K}'\big(\varphi(z),\varphi(w)\big)\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z)\overline{\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(w)}.$$

Démonstration. — Une matrice complexe carrée $M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ définit un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$. Si $M = A + iB$ $(A, B \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}))$, la matrice de cet endomorphisme est, dans la base de $\mathbb{R}^{2n}$ constituée des vecteurs e_j et ie_j, où $\{e_j\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$,

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

et

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}(A+iB)|^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} J_\varphi(z) = |\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z)|^2$$

et la formule du changement de variable s'écrit comme suit : si F est une fonction intégrable sur Ω',

$$\int_{\Omega'} F(z')\,d\lambda(z') = \int_\Omega F\circ\varphi(z)|\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z)|^2\,d\lambda(z).$$

Par suite, si $f, g \in \mathscr{B}^2(\Omega')$,

$$\int_{\Omega'} f(z')\overline{g(z')}\,d\lambda(z') = \int_\Omega f\big(\varphi(z)\big)\overline{g\big(\varphi(z)\big)}|\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z)|^2\,d\lambda(z).$$

La première partie de l'énoncé s'en déduit.

En effectuant le changement de variable dans l'intégrale

$$f(z') = \int_{\Omega'} \mathscr{K}'(z',w')f(w')\,d\lambda(w'), \quad f \in \mathscr{B}^2(\Omega'),$$

on obtient

$$\begin{aligned} &f\big(\varphi(z)\big)\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z) \\ &\quad= \int_\Omega \mathscr{K}'\big(\varphi(z),\varphi(w)\big)\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z)\overline{\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(w)}f\big(\varphi(w)\big)\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(w)\,d\lambda(w), \end{aligned}$$

et la deuxième partie de l'énoncé s'en déduit. □

Exemple. — Le noyau de Bergman du demi-plan de Poincaré

$$\Omega = \{z = x + iy \mid y > 0\}$$

est égal à

$$\mathscr{K}(z,w) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{z-\overline{w}}{2i}\Big)^{-2}.$$

En effet la transformation de Cayley φ,

$$\varphi(z)=\frac{z-i}{z+i},$$

est un isomorphisme holomorphe de Ω sur le disque unité Ω'. Puisque

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_\varphi(z)=\varphi'(z)=\frac{2i}{(z+i)^2},$$

le noyau de Bergman est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(z,w)&=\frac{1}{\pi}\Big(1-\Big(\frac{z-i}{z+i}\Big)\overline{\Big(\frac{w-i}{w+i}\Big)}\Big)^{-2}\Big(\frac{2i}{(z+i)^2}\Big)\overline{\Big(\frac{2i}{(w+i)^2}\Big)}\\ &=\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{z-\overline{w}}{2i}\Big)^{-2}.\end{aligned}$$

II.1.5. Proposition. — *Soit $\mathscr{K}$ un noyau hermitien de type positif sur un domaine Ω, qui est holomorphe en la première variable. Alors $\mathscr{K}$ est le noyau reproduisant d'un unique espace hilbertien de fonctions holomorphes.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{H}_0$ l'espace des fonctions f de la forme

$$f(z)=\sum_{j=1}^N \alpha_j\mathscr{K}(z,z_j)\quad (z_1,\dots,z_N\in\Omega,\alpha_1,\dots,\alpha_N\in\mathbb{C}).$$

On munit $\mathscr{H}_0$ de la forme hermitienne

$$(f|g)=\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^P\mathscr{K}(w_k,z_j)\alpha_j\overline{\beta}_k,\quad \text{si } g(z)=\sum_{k=1}^P\beta_k\mathscr{K}(z,w_k).$$

Cela en fait un espace préhilbertien. En effet, pour $w\in\Omega$,

$$f(w)=(f|\mathscr{K}_w),$$

et

$$|f(w)|^2\leqslant\mathscr{K}(w,w)(f|f).$$

Par suite, si $(f|f)=0$, alors $f\equiv 0$.

Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert obtenu par complétion de $\mathscr{H}_0$ pour la norme $\|f\|=\sqrt{(f|f)}$. Les éléments de $\mathscr{H}$ sont des fonctions holomorphes sur Ω. En effet, si $\{f_m\}$ est une suite de Cauchy de fonctions de $\mathscr{H}_0$,

$$|f_p(z)-f_q(z)|\leqslant\sqrt{\mathscr{K}(z,z)}\,\|f_p-f_q\|,$$

et la suite converge uniformément sur les compacts. Par continuité l'égalité

$$f(w)=(f|\mathscr{K}_w)$$

reste vraie pour $f\in\mathscr{H}$, donc $\mathscr{K}$ est le noyau reproduisant de $\mathscr{H}$. □

II.2. Espaces hilbertiens invariants de fonctions holomorphes

Soit G un groupe d'automorphismes holomorphes du domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Le groupe G opère dans l'espace $\mathscr{O}(\Omega)$,

$$\big(\pi(g)f\big)(z) = f(g^{-1} \cdot z) \quad (f \in \mathscr{O}(D),\ z \in D),$$

et

$$\pi(g_1 \circ g_2) = \pi(g_1) \circ \pi(g_2).$$

Un espace hilbertien $\mathscr{H}$ de fonctions holomorphes est dit *invariant* par G s'il est invariant par les opérateurs $\pi(g)$ pour tout $g \in G$, et si la restriction de $\pi(g)$ à $\mathscr{H}$ est un opérateur unitaire. Le noyau reproduisant est alors invariant par G dans le sens suivant

$$\mathscr{K}(g \cdot z, g \cdot w) = \mathscr{K}(z, w) \quad (g \in G).$$

Plus généralement l'action de G dans $\mathscr{O}(\Omega)$ peut faire intervenir un *facteur d'automorphie* α. C'est une fonction sur $G \times \Omega$, holomorphe en z, vérifiant la propriété de cocycle

$$\alpha(g_1 g_2, z) = \alpha(g_1, g_2 \cdot z)\, \alpha(g_2, z) \quad (g_1, g_2 \in G, z \in \Omega).$$

Le groupe G opère dans $\mathscr{O}(\Omega)$ comme suit

$$\big(\pi(g)f\big)(z) = \alpha(g^{-1}, z)\, f(g^{-1} \cdot z).$$

Si $\mathscr{H}$ est un espace hilbertien de fonctions holomorphes invariant son noyau reproduisant vérifie la relation

$$\mathscr{K}(z, w) = \mathscr{K}(g \cdot z, g \cdot w)\, \alpha(g, z)\, \overline{\alpha(g, w)}.$$

Par exemple si $\mathscr{H}$ est l'espace de Bergman $\mathscr{B}^2(\Omega)$, et si $G = \mathrm{Aut}(\Omega)$ est le groupe des automorphismes holomorphes de Ω, on considère le facteur d'automorphie

$$\alpha(g, z) = \mathrm{Det}_{\mathbb{C}} J_g(z).$$

Il résulte de la proposition II.1.5 que l'espace $\mathscr{B}^2(\Omega)$ est invariant par $G = \mathrm{Aut}(\Omega)$.

II.2.1. Proposition. — *Soit G un sous-groupe de $Aut(\Omega)$, et soit α un facteur d'automorphie. Soient $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ un sous-espace hilbertien de fonctions holomorphes, et $\mathscr{K}$ son noyau reproduisant. Alors $\mathscr{H}$ est invariant par G si et seulement si*

$$\mathscr{K}(z, w) = \mathscr{K}(g \cdot z, g \cdot w)\, \alpha(g, z)\, \overline{\alpha(g, w)} \quad (z, w \in \Omega,\ g \in G).$$

Démonstration. — Pour $g \in G$ considérons le sous-espace $\mathscr{H}' = \pi(g)(\mathscr{H})$ muni de la norme définie par

$$\|f'\|_1 = \|f\| \quad \text{si } f' = \pi(g)f.$$

Le noyau reproduisant $\mathscr{K}'$ de $\mathscr{H}'$ est donné par

$$\mathscr{K}'(z, w) = \mathscr{K}(g^{-1} \cdot z, g^{-1} \cdot w)\, \alpha(g^{-1}, z)\, \overline{\alpha(g^{-1}, w)}.$$

Ainsi l'énoncé est une conséquence de la proposition II.1.6. □

Deux problèmes se posent naturellement.

(1) Analyser l'action de G dans l'espace hilbertien $\mathscr{H}$, c'est-à-dire décomposer $\mathscr{H}$ en somme de sous-espaces irréductibles.

(2) Déterminer le noyau reproduisant de $\mathscr{H}$.

Pour finir cette section nous allons étudier l'exemple de base suivant. Soit Ω la couronne

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\} \quad (0 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \infty),$$

et soit μ_m ($m \in \mathbb{Z}$) une suite de nombres $\geqslant 0$ telle que, pour $r_1 < r < r_2$,

$$c(r) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{2m}\mu_m < \infty.$$

Soit $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω dont la série de Laurent s'écrit

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m z^m \mu_m,$$

où a_m est une suite de nombres complexes vérifiant

$$\|f\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2\mu_m < \infty.$$

D'après l'inégalité de Schwarz

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m||z|^m\mu_m\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2\mu_m\Big)\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |z|^{2m}\mu_m\Big).$$

La série de Laurent de f converge donc dans Ω et

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{c(r)}\,\|f\|.$$

On en déduit que $\mathscr{H}$ est un espace de fonctions holomorphes. Posons

$$\Lambda = \{m \in \mathbb{Z} \mid \mu_m > 0\}.$$

Les fonctions ψ_m ($m \in \Lambda$),

$$\psi_m(z) = \sqrt{\mu_m}\, z^m,$$

constituent une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et son noyau reproduisant est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(z,w) &= \sum_{m\in\Lambda} \psi_m(z)\overline{\psi_m(w)}\\ &= \sum_{m\in\Lambda} \mu_m z^m \overline{w}^m.\end{aligned}$$

Le groupe G des rotations de centre 0,

$$g_\theta \cdot z = e^{i\theta}z \quad (\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),$$

opère dans $\mathscr{H}$,

$$\big(\pi(g_\theta)f\big)(z) = f(e^{-i\theta}z),$$

et l'espace hilbertien $\mathscr{H}$ est invariant par G.

L'espace de Bergman $\mathscr{H} = \mathscr{B}^2(\Omega)$ en est un exemple. En particulier si Ω est le disque unité pointé, c'est-à-dire si $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, alors $\Lambda = \mathbb{N}$, et, pour $m \geqslant 0$,

$$\mu_m = \frac{m+1}{\pi}.$$

Ainsi toute fonction f de l'espace de Bergman du disque unité pointé Ω se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque unité, et l'espace de Bergman du disque unité pointé est identique à l'espace de Bergman du disque unité.

Nous allons montrer que tout espace hilbertien de fonctions holomorphes sur Ω qui est invariant par G est du type précédent. Soit donc $\mathscr{H}$ un tel espace. Notons $f_m(z) = z^m$. Nous appellerons spectre de $\mathscr{H}$ l'ensemble

$$\Lambda = \{m \in \mathbb{Z} \mid f_m \in \mathscr{H}\}.$$

Pour $m, p \in \Lambda, m \neq p$, les fonctions f_m et f_p sont orthogonales, en effet

$$\begin{aligned}(\pi(g_\theta) f_m | f_p) &= e^{-im\theta}(f_m|f_p) \\ &= e^{-ip\theta}(f_m|f_p),\end{aligned}$$

donc $(f_m|f_p) = 0$ si $m \neq p$. Posons

$$\mu_m = \begin{cases} \dfrac{1}{\|f_m\|^2} & \text{si } m \in \Lambda, \\ 0 & \text{si } m \notin \Lambda. \end{cases}$$

Le développement de Laurent d'une fonction f de $\mathscr{H}$ s'écrit

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m z^m,$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{-i\theta} z) e^{im\theta} d\theta = \alpha_m z^m,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi(g_\theta) f \; e^{im\theta} d\theta = \alpha_m f_m.$$

On en déduit que $\alpha_m f_m \in \mathscr{H}$, donc $\alpha_m = 0$ si $m \notin \Lambda$. Les fonctions ψ_m,

$$\psi_m(z) = \sqrt{\mu_m}\, z^m \quad (m \in \Lambda),$$

constituent une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, et

$$\mathscr{K}(z, z) = \sum_{m \in \Lambda} |z|^{2m} \mu_m < \infty$$

pour tout $z \in \Omega$.

II.3. Espaces hilbertiens de fonctions holomorphes sur un domaine de Reinhardt

Soit $\Omega \subset (\mathbb{C}^*)^n$ un domaine de Reinhardt et soit $G \simeq \mathbb{T}^n$ le groupe des transformations

$$g_\theta \cdot z = (e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n).$$

Le groupe G opère également dans $\mathscr{O}(\Omega)$. Nous allons généraliser l'exemple de base étudié à la fin de la section précédente. Soit μ_α ($\alpha \in \mathbb{Z}^n$) une suite de nombres $\geqslant 0$ tels que, pour $z \in \Omega$,

$$c(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} \mu_\alpha < \infty,$$

et soit $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω dont la série de Laurent s'écrit

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha \mu_\alpha,$$

où a_α est une suite de nombres complexes vérifiant

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |a_\alpha|^2 \mu_\alpha < \infty.$$

On montre comme précédemment que la série de Laurent de f converge dans Ω, et que

$$|f(z)| \leqslant \sqrt{c(z)}\, \|f\|.$$

Ainsi $\mathscr{H}$ est un espace hilbertien de fonctions holomorphes, $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}(\Omega)$. Le *spectre* Λ de $\mathscr{H}$ est défini par

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \mu_\alpha > 0\}.$$

Les fonctions

$$\psi_\alpha(z) = \sqrt{\mu_\alpha}\, z^\alpha \quad (\alpha \in \Lambda)$$

constituent une base hilbertienne de $\mathscr{H}$ et le noyau reproduisant de $\mathscr{H}$ est donné par

$$\mathscr{K}(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} z^\alpha \overline{w}_\alpha \mu_\alpha.$$

De plus l'espace hilbertien $\mathscr{H}$ est invariant par G. On montre comme dans la section précédente que tout sous-espace hilbertien de $\mathscr{O}(\Omega)$ invariant par G est de cette forme.

L'espace de Bergman $\mathscr{B}^2(\Omega)$ en est un exemple. Dans ce cas

$$\Lambda = \Big\{\alpha \in \mathbb{Z}^n \;\Big|\; \int_\Omega |z^\alpha|^2\, d\lambda(z) < \infty\Big\},$$

$$\frac{1}{\mu_\alpha} = \int_\Omega |z^\alpha|^2\, d\lambda(z).$$

Pour calculer ces intégrales on peut utiliser la formule d'intégration suivante

$$\int_\Omega f(z)\, d\lambda(z) = \int_{\Omega_0} r_1 dr_1 \cdots r_n dr_n \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdots d\theta_n f(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}),$$

où $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$.

Si Ω est un domaine de Reinhardt contenant 0, les développements de Laurent sont remplacés par des développements de Taylor, et le spectre Λ d'un sous-espace hilbertien de $\mathscr{O}(\Omega)$ invariant par $\mathbb{T}^n$ est contenu dans $\mathbb{N}^n$.

En particulier si Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |z^\alpha|^2\, d\lambda(z) &= (2\pi)^n \int_{\Omega_0} r_1^{2\alpha_1+1}\cdots r_n^{2\alpha_n+1} dr_1\cdots dr_n \\ &= \pi^n \int_{\{t_j>0, t_1+\cdots+t_n<1\}} t_1^{\alpha_1}\cdots t_n^{\alpha_n} dt_1\cdots dt_n \\ &= \pi^n \frac{\alpha!}{(|\alpha|+n)!}.\end{aligned}$$

Le noyau de Bergman est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(z,w) &= \frac{1}{\pi^n}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(|\alpha|+n)!}{\alpha!} z^\alpha \overline{w}^\alpha \\ &= \frac{1}{\pi^n}\sum_{m=0}^\infty \Big((m+n)! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} z^\alpha\overline{w}^\alpha\Big) \\ &= \frac{1}{\pi^n}\sum_{m=0}^\infty \frac{(m+n)!}{m!}(z|w)^m \\ &= \frac{n!}{\pi^n}\big(1-(z|w)\big)^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

L'*espace de Hardy* $\mathscr{H}^2(\Omega)$ de la boule unité Ω de $\mathbb{C}^n$ est l'espace des fonctions holomorphes sur Ω telles que

$$\|f\|^2 = \sup_{0\leqslant r<1}\int_\Sigma |f(ru)|^2 d\sigma(u) < \infty,$$

où Σ est la sphère unité et σ est la mesure uniforme sur Σ normalisée. Nous allons voir que $\mathscr{H}^2(\Omega)$ est un espace hilbertien de fonctions holomorphes et déterminer son noyau reproduisant. Soit $f\in\mathscr{O}(\Omega)$. D'après le théorème I.3.1,

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha,$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω. Pour $\alpha\neq\beta$,

$$\int_\Sigma u^\alpha \overline{u}^\beta d\sigma(u) = 0,$$

donc

$$\int_\Sigma |f(ru)|^2 d\sigma(u) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} r^{2|\alpha|}|a_\alpha|^2\int_\Sigma |u^\alpha|^2 d\sigma(u).$$

On en déduit que f appartient à $\mathscr{H}^2(\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |a_\alpha|^2 \int_\Sigma |u^\alpha|^2 d\sigma(u) < \infty,$$

et qu'alors

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |a_\alpha|^2 \int_\Sigma |u^\alpha|^2 d\sigma(u).$$

Dans ce cas $\Lambda = \mathbb{N}^n$, et

$$\frac{1}{\mu_\alpha} = \int_\Sigma |u^\alpha|^2 d\sigma(u).$$

Pour le calcul de ces intégrales on utilise la formule d'intégration suivante :

$$\int_\Omega f(z)\, d\lambda(z) = 2\frac{\pi^n}{(n-1)!}\int_0^1 r^{2n-1}dr \int_\Sigma d\sigma(u) f(ru).$$

Pour $f(z) = |z^\alpha|^2$ nous obtenons

$$\int_\Omega |z^\alpha|^2\, d\lambda(z) = 2\frac{\pi^n}{(n-1)!}\int_0^1 r^{2|\alpha|+2n-1}dr \int_\Sigma |u^\alpha|^2 d\sigma(u),$$

et, en utilisant les résultats précédents,

$$\int_\Sigma |u^\alpha|^2 d\sigma(u) = \frac{(n-1)!\alpha!}{(|\alpha|+n-1)!}.$$

Le noyau reproduisant de l'espace de Hardy s'appelle le *noyau de Cauchy-Szegö*. Il est égal à

$$\begin{aligned} S(z,w) &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(|\alpha|+n-1)!}{\alpha!} z^\alpha \overline{w}^\alpha \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=0}^\infty \frac{(m+n-1)!}{m!}(z|w)^m \\ &= \big(1-(z|w)\big)^{-n}. \end{aligned}$$

On en déduit la formule de type Cauchy suivante : si $f \in A(\overline{\Omega})$ (l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, holomorphes dans Ω), alors, pour $z \in \Omega$,

$$f(z) = \int_\Sigma \big((1-(z|u)\big)^{-n} f(u) d\sigma(u).$$

CHAPITRE III
APPLICATION DE LA THÉORIE DE CHOQUET À L'ANALYSE DES ESPACES HILBERTIENS DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Soit Z une variété complexe et soit $\mathscr{O}(Z)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Z muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit G un groupe d'automorphismes holomorphes de Z. L'action de G dans $\mathscr{O}(Z)$ est donnée par

$$\big(\pi(g)f\big)(z) = f(g^{-1}\cdot z).$$

Nous avons vu au chapitre II qu'un sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}(Z)$ possède un noyau reproduisant $\mathscr{K}(z,w)$ qui est une fonction holomorphe en z et antiholomorphe en w. De plus $\mathscr{H}$ est invariant par G si et seulement si son noyau reproduisant $\mathscr{K}$ est invariant,

$$\mathscr{K}(g \cdot z, g \cdot w) = \mathscr{K}(z,w).$$

Dans ce chapitre nous allons montrer que la théorie de la représentation intégrale de Choquet peut être utilisée pour analyser un tel sous-espace hilbertien. Plus précisément nous allons considérer les questions suivantes :

(1) Déterminer les sous-espaces hilbertiens invariants irréductibles.

(2) Décomposer un tel sous-espace hilbertien en somme directe (ou intégrale directe) de sous-espaces hilbertiens irréductibles.

(3) Donner une condition géométrique qui implique que cette décomposition soit sans multiplicité.

(4) Déterminer le noyau reproduisant d'un tel sous-espace hilbertien.

Au chapitre V nous étudierons un exemple d'une telle situation : la variété Z sera un domaine dans la complexification d'un espace symétrique compact U/K qui est invariant par le groupe U.

III.1. La théorie de Choquet

Soit Γ un cône convexe fermé dans un espace vectoriel topologique E localement convexe. Un élément $\gamma \in \Gamma$ est dit *extrémal* s'il n'admet pas de décomposition non triviale comme somme de deux éléments de Γ : si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ $(\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma)$, alors $\gamma_1 = \lambda_1\gamma, \gamma_2 = \lambda_2\gamma$ $(\lambda_1, \lambda_1 \geqslant 0)$. Cette propriété s'exprime aussi comme suit : $\gamma \in \Gamma$ est extrémal si et seulement si l'inégalité $0 \leqslant \gamma' \leqslant \gamma$ $(\gamma' \in \Gamma)$ pour l'ordre défini par le cône Γ, c'est-à-dire si $\gamma - \gamma' \in \Gamma$, implique que $\gamma' = \lambda\gamma$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Les éléments extrémaux de Γ constituent un sous-cône noté $\operatorname{ext}(\Gamma)$ (non convexe).

Un *chapeau* de Γ est une partie compacte convexe C de Γ telle $\Gamma \smallsetminus C$ soit convexe. Un élément extrémal d'un chapeau C de Γ est un élément extrémal de Γ. Le cône Γ est dit *bien coiffé* s'il est réunion de ses chapeaux. Un sous-cône fermé d'un cône bien coiffé est bien coiffé.

Exemple. — Soit $E = \mathscr{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes dans

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}, \quad (R \leqslant \infty),$$

muni de la convergence uniforme sur les compacts. Une fonction $f \in E$ s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit Γ le cône des fonctions f pour lesquelles $a_n \geqslant 0$. Si a est une fonction continue > 0 sur $[0, R[$, posons

$$C_a = \Big\{ f \in \Gamma \;\Big|\; \int_0^R f(r)a(r)rdr \leqslant 1 \Big\}.$$

Nous allons montrer que C_a est un chapeau. Il est clair que C_a et $\Gamma \smallsetminus C_a$ sont convexes, et C_a est fermé d'après le lemme de Fatou. Montrons que C_a est borné. Si $f \in C_a$, pour $0 \leqslant r < R$,

$$\begin{aligned}\int_{D(0,r)} |f(z)|\, d\lambda(z) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta \\ &\leqslant \frac{2\pi}{A} \int_0^R f(\rho)a(\rho)\rho d\rho,\end{aligned}$$

où $A = \min_{0\leqslant\rho\leqslant r} a(\rho)$. Ceci montre que C_a est borné. Étant fermé et borné, C_a est compact d'après le théorème de Montel (théorème I.2.2).

Dans les énoncés qui suivent nous supposons que E est un espace de Fréchet. Il s'agit d'une version simplifiée de résultats plus généraux établis par E. Thomas, qu'on peut trouver dans [**Tho79, Tho83, Tho94**].

III.1.1. Théorème. — *Soit Γ un cône convexe fermé dans un espace de Fréchet. Si Γ est bien coiffé alors Γ est égal à l'enveloppe convexe fermée de* $\mathrm{ext}(\Gamma)$.

Une application $\lambda \mapsto e_\lambda$ d'un espace topologique séparé Λ dans $\mathrm{ext}(\Gamma)$ est appelée une *paramétrisation* de $\mathrm{ext}(\Gamma)$ si tout élément $\gamma \in \mathrm{ext}(\Gamma)$ est proportionnel à un unique élément e_λ. Elle est dite *admissible* si elle est continue et si l'application inverse $\mathrm{ext}(\Gamma) \to \Lambda$ est universellement mesurable.

III.1.2. Théorème. — *Soit Γ un cône convexe fermé bien coiffé dans un espace de Fréchet, et soit $\lambda \mapsto e_\lambda$, $\Lambda \to \mathrm{ext}(\Gamma)$ une paramétrisation admissible de $\mathrm{ext}(\Gamma)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe une mesure de Radon positive μ sur Λ telle que*

$$\gamma = \int_\Lambda e_\lambda d\mu(\lambda).$$

Cela signifie que, pour toute forme linéaire continue ℓ sur E,

$$\int_\Lambda |\ell(e_\lambda)| d\mu(\lambda) < \infty, \quad \text{et} \quad \ell(\gamma) = \int_\Lambda \ell(e_\lambda) d\mu(\lambda).$$

Le cône Γ est dit *réticulé* si, pour deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, il existe un plus petit majorant $\gamma_1 \vee \gamma_2$ de γ_1 et γ_2 (pour l'ordre défini par le cône). Pour $a \in \Gamma$ on note Γ^a la face du cône Γ définie par :

$$\Gamma^a = \{\gamma \in \Gamma \mid \exists\, \lambda \geqslant 0,\ \gamma \leqslant \lambda a\} = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \Big(\Gamma \cap (\lambda a - \Gamma)\Big).$$

L'ordre propre de Γ^a coïncide avec l'ordre induit par Γ. Le cône Γ est réticulé si et seulement si, pour tout a, le cône Γ^a est réticulé.

III.1.3. Théorème. — *Pour que la mesure μ qui représente γ soit unique il faut et suffit que la face Γ^γ soit réticulée. En particulier, pour que la mesure μ soit unique quel que soit $\gamma \in \Gamma$, il faut et suffit que le cône Γ soit réticulé.*

Références. — [**Phe66**], [**Tho79, Tho83, Tho94**].

III.2. Application de la théorie de Choquet

Soit $\Gamma(Z)$ le cône des noyaux hermitiens $\mathscr{K}(z,w)$ de type positif sur Z, holomorphes en z, antiholomorphes en w. On notera $\Gamma_G(Z)$ le cône des noyaux de $\Gamma(Z)$ qui sont invariants. Un tel noyau est une fonction holomorphe sur $Z \times \overline{Z}$, où $\overline{Z}$ est la variété Z munie de la structure complexe opposée. On peut donc considérer les cônes $\Gamma(Z)$ et $\Gamma_G(Z)$ comme plongés dans l'espace vectoriel topologique $\mathscr{O}(Z \times \overline{Z})$,

$$\Gamma_G(Z) \subset \Gamma(Z) \subset \mathscr{O}(Z \times \overline{Z}).$$

On peut étendre les résultats établis aux chapitres I et II : l'espace $\mathscr{O}(Z \times \overline{Z})$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est un espace de Fréchet qui possède la propriété de Montel : tout fermé borné est compact. L'application qui à un sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H}$ associe son noyau reproduisant $\mathscr{K}$ est une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hilb}\big(\mathscr{O}(Z)\big)$ des sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{O}(Z)$ sur $\Gamma(Z)$, et de l'ensemble $\mathrm{Hilb}_G\big(\mathscr{O}(Z)\big)$ des sous-espaces hilbertiens invariants sur $\Gamma_G(Z)$. L'ensemble $\mathrm{Hilb}\big(\mathscr{O}(Z)\big)$ possède une structure naturelle de cône convexe : la somme $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ de deux sous-espaces hilbertiens est définie comme la somme vectorielle habituelle, muni de la norme quotient de $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 / (\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2)$. En particulier si $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$, la somme est directe et est notée $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$, et les espaces $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont des sous-espaces orthogonaux fermés de $\mathscr{H}$. Pour $\lambda \geqslant 0$ on définit l'espace $\lambda\mathscr{H}$ comme étant $\{0\}$ si $\lambda = 0$, et sinon égal à $\mathscr{H}$ muni du produit scalaire de $\mathscr{H}$ divisé par λ. On vérifie alors facilement que l'application qui à un sous-espace hilbertien $\mathscr{H}$ associe son noyau reproduisant $\mathscr{K}$ respecte les structures de cône de $\mathrm{Hilb}\big(\mathscr{O}(Z)\big)$ et de $\Gamma(Z)$: si $\mathscr{K}_1$ est le noyau reproduisant de $\mathscr{H}_1$, et $\mathscr{K}_2$ celui de $\mathscr{H}_2$, alors le noyau reproduisant de $\mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ est égal à $\mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2$. Si $\mathscr{K}$ est le noyau reproduisant de $\mathscr{H}$, alors celui de $\lambda\mathscr{H}$ est égal à $\lambda\mathscr{K}$.

III.2.1. Proposition. — *Le sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H}$ est irréductible si et seulement si son noyau reproduisant est un élément extrémal du cône $\Gamma_G(Z)$.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ deux sous-espaces hilbertiens invariants et $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ leurs noyaux reproduisants. Supposons que $\mathscr{K}_1 \leqslant \mathscr{K}_2$, c'est-à-dire que $\mathscr{K}_2 - \mathscr{K}_1 \in \Gamma_G(Z)$. Alors $\mathscr{H}_1$ est un sous-espace de $\mathscr{H}_2$ et l'injection $i : \mathscr{H}_1 \hookrightarrow \mathscr{H}_2$ est continue, de norme $\leqslant 1$, et G-équivariante. Notons $i^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ son adjoint. L'opérateur $i \circ i^* : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_2$ est aussi G-équivariant.

Supposons que $\mathscr{H}_2$ soit irréductible. D'après le lemme de Schur $i \circ i^*$ est un multiple de l'identité, et, si $\mathscr{H}_2 \neq \{0\}$, alors $\mathscr{H}_1$ est égal à $\mathscr{H}_2$ comme espace vectoriel, et son produit scalaire est proportionnel à celui de $\mathscr{H}_2$, donc $\mathscr{K}_1$ est proportionnel à $\mathscr{K}_2$, c'est-à-dire que $\mathscr{K}_2$ est extrémal. (Pour une démonstration du lemme de Schur utilisé ici, voir par exemple [**Sug90**], Theorem 2.1, p. 11.)

Réciproquement supposons que le noyau reproduisant $\mathscr{K}$ d'un sous-espace hilbertien $\mathscr{H}$ soit extrémal. Si $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ est une décomposition de $\mathscr{H}$ en somme de deux sous-espaces invariants fermés orthogonaux, alors $\mathscr{K}$ est égal à la somme de leurs noyaux reproduisants, $\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2$. Le noyau $\mathscr{K}$ étant extrémal, $\mathscr{K}_i = \lambda_i \mathscr{K}$ ($\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$), donc $\mathscr{H}_i$ est soit égal à $\mathscr{H}$, soit réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que $\mathscr{H}$ est irréductible. □

Soit ρ une mesure positive sur Z qui, dans chaque carte, a une densité strictement positive par rapport à la mesure de Lebesgue. La topologie de $\mathscr{O}(Z)$ est identique à celle qui est induite par celle de $L^2_{\mathrm{loc}}(Z, \rho)$. En effet pour tout compact $Q \subset Z$ et pour tout voisinage ouvert ω de Q relativement compact il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{z \in Q} |f(z)| \leqslant M \Big(\int_\omega |f(z)|^2 d\rho(z) \Big)^{1/2} \qquad \big(f \in \mathscr{O}(Z)\big).$$

Il suffit de le montrer lorsque ω est contenu dans une carte, et alors cela résulte de ce qui a été dit dans la section 1 du chapitre I.

III.2.2. Proposition. — *Le cône* $\Gamma(Z)$ *est bien coiffé.*

Démonstration. — Soit a une fonction continue strictement positive sur Z. L'ensemble

$$C_a = \Big\{ \mathscr{K} \in \Gamma(Z) \ \Big| \ \int_Z \mathscr{K}(z,z) a(z) d\rho(z) \leqslant 1 \Big\}$$

est un chapeau. En effet C_a est fermé d'après le lemme de Fatou. Si $\omega \subset Z$ est un ouvert relativement compact, il existe une constante $A > 0$ telle que $a(z) \geqslant A$ sur ω. Si le noyau $\mathscr{K}$ appartient à C_a, alors, de l'inégalité $|\mathscr{K}(z,w)|^2 \leqslant \mathscr{K}(z,z)\mathscr{K}(w,w)$ on déduit que

$$\int_\omega \int_\omega |\mathscr{K}(z,w)|^2 d\rho(z) d\rho(w) \leqslant \int_\omega \mathscr{K}(z,z) d\rho(z) \int_\omega \mathscr{K}(w,w) d\rho(w) \leqslant \frac{1}{A^2}.$$

Cette inégalité montre que C_a est borné dans l'espace vectoriel topologique $\mathscr{O}(Z \times \overline{Z})$. Étant fermé et borné l'ensemble C_a est compact (propriété de Montel, Théorème I.2.2). Puisque C_a et $\Gamma(Z) \smallsetminus C_a$ sont convexes, C_a est un chapeau de $\Gamma(Z)$.

Il reste à montrer que tout noyau $\mathscr{K}$ de $\Gamma(Z)$ appartient à un tel chapeau. Soit h une fonction continue strictement positive sur Z telle que

$$\int_Z h(z) d\rho(z) = 1,$$

et posons

$$a(z) = \frac{h(z)}{\mathscr{K}(z,z) + 1}.$$

Alors le noyau $\mathscr{K}$ appartient au chapeau C_a. □

Le cône $\Gamma_G(Z)$ est également bien coiffé. En effet les ensembles $C_a \cap \Gamma(Z)$ sont des chapeaux de $\Gamma_G(Z)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème III.1.2.

III.2.3. Théorème. — *Soit* $\lambda \mapsto \mathscr{K}_\lambda$, $\Lambda \to \operatorname{ext}\big(\Gamma_G(Z)\big)$, *une paramétrisation admissible de* $\operatorname{ext}\big(\Gamma_G(Z)\big)$. *Pour tout noyau* $\mathscr{K} \in \Gamma_G(Z)$ *il existe une mesure de Radon* μ *sur* Λ *telle que*

$$\mathscr{K}(z,w) = \int_\Lambda \mathscr{K}_\lambda(z,w)d\mu(\lambda).$$

La mesure μ définit un noyau $\mathscr{K} \in \Gamma_G(Z)$ si et seulement si, pour tout compact $Q \subset Z$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\int_\Lambda \mathscr{K}_\lambda(z,z)d\mu(\lambda) \leqslant M \qquad (z \in Q).$$

Si $\mathscr{H}$ est un sous-espace hilbertien invariant la restriction de π à $\mathscr{H}$ est une représentation unitaire qu'on notera $\pi^{\mathscr{H}}$. Le commutant de $\pi^{\mathscr{H}}$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ sera noté $\{\pi^{\mathscr{H}}\}'$. C'est l'algèbre définie par

$$\{\pi^{\mathscr{H}}\}' = \{T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) \mid \forall\, g \in G,\ T\pi^{\mathscr{H}}(g) = \pi^{\mathscr{H}}(g)T\}.$$

III.2.4. Théorème. — *Le cône* $\Gamma_G(Z)$ *est réticulé si et seulement si, pour tout* $\mathscr{H} \in \operatorname{Hilb}_G\big(\mathscr{O}(Z)\big)$, *le commutant* $\{\pi^{\mathscr{H}}\}'$ *est commutatif.*

Démonstration. — Pour un noyau $\mathscr{K} \in \Gamma_G(Z)$ on note

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mathscr{K}} = \Gamma_G(Z)^{\mathscr{K}} &= \{\mathscr{K}' \in \Gamma_G(Z) \mid \exists\, \lambda \geqslant 0,\ \mathscr{K}' \leqslant \lambda\mathscr{K}\}\\ &= \bigcup_{\lambda \geqslant 0}\Big(\Gamma_G(Z) \cap \big(\lambda\mathscr{K} - \Gamma_G(Z)\big)\Big).\end{aligned}$$

Le cône $\Gamma_G(Z)$ est réticulé si et seulement si, pour tout $\mathscr{K}$, le cône $\Gamma_G(Z)^{\mathscr{K}}$ est réticulé.

Soient $\mathscr{H}$ un sous-espace hilbertien invariant et $\mathscr{K}$ son noyau reproduisant. Notons $\mathscr{A} = \{\pi^{\mathscr{H}}\}'$.

(a) *Le cône* $\Gamma^{\mathscr{K}}$ *est linéairement isomorphe au cône*

$$\mathscr{A}^+ = \{T \in \mathscr{A} \mid \forall\, f \in \mathscr{H}\ (Tf|f) \geqslant 0\ \}.$$

À tout opérateur $T \in \mathscr{A}^+$ on associe le noyau reproduisant $\mathscr{K}_T$ défini par

$$\mathscr{K}_T(z,w) = (T\mathscr{K}_w)(z).$$

On montre que $\mathscr{K}_T$ appartient à $\Gamma^{\mathscr{K}}$ et que l'application $T \mapsto \mathscr{K}_T$ est un isomorphisme linéaire de cônes.

(b) *Le cône* $\mathscr{A}^+$ *est réticulé si et seulement si l'algèbre* $\mathscr{A}$ *est commutative*

Supposons $\mathscr{A}$ commutative. Alors $\mathscr{A}$ est une C^*-algèbre commutative, donc isomorphe à l'espace des fonctions continues sur son spectre S qui est compact, $\mathscr{A} \simeq \mathscr{C}(S)$, et le cône $\mathscr{A}^+$ est linéairement isomorphe au cône des fonctions $\geqslant 0$ de $\mathscr{C}(S)$ qui est réticulé, donc $\mathscr{A}^+$ est réticulé.

Réciproquement supposons que le cône $\mathscr{A}^+$ soit réticulé. Pour montrer que l'algèbre $\mathscr{A}$ est commutative il suffit de montrer que deux projecteurs orthogonaux P et Q de $\mathscr{A}$ commutent. Posons $T = P \wedge Q$ (relativement à l'ordre défini par $\mathscr{A}^+$), et soit R le projecteur orthogonal sur $\overline{T(\mathscr{H})}$. Alors R appartient à $\mathscr{A}^+$, et, puisque $(T(\mathscr{H}))^\perp = \ker(T)$, $T \leqslant R$. De plus $R \leqslant P$ et $R \leqslant Q$, donc $T = R$. Posons $P_1 = P - R$, $Q_1 = Q - R$, alors $P_1 \wedge Q_1 = 0$ et $P_1 + Q_1 = P_1 \vee Q_1 \leqslant I$, et donc $P_1 \leqslant I - Q_1$. Ceci montre que P_1 et Q_1 sont des projecteurs orthogonaux sur des sous-espaces orthogonaux. En particulier $P_1Q_1 = Q_1P_1$, c'est-à-dire que $(P-R)(Q-R) = (Q-R)(P-R)$. En développant et en tenant compte de ce que $PR = RP$, et de ce que $QR = RQ$, on en déduit que $PQ = QP$. □

En conséquence des théorèmes III.1.3 et III.2.4 nous pouvons énoncer

III.2.5. Théorème. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *Pour tout noyau $\mathscr{K} \in \Gamma_G(Z)$ la mesure μ est unique.*

(b) *Le cône $\Gamma_G(Z)$ est réticulé.*

(c) *Pour tout sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}(Z)$, le commutant $\{\pi^{\mathscr{H}}\}'$ est commutatif.*

On peut ajouter deux propriétés équivalentes à (a), (b), (c) :

(d) Tout sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H}$ admet une décomposition unique en une intégrale hilbertienne directe,

$$\mathscr{H} = \int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}_\lambda d\mu(\lambda),$$

où $\mathscr{H}_\lambda$ est le sous-espace hilbertien irréductible associé au noyau reproduisant extrémal $\mathscr{K}_\lambda$.

(e) Deux sous-espaces hilbertiens invariants irréductibles $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ de $\mathscr{O}(Z)$ soit coïncident comme espaces vectoriels et ont alors des produits scalaires proportionnels, soit les représentations $\pi^{\mathscr{H}_1}$ et $\pi^{\mathscr{H}_2}$ sont inéquivalentes.

De plus, sous ces conditions, pour tout sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H}$, l'algèbre $\mathscr{A} = \{\pi^{\mathscr{H}}\}'$ est égale à l'algèbre des opérateurs diagonaux relativement à l'intégrale hilbertienne directe de (d).

Si ces conditions sont satisfaites, nous dirons que l'action de G dans $\mathscr{O}(Z)$ est *sans multiplicité*.

Nous allons donner une condition géométrique simple qui implique que l'action de G dans $\mathscr{O}(Z)$ est sans multiplicité :

(H) *Il existe un automorphisme involutif antiholomorphe*

$$\tau : Z \longrightarrow Z,$$

tel que, pour tout $z \in Z$, il existe $g \in G$ pour lequel

$$\tau(z) = g \cdot z.$$

III.2.6. Théorème. — *Sous l'hypothèse (H) l'action de G dans $\mathscr{O}(Z)$ est sans multiplicité.*

Démonstration. — Nous allons montrer que la propriété (c) a lieu. Pour $f \in \mathscr{O}(Z)$ posons

$$Jf(z) = \overline{f\big(\tau(z)\big)}.$$

Remarquons que la fonction Jf est holomorphe, donc que J est un automorphisme antilinéaire de $\mathscr{O}(Z)$. Considérons un sous-espace hilbertien invariant $\mathscr{H}$ de noyau reproduisant $\mathscr{K}$, et soit $\mathscr{A} = \{\pi^{\mathscr{H}}\}'$. Le noyau reproduisant $\widetilde{\mathscr{K}}$ du sous-espace $\widetilde{\mathscr{H}} = J(\mathscr{H})$ est

$$\widetilde{\mathscr{K}}(z,w) = \mathscr{K}\big(\tau(w),\tau(z)\big).$$

Nous allons montrer que, si $\mathscr{H}$ est invariant, alors $\widetilde{\mathscr{K}} = \mathscr{K}$. Soit $z \in Z$. Sous l'hypothèse (H) il existe $g \in G$ tel que $\tau(z) = g \cdot z$. Donc

$$\widetilde{\mathscr{K}}(z,z) = \mathscr{K}\big(\tau(z),\tau(z)\big) = \mathscr{K}(g \cdot z, g \cdot z) = \mathscr{K}(z,z),$$

puisque $\mathscr{K}$ est invariant. Il en résulte que, pour tous $z, w \in Z$, $\widetilde{\mathscr{K}}(z,w) = \mathscr{K}(z,w)$, c'est en effet une conséquence du théorème I.1.2, et la restriction de J à $\mathscr{H}$ est un automorphisme isométrique antilinéaire.

Si A est un opérateur autoadjoint positif appartenant à $\mathscr{A}$, alors le produit scalaire

$$(f_1|f_2)_A = (Af_1|f_2)$$

définit un sous-espace hilbertien $\mathscr{H}_A$ contenant $\mathscr{H}$ qui est invariant, et $J(\mathscr{H}_A) = \mathscr{H}_A$. Ceci se traduit par $JAJ^{-1} = A$. Un opérateur $B \in \mathscr{A}$ se décompose en $B = A_1 + iA_2$, où A_1 et A_2 sont deux opérateurs autoadjoints de $\mathscr{A}$. De ce qui précède et du fait que J est antilinéaire il résulte que

$$JBJ^{-1} = A_1 - iA_2 = B^*.$$

Finalement, si $B, C \in \mathscr{A}$,

$$BC = J^{-1}(BC)^*J = J^{-1}C^*B^*J = J^{-1}C^*JJ^{-1}B^*J = CB. \qquad \square$$

Exemples

a) $Z = D$ est le disque de Siegel

$$D = \{z \in \mathrm{Sym}(m,\mathbb{C}) \mid I - z\overline{z} \gg 0\},$$

et $G = \mathrm{U}(n)$ agissant sur Z par

$$g \cdot z = gzg^T.$$

L'action de G dans $\mathscr{O}(D)$ est sans multiplicité. Pour le voir on peut appliquer le théorème VI.2.6 en considérant la conjugaison τ suivante

$$\tau(z) = \overline{z},$$

et en utilisant le fait que toute matrice symétrique complexe z s'écrit

$$z = gdg^T,$$

où $g \in \mathrm{U}(n)$, et d est une matrice diagonale ayant des coefficients diagonaux $\geqslant 0$.

b) $Z = T_\Omega$ est le demi-espace de Siegel,

$$T_\Omega = \{z \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{C}) \mid \Im z \gg 0\},$$

et $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ agissant par

$$g \cdot z = gzg^T.$$

L'action de G dans $\mathscr{O}(T_\Omega)$ est sans multiplicité. On peut le voir en considérant la conjugaison définie par

$$\tau(z) = \overline{z}^{-1}.$$

Références. — [**Tho79, Tho83, Tho94**], [**FT99**], [**Kob97**].

CHAPITRE IV
ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS

Nous présentons dans ce chapitre les propriétés de base des espaces symétriques compacts, et de leur complexification, en vue d'étudier au chapitre suivant des espaces de fonctions holomorphes sur un domaine d'une telle complexification. Il s'agit de résultats classiques pour la plupart, que l'on peut trouver dans [**Hel84**] ou dans [**Tak94**].

IV.1. Paire symétrique compacte

Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G. On dit que (G, H) est une paire symétrique s'il existe un automorphisme involutif θ de G tel que

$$(G^\theta)_0 \subset H \subset G^\theta,$$

où

$$G^\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\},$$

et $(G^\theta)_0$ est la composante connexe neutre de G^θ. Nous considérons dans ce chapitre une paire symétrique compacte (U, K). On suppose que U est un groupe de Lie compact et connexe. On note $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de U et K,

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta(X) = X\}.$$

L'espace symétrique compact associé à la paire symétrique (U, K) est l'espace quotient $\mathscr{X} = U/K$. On notera o le point de base : $o = eK \in \mathscr{X}$.

Le groupe U, étant compact, admet une représentation fidèle de dimension finie. Ainsi, si N est la dimension de cette représentation, on peut supposer que U est un sous-groupe fermé du groupe unitaire $\mathrm{U}(N)$. On montre que l'ensemble

$$U_{\mathbb{C}} = \{g = u \exp iX \mid g \in U,\ X \in \mathfrak{u}\}$$

est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$. Notons que, pour $g \in U_{\mathbb{C}}$, il existe $u \in U$ et $X \in \mathfrak{u}$ uniques tels que

$$g = u \exp iX.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ de $U_{\mathbb{C}}$ est la complexifiée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$,

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u},$$

et $U_{\mathbb{C}}$ est une sous-variété complexe de $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$, c'est la complexification du groupe de Lie compact U. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{M}(N, \mathbb{C})$ sera munie du produit scalaire hermitien

$$(X|Y) = \mathrm{tr}(XY^*).$$

($\mathrm{M}(N, \mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices complexes $N \times N$.) L'involution θ se prolonge en une involution holomorphe de $U_{\mathbb{C}}$, que nous noterons aussi θ. Si $g = u \exp iX$ ($u \in U$, $X \in \mathfrak{u}$), alors

$$\theta(g) = \theta(u) \exp i d\theta(X).$$

Posons

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{u} \mid d\theta(X) = -X\},$$

alors

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

et tout élément $u \in U$ s'écrit

$$u = k \exp X \qquad (k \in K,\ X \in \mathfrak{p}).$$

Cette écriture n'est en général pas unique. Un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ pour la paire symétrique (U, K) est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$. L'ensemble $A = \exp \mathfrak{a}$ est un sous-groupe abélien connexe fermé de U. Notons que $K \cap A$ est un sous-groupe fini et que $K \cap A = \exp \Gamma$, où Γ est le réseau contenu dans $\mathfrak{a}$ défini par

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{a} \mid \exp H \in K\}.$$

On montre que

$$K = K_0 \exp \Gamma.$$

(K_0 désigne la composante connexe neutre de K.) Si $K = U^\theta$ alors

$$\Gamma = \{\tfrac{1}{2} H \mid H \in \mathfrak{a},\ \exp H = e\}.$$

Le *tore maximal* A_0 *de l'espace symétrique* $\mathscr{X} = U/K$ est défini par

$$A_0 = \{\exp H \cdot o \mid H \in \mathfrak{a}\} \simeq \mathfrak{a}/\Gamma.$$

Soient M le centralisateur de A dans K, et M' son normalisateur. Le quotient $W = M'/M$ est un sous-groupe fini appelé groupe de Weyl de la paire symétrique (U, K).

On montre que l'ensemble $G = K \exp i\mathfrak{p}$ est un sous-groupe fermé de $U^{\mathbb{C}}$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est égale à

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p},$$

et la composante connexe neutre de G est

$$G_0 = K_0 \exp i\mathfrak{p}.$$

Pour $g \in G$,

$$\theta(g) = g^{*-1},$$

et (G, K) est une paire symétrique relativement à la restriction de l'involution θ à G. Le groupe $G \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ est un *groupe de Lie linéaire réel réductif*, c'est-à-dire que

(i) G est fermé,

(ii) Si $g \in G$, alors g^* appartient à G aussi,

(iii) Si $X \in \mathrm{M}(N, \mathbb{C})$ est une matrice hermitienne, et si $\exp X \in G$, alors $X \in \mathfrak{g}$.

L'ensemble $i\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan pour la paire symétrique (G, K). On notera $\underline{A} = \exp i\mathfrak{a} \subset G$ le sous-groupe de Cartan correspondant.

Si α est une forme linéaire sur $i\mathfrak{a}$, on pose

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in i\mathfrak{a},\ [H, X] = \alpha(H)X\}, \quad m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha.$$

Si $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$, la forme α est appelée *racine restreinte*. On notera $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}) = \Delta(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le système des racines restreintes. Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}$ contenant $\mathfrak{a}$. Le système Δ est l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ des racines du système $\Delta(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ n'est pas nulle, et m_α est le nombre de racines de $\Delta(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ dont α est la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

Si U est simplement connexe on montre que U^θ est connexe et que

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \Delta,\ \alpha(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}\}.$$

On choisit un système positif Δ^+ et on pose

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha,\ \ N = \exp \mathfrak{n}.$$

On notera $(i\mathfrak{a})_+$ la chambre de Weyl positive associée,

$$(i\mathfrak{a})_+ = \{H \in i\mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \Delta^+,\ \alpha(H) > 0\}.$$

Le groupe réductif G et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admettent les décompositions d'Iwasawa suivantes

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{a} + \mathfrak{n}, \quad G = K\underline{A}N.$$

Nous utiliserons la forme faible suivante de la décomposition de Bruhat. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en

$$\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}} + \mathfrak{m} + i\mathfrak{a} + \mathfrak{n} \quad (\overline{\mathfrak{n}} = \textstyle\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}),$$

et l'ensemble $\overline{N}M\underline{A}N$ est un ouvert dense de G ($\overline{N} = \exp \overline{\mathfrak{n}}$).

Rappelons que $\mathscr{X}$ désigne l'espace symétrique qui est l'espace quotient U/K. Nous noterons π la projection canonique $\pi : U \to U/K$. On note $d\pi$ sa différentielle en e, que nous identifierons à la projection de $\mathfrak{u}$ sur $\mathfrak{p}$. Tout $X \in \mathfrak{p}$ s'écrit

$$X = \mathrm{Ad}(k)H \qquad (k \in K,\ H \in \mathfrak{a}),$$

et tout $x \in \mathscr{X}$

$$x = k \cdot a_0,$$

où $k \in K$ et $a_0 \in A_0$. Notons que cette écriture n'est pas unique. À cette décomposition correspond la formule d'intégration suivante. Soit m_0 une mesure sur $\mathscr{X}$ invariante par U.

IV.1.1. Théorème. — *Soit f une fonction intégrable sur $\mathscr{X}$.*

$$\int_{\mathscr{X}} f(x)\, dm_0(x) = c_0 \int_K \int_{\mathfrak{a}/\Gamma} f(k \exp H \cdot o)\, dk\, J_0(H)\, dH,$$

où

$$J_0(H) = \Big| \prod_{\alpha \in \Delta^+} \big(\sin\langle \alpha, iH\rangle\big)^{m_\alpha} \Big|,$$

et c_0 est une constante positive.

Nous supposerons dans la suite que la mesure m_0 est normalisée, c'est-à-dire de masse totale égale à un.

Démonstration

(a) Pour $k \in K$, $a \in A$, le point $\varphi(k,a) = ka \cdot o$ ne dépend que de la classe kM :

$$\varphi(km, a) = \varphi(k,a) \qquad (m \in M),$$

et nous pouvons considérer φ comme application

$$\varphi : K/M \times A \longrightarrow \mathscr{X}.$$

Nous allons calculer la différentielle de φ. Soit $\mathfrak{l}$ l'orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$,

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l},$$

et soit $\mathfrak{q}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}$,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{q}.$$

On peut identifier l'espace tangent à K/M en eM à l'espace $\mathfrak{l}$, et en kM à $k\mathfrak{l}$. Fixons kM et a. Pour $X \in \mathfrak{l}$,

$$\begin{aligned}(D\varphi)_{(kM,a)}(kX, 0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(k \exp tX, a)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} k \exp tX a \cdot o\\ &= ka \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp\big(t\,\mathrm{Ad}(a^{-1})X\big) \cdot o\\ &= ka\, \mathrm{Ad}(a^{-1})X \cdot o.\end{aligned}$$

Par suite
$$(D\varphi)_{(kM,a)}(kX,0) = ka\ d\pi \circ Ad(a^{-1})X \cdot o.$$
D'autre part
$$(D\varphi)_{(kM,a)}(0,aH) = kaH \cdot o.$$
Finalement
$$(D\varphi)_{(kM,a)}(kX,aH) = ka\ \big(d\pi \circ \mathrm{Ad}(a^{-1})X + H\big) \cdot o.$$

(b) Soit ω une forme différentielle sur $\mathscr{X}$ de degré $n = \dim \mathscr{X}$ invariante par U. Soient $X_1, \ldots, X_\ell \in \mathfrak{l}$, $H_1, \ldots, H_r \in \mathfrak{a}$, alors
$$\begin{aligned}
&(\varphi^*\omega)_{(kM,a)}(kX_1, \ldots, kX_\ell, aH_1, \ldots, aH_r)\\
&\qquad = \omega_{ka\cdot a}\big((D\varphi)_{(kM,a)}(kX_1), \ldots, (D\varphi)_{(kM,a)}(kX_\ell),\\
&(D\varphi)_{(kM,a)}(aH_1), \ldots, (D\varphi)_{(kM,a)}(aH_r)\big)\\
&\qquad = \omega_{ka\cdot o}\big(ka\ d\pi \circ \mathrm{Ad}(a^{-1})X_1, \ldots, ka\ d\pi \circ \mathrm{Ad}(a^{-1})X_\ell, kaH_1, \ldots, kaH_r\big),
\end{aligned}$$
et, la forme ω étant invariante par U,
$$= \omega_o\big(d\pi \circ \mathrm{Ad}(a^{-1})X_1, \ldots, d\pi \circ \mathrm{Ad}(a^{-1})X_\ell, H_1, \ldots, H_r\big).$$

(c) Soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\mathbb{C})$, et $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m_\alpha} \in \Delta(\mathfrak{u}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ les racines dont la restriction à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ est égale à α. On peut choisir $X_\alpha^j \in \mathfrak{u}_\mathbb{C}^{\gamma_j}$ tels que les vecteurs
$$Y_\alpha^j = \tfrac{1}{2}\,(X_\alpha^j - X_{-\alpha}^j) \qquad (\alpha \in \Delta^+,\ j = 1, \ldots, m_\alpha)$$
constituent une base de $\mathfrak{l}$, et que les vecteurs
$$Z_\alpha^j = \frac{1}{2i}(X_\alpha^j + X_{-\alpha}^j)$$
constituent une base de $\mathfrak{q}$. Si $a = \exp H \in A$, alors
$$d\pi \circ \mathrm{Ad}(a)Y_\alpha^j = \sin\langle \alpha, iH\rangle Z_\alpha^j.$$

De ces relations il résulte que
$$\varphi^*\omega = J_0(H)\omega_1 \otimes \omega_2,$$
où ω_1 est une forme différentielle de degré ℓ sur K/M invariante par K, et ω_2 une forme différentielle de degré r sur A invariante par A.

On en déduit que, si f est une fonction intégrable sur $\mathscr{X}$,
$$\int_{\mathscr{X}} f(x)\, dm_0(x) = c_0 \int_K \int_{\mathfrak{a}/\Gamma} f(k \exp H \cdot o)\, dk\, J_0(H)\, dH,$$
où c_0 est une constante positive. □

Références. — [**Hel84**], [**Tak94**].

IV.2. L'espace symétrique complexifié $\mathscr{X}_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$

La complexification $K_{\mathbb{C}}$ du groupe compact K est un sous-groupe fermé de $U_{\mathbb{C}}$, et $(U_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ est une paire symétrique relativement à l'involution θ. L'espace quotient $\mathscr{X}_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ est une variété complexe, c'est la complexification de l'espace symétrique $\mathscr{X} = U/K$.

IV.2.1. Théorème. — *Tout $z \in \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ s'écrit*

$$z = g \exp H \cdot o,$$

où $g \in U$, $H \in \mathfrak{a}$. Si $g_1 \exp H_1 \cdot o = g_2 \exp H_2 \cdot o$, alors il existe $w \in W$ tel que $H_2 = w \cdot H_1$. On peut choisir $H \in \overline{(i\mathfrak{a})_+}$, et alors H est unique.

Pour démontrer ce théorème nous aurons besoin du lemme et de la proposition qui suivent.

IV.2.2. Lemme. — *Soit (G, K) une paire symétrique, et soit*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On suppose que $G \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie linéaire réel réductif, et que $K = G \cap \mathrm{O}(N)$. On note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de G. Soient $X, Y \in \mathfrak{p}$. Il existe un élément unique $T \in \mathfrak{p}$ tel que

$$\exp X = \exp T \exp 2Y \exp T.$$

Démonstration. — Soit $Z \in \mathfrak{p}$ défini par

$$\exp 2Z = \exp Y \exp X \exp Y.$$

On vérifie que l'élément $T \in \mathfrak{p}$ défini par

$$\exp T = \exp -Y \exp Z \exp -Y$$

convient.

Supposons que

$$\exp T_1 \exp 2Y \exp T_1 = \exp T_2 \exp 2Y \exp T_2.$$

On en déduit que

$$(\exp Y \exp T_1 \exp Y)^2 = (\exp Y \exp T_2 \exp Y)^2.$$

Or, si A et B sont deux matrices symétriques définies positives telles que $A^2 = B^2$, alors $A = B$. Donc

$$\exp Y \exp T_1 \exp Y = \exp Y \exp T_2 \exp Y,$$

et par suite $T_1 = T_2$. □

IV.2.3. Proposition. — *Soit (U, K) une paire symétrique compacte. L'application*

$$U \times \mathfrak{p} \times \mathfrak{k} \longrightarrow U_{\mathbb{C}},$$
$$(g, Y, X) \longmapsto g \exp Y \exp iX,$$

est une bijection.

C'est même un difféomorphisme analytique.

Démonstration. — Tout élément $\gamma \in U_{\mathbb{C}}$ admet une décomposition polaire unique

$$\gamma = g \exp iZ \qquad (g \in U,\ Z \in \mathfrak{u}).$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe $Y \in \mathfrak{p}$ et $X \in \mathfrak{k}$ uniques tels que

$$\exp iZ = \exp Y \exp iX.$$

Puisque

$$\exp iZ = (\exp iZ)^* = \exp iX \exp Y,$$

nous en déduisons que

$$\exp 2iZ = \exp iX \exp 2Y \exp iX.$$

L'involution de Cartan θ étant étendue en une involution holomorphe de $U_{\mathbb{C}}$,

$$\exp\big(2id\theta(Z)\big) = \exp iX \exp -2Y \exp iX,$$

ou

$$(*) \qquad \exp 2Y = \exp iX \exp -\big(2id\theta(Z)\big) \exp iX,$$

ce qui permet d'éliminer Y :

$$\exp 2iZ = \exp 2iX \exp -\big(2id\theta(Z)\big) \exp 2iX.$$

D'après le lemme IV.2.2 appliqué à la paire symétrique $(U_{\mathbb{C}}, U)$, cette équation admet une solution unique X, et Y est défini par $(*)$. □

Démontrons maintenant le théorème IV.2.1. Soit $z = \gamma \cdot o$. D'après la proposition IV.2.3 il existe $g_0 \in U$, $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{p}$ uniques tels que

$$\gamma = g_0 \exp Y \exp iX,$$

et, puisque $\exp iX \in K_{\mathbb{C}}$,

$$z = g_0 \exp Y \cdot o.$$

Il existe $k \in K$ et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ tels que

$$Y = \mathrm{Ad}(k)H.$$

Par suite

$$\gamma = g \exp H \cdot o,$$

avec $g = g_0 k \in U$.

Supposons que

$$g_1 \exp H_1 \cdot o = g_2 \exp H_2 \cdot o \quad (g_1, g_2 \in U,\ H_1, H_2 \in \mathfrak{a}).$$

Cela implique qu'il existe $g \in U$, $k \in K$, $X \in \mathfrak{k}$ tels que

$$\begin{aligned}\exp H_1 &= g \exp H_2 k \exp iX \\ &= (gk)\big(\exp \mathrm{Ad}(k^{-1}) H_2\big) \exp iX.\end{aligned}$$

D'après la propriété d'unicité de la proposition IV.2.3,

$$H_2 = \mathrm{Ad}(k) H_1.$$

Si H_1 est régulier, cela implique que $k \in M$, et qu'il existe $w \in W$ tel que

$$H_2 = w \cdot H_1. \qquad \square$$

Par suite un domaine $\Omega \subset \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ invariant par U est de la forme

$$\Omega = U \exp \omega \cdot o,$$

où ω est un ouvert de $i\mathfrak{a}$ invariant par W.

À cette décomposition correspond une formule d'intégration que nous utiliserons dans le chapitre V. Nous notons m une mesure sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ invariante par $U_{\mathbb{C}}$.

IV.2.4. Théorème. — *Soit f une fonction intégrable sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$.*

$$\int_{\mathscr{X}_C} f(z)\, dm(z) = c \int_U \int_{(i\mathfrak{a})_+} f(g \exp H \cdot o)\, dg\, J(H)\, dH,$$

où

$$J(H) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \mathrm{sh}\, 2\langle \alpha, H \rangle,$$

et c est une constante positive.

Démonstration. — La démonstration est analogue à celle du théorème IV.1.1. Pour $g \in U$, $a \in \underline{A}$, le point $\psi(g, a) = ga \cdot o \in \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ ne dépend que de la classe gM,

$$\psi(gm, a) = \psi(g, a) \qquad (m \in M),$$

et nous pouvons considérer ψ comme application

$$\psi : U/M \times \underline{A} \longrightarrow \mathscr{X}_{\mathbb{C}}.$$

On peut identifier l'espace tangent à U/M en eM à l'espace $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$. Pour $X \in \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$, $H \in i\mathfrak{a}$,

$$(D\psi)_{(gM,a)}(gX, aH) = ga\big(d\pi \circ \mathrm{Ad}(a^{-1})X + H\big) \cdot o,$$

où π est la projection $\pi : U_{\mathbb{C}} \to U_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$. Avec les mêmes notations que celles que nous avons utilisées dans la démonstration du théorème IV.1.1, si $a = \exp H$,

$$\begin{aligned} d\pi \circ \mathrm{Ad}(a) Y_\alpha^j &= i\, \mathrm{sh}\langle \alpha, H \rangle Z_\alpha^j, \\ d\pi \circ \mathrm{Ad}(a) Z_\alpha^j &= \mathrm{ch}\langle \alpha, H \rangle Z_\alpha^j. \end{aligned}$$

On en déduit que, si ω est une forme différentielle de degré $2n$ su $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ qui est invariante par $U_{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned}\psi^*\omega &= c_1 \prod_{\alpha\in\Delta^+} \operatorname{sh}\langle\alpha, H\rangle \prod_{\alpha\in\Delta^+} \operatorname{ch}\langle\alpha, H\rangle\ \omega_1\otimes\omega_2 \\ &= cJ(H)\omega_1\otimes\omega_2,\end{aligned}$$

où ω_1 est une forme différentielle de degré $\ell + n$ sur U/M invariante par U, et ω_2 une forme différentielle de degré r sur $\underline{A}$ invariante par $\underline{A}$. Le résultat annoncé s'en déduit. $\square$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dans un domaine $\Omega\subset\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$. Pour $Z\in\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ on pose

$$\overline{\partial}_Z f(z) = \frac{\partial}{\partial\overline{w}} f(\exp wZ\cdot z)\big|_{w=0}\quad (w\in\mathbb{C}).$$

La fonction f est holomorphe dans Ω si, pour tout $Z\in\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$, $\overline{\partial}_Z f(z) = 0$ $(z\in\Omega)$. Supposons que Ω soit un domaine qui rencontre $\mathscr{X}$:

$$\Omega\cap\mathscr{X}\neq\varnothing.$$

Du théorème I.1.2 on déduit que si f est holomorphe dans Ω et nulle sur $\mathscr{X}$, alors f est identiquement nulle dans Ω.

Références. — [**Las78a**].

IV.3. Exemples

(1) $U = \mathrm{SO}(n+1)$, $K = \mathrm{SO}(n)$. L'espace symétrique $\mathscr{X} = U/K$ s'identifie à la sphère unité S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathscr{X} = \{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1\},$$

le point de base étant $o = (1,0,\ldots,0)$. L'espace $\mathfrak{p}$ est l'ensemble des matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & \ldots & -x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ x_n & & & \end{pmatrix}\qquad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Nous pouvons choisir pour $\mathfrak{a}$ le sous-espace de dimension un $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0$, avec

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & -1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $H = \theta H_0$,

$$\exp H = \begin{pmatrix} \cos\theta & & -\sin\theta \\ & I_{n-1} & \\ \sin\theta & & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\exp H \in K$ si et seulement si $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), donc $\Gamma_0 = 2\pi\mathbb{Z}H_0$, et le tore A_0 est le cercle

$$A_0 = \{(\cos\theta, 0, \ldots, 0, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Le système des racines restreintes est $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$ ($\alpha(iH_0) = 1$), et $W = \{\pm 1\}$. On choisira $(i\mathfrak{a})_+ = \{t(iH_0) \mid t > 0\}$.

L'espace symétrique complexifié $\mathscr{X}_\mathbb{C} = U_\mathbb{C}/K_\mathbb{C}$ s'identifie à la quadrique complexe

$$\mathscr{X}_\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 1\}.$$

Les orbites de U dans $\mathscr{X}_\mathbb{C}$ sont les ensembles

$$\mathscr{O}_r = \{z \in \mathscr{X}_\mathbb{C} \mid \|z\|^2 = |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = r\} \qquad (r \geqslant 1).$$

Pour $r > 1$, $\mathscr{O}_r$ est une sous-variété réelle de dimension $2n-1$. Les domaines de $\mathscr{X}_\mathbb{C}$ qui sont invariants par U sont de la forme

$$\Omega = \{z \in \mathscr{X}_\mathbb{C} \mid \|z\|^2 < \operatorname{ch} 2t_0\} \qquad (t_0 > 0),$$

et alors $\omega = \{itH_0 \mid -t_0 < t < t_0\}$, ou

$$\Omega = \{z \in \mathscr{X}_\mathbb{C} \mid \operatorname{ch} 2t_1 < \|z\|^2 < \operatorname{ch} 2t_2\} \qquad (0 < t_1 < t_2),$$

et alors $\omega = \{itH_0 \mid t_1 < |t| < t_2\}$.

(2) $U = \mathrm{U}(n)$, $K = \mathrm{O}(n)$. L'espace symétrique $\mathscr{X} = U/K$ peut être identifié à l'ensemble des matrices unitaires symétriques

$$\mathscr{X} = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}),$$

le groupe U agissant comme suit

$$g \cdot x = gxg^T.$$

(Il peut aussi être identifié à la sous-variété des sous-espaces lagrangiens de $\mathbb{R}^{2n}$, *cf.* [**MT86**], section 5.9.)

L'espace $\mathfrak{p}$ est l'ensemble $i\,\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, et nous pouvons choisir pour $\mathfrak{a}$ l'espace des matrices unitaires diagonales. Avec ce choix

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\theta_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta_j \in \pi\mathbb{Z} \right\},$$

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le système des racines restreintes est $\Delta = \{\alpha_{jk}\}$, où $\alpha_{jk}(H) = t_j - t_k$ si $H = \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n)$. On choisira

$$(i\mathfrak{a})_+ = \{\operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1 < \cdots < t_n\}.$$

L'espace symétrique complexifié $\mathscr{X}_{\mathbb{C}} = U_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ s'identifie à l'ensemble des matrices symétriques complexes inversibles

$$\mathscr{X}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid \det(z) \neq 0\}.$$

Toute matrice symétrique complexe peut s'écrire

$$z = udu^T,$$

où $u \in \mathrm{U}(n)$, et d est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\geqslant 0$. Il en résulte qu'une orbite de U dans $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ est un ensemble de matrices $z \in \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ telles que le spectre de la matrice hermitienne z^*z soit fixé.

(3) Un groupe de Lie compact K peut être considéré comme un espace symétrique, $K \simeq \mathscr{X} = U/K$ où $U = K \times K$, et K est identifié au sous-groupe diagonal $\{(k,k) \mid k \in K\}$. Le groupe U agit sur K comme suit, si $u = (k_1, k_2)$,

$$u \cdot x = k_1 x k_2^{-1}.$$

L'involution θ est donnée par

$$\theta(k_1, k_2) = (k_2, k_1),$$

et

$$\mathfrak{p} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{k}\}.$$

Si $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, alors

$$\mathfrak{a} = \{(H, -H) \mid H \in \mathfrak{t}\}$$

est un sous-espace de Cartan. Notons que

$$\Gamma = \{(H, -H) \mid \exp 2H = e\},$$

et

$$A_0 = \{\exp H \mid H \in \mathfrak{t}\}.$$

De plus $\Delta(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \simeq \Delta(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$.

L'espace symétrique complexifié $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ est égal à $K_{\mathbb{C}}$. Tout élément $g \in K_{\mathbb{C}}$ s'écrit

$$g = k_1 \exp iH k_2,$$

où $k_1, k_2 \in K$ et $H \in \mathfrak{t}$. Cette décomposition n'est autre que la décomposition de Cartan pour la paire symétrique $(K_{\mathbb{C}}, K)$.

IV.4. Représentations sphériques

Soit π une représentation irréductible de U dans un espace vectoriel complexe $\mathscr{W}$. L'espace $\mathscr{W}$ est de dimension finie. Il existe sur $\mathscr{W}$ un produit scalaire pour lequel π est unitaire. La représentation se prolonge en une représentation holomorphe de $U_{\mathbb{C}}$, qu'on notera aussi π, telle que

$$\pi(g)^* = \pi(g^*).$$

Rappelons que la représentation dérivée $d\pi$ est définie par

$$d\pi(X) = \frac{d}{dt}\pi(\exp tX)\Big|_{t=0} \quad (X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}).$$

C'est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$. Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}$ contenant $\mathfrak{a}$, et notons $\Sigma(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$. Soit Σ_+ un système positif tel qu'une racine $\alpha \in \Delta^+$ soit la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ d'une racine de Σ^+. Pour $\gamma \in \Sigma$ notons $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\gamma}$ l'espace radiciel correspondant,

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\gamma} = \{X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}} \mid \forall\, H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}},\ [H, X] = \gamma(H)X\}.$$

Un vecteur de plus haut poids de la représentation π est un vecteur $v \neq 0$ de $\mathscr{W}$ tel que, pour $H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$,

$$d\pi(H)v = \lambda(H)v,$$

où λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, et si $X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{+}$,

$$\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{+} = \bigoplus_{\gamma \in \Sigma^+} \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\gamma},$$

alors

$$d\pi(X)v = 0.$$

La forme linéaire λ est le *plus haut poids* de la représentation π. Le sous-espace

$$\mathscr{W}^{\lambda} = \{v \in \mathscr{W} \mid \forall\, H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}},\ d\pi(H)v = \lambda(H)v\}$$

est de dimension un. Posons

$$\mathscr{W}^{K} = \{v \in \mathscr{W} \mid \forall\, k \in K,\ \pi(k)v = v\}.$$

IV.4.1. Proposition. — *Soit $(\pi, \mathscr{W})$ une représentation irréductible de U.*

$$\dim \mathscr{W}^{K} = 0 \text{ ou } 1.$$

Démonstration. — Supposons que $\dim \mathscr{W}^K \geqslant 1$. Soient $u \in \mathscr{W}^K$ $(u \neq 0)$, $v \in \mathscr{W}^{\lambda}$ $(v \neq 0)$. Si $g = k \exp Hn$ $(k \in K,\ H \in \mathfrak{a},\ n \in N)$,

$$(\pi(g)v|u) = e^{\lambda(H)}(v|u),$$

et par suite $(v|u) \neq 0$, car la restriction de π à G est irréductible. Ainsi la forme linéaire $u \mapsto (u|v)$ (pour v fixé dans $\mathscr{W}^{\lambda}$) ne s'annule pas sur $\mathscr{W}^K$ en dehors de 0, donc $\dim \mathscr{W}^K = 1$. □

Une représentation irréductible $(\pi, \mathscr{W})$ est dite *sphérique* si $\dim \mathscr{W}^K = 1$.

IV.4.2. Théorème. — *Soit $(\pi, \mathscr{W})$ une représentation irréductible de plus haut poids λ. Soit v un vecteur de plus haut poids. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La représentation π est sphérique.*

(ii) *Le vecteur de plus haut poids v est invariant par M.*

(iii) *Pour $H \in \mathfrak{b} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$, $\lambda(H) = 0$, et, pour $H \in \Gamma$, $\lambda(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration

(a) Montrons que (i) implique (ii). Supposons que $(\pi, \mathscr{W})$ est sphérique. Soit $u \in \mathscr{W}^K$ $(u \neq 0)$ et $m \in M$. Si $g = \overline{n}ak$ $(\overline{n} \in \overline{N},\ a \in \underline{A},\ k \in K)$, alors, puisque M normalise N

$$\begin{aligned}(\pi(m)v|\pi(g)u) &= (\pi(\overline{n})^*\pi(m)v|\pi(a)u)\\ &= (v|\pi(a)u)\\ &= (v|\pi(g)u).\end{aligned}$$

Il en résulte que $\pi(m)v = v$.

(b) Montrons que (ii) implique (i). Supposons que v soit invariant par M. Si $g = \overline{n}m\exp Hn$ $(\overline{n} \in \overline{N},\ m \in M,\ H \in i\mathfrak{a},\ n \in N)$, alors

$$(\pi(g)v|v) = e^{\lambda(H)}\|v\|^2 > 0.$$

De la décomposition de Bruhat on déduit que, pour tout $g \in G$, $(\pi(g)v|v) \geqslant 0$. Posons

$$u = \int_K \pi(k)vdk,$$

où dk est une mesure de Haar de K. Le vecteur u est invariant par K. Montrons qu'il n'est pas nul. La fonction $k \mapsto (\pi(k)v|v)$ est $\geqslant 0$ et est > 0 en $k = e$, donc son intégrale, qui est égale à $(u|v)$, n'est pas nulle.

(c) Montrons que (ii) implique (iii). Supposons que v soit invariant par M. Si $H \in \mathfrak{b}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tH) \in M$, donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \pi(\exp(tH))v = v,\ d\pi(H)v = 0$$

et $\lambda(H) = 0$. Si $H \in \Gamma$, $\exp H \in M$, donc

$$\pi(\exp H)v = v.$$

Par suite $e^{\lambda(H)} = 1$ ou $\lambda(H) \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

(d) Montrons que (iii) implique (ii). Notons $\mathfrak{b}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{t}$, et Σ_0 l'ensemble des racines $\gamma \in \Sigma$ qui sont nulles sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.

L'algèbre $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ se décompose en

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{b}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\gamma \in \Sigma_0} \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\gamma}.$$

Soient $\gamma \in \Sigma_0 \cap \Sigma^+$, et $X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\gamma}$. Puisque v est un vecteur de plus haut poids,

$$d\pi(X)v = 0.$$

Si $X \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{-\gamma}$, alors $w = d\pi(X)v$ vérifie

$$d\pi(H)w = \big(\lambda(H) - \gamma(H)\big)w.$$

Montrons que $\lambda - \gamma$ n'est pas un poids de la représentation π. Soit s_α la réflexion par rapport à l'hyperplan $\gamma = 0$. Puisque $(\lambda|\gamma) = 0$,

$$s_\alpha(\lambda - \gamma) = \lambda + \gamma.$$

Si $\lambda - \gamma$ était un poids, $\lambda + \gamma$ en serait un aussi, ce qui n'est pas le cas. Donc $w = d\pi(X)v = 0$. Puisque $M = M_0 \exp \Gamma$, pour tout $m \in M$,

$$\pi(m)v = v. \qquad \square$$

Le réseau $P \subset i\mathfrak{a}$ des *poids restreints* est défini par

$$P = \{\mu \in \mathfrak{a}^* \mid \mu(\Gamma) \subset 2i\pi\mathbb{Z}\}.$$

Pour $\pi \in P$ la fonction $H \mapsto e^{\mu(H)}$ est invariante par Γ, donc définit un caractère χ_μ du tore A_0,

$$\chi_\mu(a) = e^{\mu(H)} \quad (a = \exp H \cdot o).$$

Un poids restreint $\mu \in P$ est dit dominant si

$$\forall\, \alpha \in \Delta^+,\ (\mu|\alpha) > 0.$$

On note P^+ l'ensemble des poids restreints dominants.

IV.4.3. Théorème. — *L'application qui à une représentation irréductible sphérique associe son plus haut poids établit une bijection entre l'ensemble $\widehat{U}_K$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles sphériques et l'ensemble P^+ des poids restreints dominants.*

C'est une conséquence du fait que l'application qui à une représentation irréductible de U associe son plus haut poids est une bijection de $\widehat{U}$ sur l'ensemble des poids dominants.

IV.5. Fonctions sphériques

Soit $(\pi, \mathscr{W})$ une représentation irréductible sphérique de plus haut poids restreint $\lambda \in P^+$. Soient u un vecteur K-invariant, unitaire : $\|u\| = 1$, et v un vecteur de plus haut poids normalisé par la condition $(v|u) = 1$. Notons que

$$\int_K \pi(k)v\, dk = u, \qquad \int_K (\pi(k)v|v) dk = 1.$$

En effet le projecteur orthogonal P de $\mathscr{W}$ sur $\mathscr{W}^K$ s'écrit

$$Pw = \int_K \pi(k)w\, dk.$$

Il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$Pv = cu,$$

et

$$(Pv|v) = c(u|v) = c.$$

D'autre part $P^2 = P$, donc

$$(Pv|v) = \|Pv\|^2 = c^2\|u\|^2 = c^2,$$

donc $c = 1$.

La *fonction sphérique* φ_λ est la fonction définie sur U, et même sur $U_{\mathbb{C}}$, par

$$\varphi_\lambda(g) = \big(\pi(g^{-1})u|u\big).$$

Elle peut être considérée comme une fonction sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ invariant par $K_{\mathbb{C}}$. Des relations d'orthogonalité de Schur il résulte que

$$\|\varphi_\lambda\|_2^2 = \frac{1}{d_\lambda},$$

où $d_\lambda = \dim \mathscr{W}$. ($\|\varphi_\lambda\|_2$ est la norme de φ_λ dans $L^2(\mathscr{X}, m_0)$, où m_0 est la mesure sur $\mathscr{X}$ qui est invariante par U et normalisée.)

Notons $\mathscr{H}_\lambda$ l'espace des fonctions holomorphes définies sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ de la forme

$$f_w(z) = \big(\pi(g^{-1})w|u\big) \qquad (w \in \mathscr{W}, z = g \cdot o, g \in U_{\mathbb{C}}).$$

En particulier $f_u = \varphi_\lambda$. Notons ψ_λ la fonction définie sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ par

$$\psi_\lambda(z) = f_v(z) = \big(\pi(g^{-1})v|u\big) \qquad (z = g \cdot o).$$

Cette fonction vérifie

$$\begin{aligned} &\psi_\lambda(o) = 1, \\ &\psi_\lambda(n \exp H \cdot z) = e^{-\lambda(H)}\psi_\lambda(z) \qquad (n \in N_{\mathbb{C}},\ H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

La fonction sphérique φ_λ admet la représentation intégrale suivante

$$\varphi_\lambda(z) = \int_K \psi_\lambda(k \cdot z)dk.$$

En effet la fonction f définie par

$$f(z) = \int_K \psi_\lambda(k \cdot z)dk$$

appartient à $\mathscr{H}_\lambda$, est invariante par K, et $f(o) = 1$. Ces propriétés caractérisent la fonction sphérique φ_λ.

La décomposition d'Iwasawa d'un élément $g \in G$ peut s'écrire

$$g = k \exp Hn,$$

avec $k \in K$, $H \in i\mathfrak{a}$, $n \in N$. On note $H = \mathscr{H}(g)$. Ainsi, pour $g \in G$,

$$\psi_\lambda(g) = e^{\langle \lambda, \mathscr{H}(g^{-1})\rangle}, \quad \varphi_\lambda(g) = \int_K e^{\langle \lambda, \mathscr{H}(g^{-1}k)\rangle}dk.$$

Soit $\{v_j\}$ une base orthonormée de $\mathscr{W}$ constituée de vecteurs de poids restreints

$$\pi(\exp H)v_j = e^{\mu_j(H)}v_j \quad (H \in \mathfrak{a}).$$

μ_j est un poids restreint de la représentation π, $\mu_j \in P(\pi)$ ($j = 1, \ldots, d_\lambda$). Décomposons le vecteur u suivant la base $\{v_j\}$:

$$u = \sum_{j=1}^{d_\lambda} (u|v_j)v_j.$$

Alors
$$\pi(\exp H)u = \sum_{j=1}^{d_\lambda} e^{\mu_j(H)}(u|v_j)v_j,$$
et
$$\varphi_\lambda(\exp H) = \sum_{j=1}^{d_\lambda} e^{-\mu_j(H)}|(u|v_j)|^2.$$
Pour $\mu \in P(\pi)$ posons
$$a_\mu = \sum_{\mu_j=\mu} |(u|v_j)|^2,$$
alors
$$\varphi_\lambda(\exp H) = \sum_{\mu\in P(\pi)} a_\mu e^{-\mu(H)}.$$
C'est un polynôme de Laurent à coefficients positifs, qui est W-invariant, et
$$a_\mu \geqslant 0, \qquad \sum_{\mu\in P(\pi)} a_\mu = 1.$$
Puisque $\mathscr{W}^\lambda$ est de dimension 1, et que $(u|v) = 1$,
$$a_\lambda = \frac{1}{\|v\|^2}.$$

On note ρ la demi-somme des racines restreintes positives,
$$\rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta^+} m_\alpha \alpha.$$

IV.5.1. Proposition. — *$a_\lambda = c(\lambda+\rho)$, où c est la fonction d'Harish-Chandra.*

Démonstration. — Rappelons la formule d'intégration suivante : si f est une fonction intégrable sur K, invariante à droite par M,
$$\int_K f(k)dk = c_0 \int_{\overline{N}} f\big(k(\overline{n})\big)e^{-2\rho\left(H(\overline{n})\right)}d\overline{n},$$
où $d\overline{n}$ est une mesure de Haar sur $\overline{N}$, la constante c_0 étant donnée par
$$\frac{1}{c_0} = \int_{\overline{N}} e^{2\rho\left(H(\overline{n})\right)}d\overline{n}.$$
Appliquons cette formule à la fonction
$$f(k) = \big(\pi(k)v|v\big).$$
Nous avons vu que son intégrale est égale à 1, et
$$f\big(k(\overline{n})\big) = \|v\|^2 e^{-\lambda\left(H(\overline{n})\right)}.$$
Finalement
$$a_\lambda = c_0 \int_{\overline{N}} e^{-(\lambda+2\rho)\left(H(\overline{n})\right)}d\overline{n} = c(\lambda+\rho). \qquad \square$$

On en déduit les estimations suivantes.

IV.5.2. Proposition. — *Pour* $-H \in \overline{(i\mathfrak{a})_+}$,

$$c(\lambda+\rho_0)e^{\lambda(H)} \leqslant \varphi_\lambda\big(\exp(H)\big) \leqslant e^{\lambda(H)}.$$

Exemples

(1) Dans le cas de la sphère $S^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$, les poids restreints dominants λ sont indexés par $\mathbb{N}$. Ce sont les formes linéaires définies sur $\mathfrak{a}$ par

$$\lambda(\theta H_0) = im\theta \qquad (m\in\mathbb{N})$$

(avec les notations de la section IV.3). On montre que

$$\psi_\lambda(x) = (x_0+ix_n)^m,$$

et que

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(\exp\theta H_0) &= \frac{\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)}\int_0^\pi (\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^m(\sin\varphi)^{n-2}d\varphi\\ &= P_m^\nu(\cos\theta),\end{aligned}$$

où P_m^ν est un polynôme ultrasphérique ($\nu=\frac12\,(n-1)$). Les polynômes ultrasphériques P_m^ν (pour $\nu>-\frac12$) sont définis par les conditions :

- P_m^ν est de degré m,
- $\int_{-1}^1 P_\ell^\nu(t)P_m^\nu(t)(1-t^2)^{\nu-\frac12}\,dt = 0$ si $\ell\neq m$,
- $P_m^\nu(1)=1$.

(2) Dans le cas où $U=\mathrm{U}(n)$ et $K=\mathrm{O}(n)$, l'espace symétrique $\mathscr{X}=U/K$ est identifié à l'ensemble des matrices $n\times n$ unitaires et symétriques. Les poids restreints dominants sont indexés par les suites d'entiers $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_n)$ ($m_j\in\mathbb{Z}$), telles que $m_1\geqslant\cdots\geqslant m_n$. Le poids restreint dominant associé à $\mathbf{m}$ est défini par

$$\lambda(H) = -2(m_1t_1+\cdots m_nt_n),$$

si $H=\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)$. Les restrictions des fonctions sphériques au tore A_0 sont des fonctions de Jack :

$$\varphi_\lambda\big(\mathrm{diag}(e^{i\theta},\dots,e^{i\theta_n})\big) = P_{\mathbf{m}}(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}).$$

Les fonctions de Jack sont orthogonales relativement au produit scalaire

$$(P|Q) = \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})\,\overline{Q(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})}\,\Big|\prod_{j<k}\sin\frac{\theta_j-\theta_k}{2}\Big|\,d\theta_1\cdots d\theta_n.$$

(3) Dans le cas du groupe $U=K\times K$, $\mathscr{X}=(K\times K)/K\simeq K$, les représentations sphériques sont les représentations $\pi=\tau\otimes\overline{\tau}$, où τ est une représentation irréductible de K. Si $\mathscr{V}$ est l'espace de la représentation τ, on peut identifier l'espace $\mathscr{W}$ de la

représentation π à l'espace des endomorphismes de $\mathscr{V}$, muni de la norme de Hilbert-Schmidt. Le vecteur

$$u = \frac{1}{\sqrt{d_\tau}}\,\mathrm{Id}$$

(Id est l'application identique de $\mathscr{V}$, et d_τ est la dimension de $\mathscr{V}$) est un vecteur unitaire de $\mathscr{W}$ qui est invariant par K. La fonction sphérique correspondante est égale à

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{d_\tau}\chi_\tau(x^{-1}),$$

où χ_τ est le caractère de la représentation τ.

Références. — [**Hel84**], [**Tak94**].

CHAPITRE V

ANALYSE SUR LA COMPLEXIFICATION D'UN ESPACE SYMÉTRIQUE COMPACT

Nous commençons ce chapitre par un rappel des résultats de base de l'analyse harmonique sur un espace symétrique compact, puis nous exposons les résultats de Lassalle sur les séries de Laurent. Dans la troisième section nous appliquons les résultats des chapitres II et III aux espaces hilbertiens de fonctions holomorphes sur la complexification d'un espace symétrique compact. Finalement nous présentons dans la dernière section un résultat récent de Stenzel [**Ste99**] concernant la transformation de Bargmann-Segal sur un espace symétrique compact.

V.1. Séries de Fourier sur un espace symétrique compact

Soit $\mathscr{X} = U/K$ un espace symétrique compact, et soit $(\pi, \mathscr{W})$ une représentation unitaire irréductible de U. Pour une fonction f intégrable sur U on pose

$$\widehat{f}(\pi) = \int_U f(g)\pi(g)dg.$$

(dg est la mesure de Haar normalisée de U.) C'est un endomorphisme de $\mathscr{W}$, et la transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}(\pi)$ possède les propriétés de covariance suivantes :

$$\widehat{L_g f}(\pi) = \pi(g)\widehat{f}(\pi) \qquad \big(L_g f(x) = f(g^{-1}x)\big),$$
$$\widehat{R_g f}(\pi) = \widehat{f}(\pi)\pi(g^{-1}) \qquad \big(R_g f(x) = f(xg)\big).$$

Si f est invariante à droite par K, alors

$$\widehat{f}(\pi)\pi(k) = \widehat{f}(\pi) \qquad (k \in K);$$

donc, si w est orthogonal à $\mathscr{W}^K$, alors $\widehat{f}(\pi)w = 0$. Par suite, si $\widehat{f}(\pi) \neq 0$, la représentation $(\pi, \mathscr{W})$ est sphérique, et $\widehat{f}(\pi)$ est un opérateur de rang un de la forme

$$\widehat{f}(\pi)w = (w|u)A_\pi \qquad (w \in \mathscr{W}),$$

où u est un vecteur unitaire K-invariant, et $A_\pi = A_\pi(f)$ est un vecteur de $\mathscr{W}$,

$$A_\pi(f) = \widehat{f}(\pi)u.$$

Notons que

$$A_\pi(L_g f) = \pi(g)A_\pi(f),$$
$$A_\pi(f) = \int_U f(x)\pi(x)u d\mu(x).$$

Remarque. — Rappelons que dans le cas du groupe $U = K \times K$,

$$\mathscr{X} \simeq (K \times K)/K \simeq K,$$

les représentations sphériques de U sont les représentations $\pi = \tau \otimes \overline{\tau}$, où τ est une représentation irréductible de K. Si $\mathscr{V}$ est l'espace de la représentation de τ, l'espace $\mathscr{W}$ de la représentation π s'identifie à l'espace des endomorphismes de $\mathscr{V}$, muni de la norme de Hilbert-Schmidt. Le vecteur

$$u = \frac{1}{\sqrt{d_\tau}} \,\mathrm{Id}$$

est un vecteur unitaire de $\mathscr{W}$ qui est invariant par K. Le coefficient de Fourier $A_\pi(f)$ d'une fonction f intégrable sur $\mathscr{X} \simeq K$ s'écrit avec la définition que nous avons donnée

$$A_\pi(f) = \frac{1}{\sqrt{d_\tau}} \int_K f(k)\tau(k)dk = \frac{1}{\sqrt{d_\tau}} \widehat{f}(\tau).$$

(dk est la mesure de Haar normalisée de K.)

Nous allons énoncer le théorème de Plancherel pour l'espace symétrique $\mathscr{X} = U/K$. Nous noterons m_0 la mesure normalisée sur $\mathscr{X}$ qui est invariante par U.

Pour tout poids restreint dominant $\lambda \in P^+$ on fixe une représentation sphérique $(\pi_\lambda, \mathscr{W}_\lambda)$ de plus haut poids restreint λ, et un vecteur unitaire u_λ de $\mathscr{W}_\lambda$ qui est invariant par K. On note d_λ la dimension de $\mathscr{W}_\lambda$, et $\mathscr{H}_\lambda$ l'espace des fonctions définies sur $\mathscr{X}$ de la forme

$$f_w(x) = \big(\pi_\lambda(g^{-1})w|u_\lambda\big) \qquad (w \in \mathscr{W}_\lambda,\ x = g \cdot o).$$

Pour une fonction f intégrable sur $\mathscr{X}$ on notera $A_\lambda = A_\lambda(f)$ au lieu de $A_{\pi_\lambda} = A_{\pi_\lambda}(f)$.

V.1.1. Théorème de Plancherel

(i) $L^2(\mathscr{X}) = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathscr{H}_\lambda$.

(ii) *Si* $f \in L^2(\mathscr{X})$, $f(x) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big)$ *($x = g \cdot o$), la convergence ayant lieu en moyenne quadratique, c'est-à-dire au sens de* L^2.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathscr{X}} |f(x)|^2 \, dm_0(x) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \|A_\lambda(f)\|^2.$

Nous allons aussi énoncer un théorème de convergence ponctuelle

V.1.2. Théorème

(i) *Soit f une fonction continue sur $\mathscr{X}$ telle que*

$$(*) \qquad \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \|A_\lambda(f)\| < \infty.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda(g^{-1}) A_\lambda(f) | u_\lambda\big) \qquad (x = g \cdot o),$$

la convergence étant absolue et uniforme sur $\mathscr{X}$.

(ii) *La condition $(*)$ est satisfaite si f est de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k > \frac{1}{2} \dim \mathscr{X}$.*

Si la fonction f est invariante (à gauche) par K, alors $A_\lambda(f)$ est un vecteur de $\mathscr{W}_\lambda$ invariant par K, donc proportionnel à u_λ puisque $\dim \mathscr{W}_\lambda^K = 1$:

$$A_\lambda(f) = a_\lambda(f) u_\lambda \qquad (a_\lambda(f) \in \mathbb{C}),$$

et

$$a_\lambda(f) = \int_{\mathscr{X}} f(x) \overline{\varphi_\lambda(x)}\, dm_0(x).$$

La série de Fourier de f s'écrit alors

$$f(x) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda a_\lambda(f) \varphi_\lambda(x).$$

Références. — [**Hel84**], [**Tak94**].

V.2. Séries de Laurent

Soit Ω un domaine U-invariant de $\mathscr{X}_\mathbb{C}$, et soit $\mathscr{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω. Le groupe U opère dans $\mathscr{O}(\Omega)$ par

$$\big(T(g)f\big)(z) = f(g^{-1}z).$$

Nous allons voir que la décomposition de la représentation T ne fait intervenir que les représentations sphériques de la paire (G, K).

Soit $(\pi, \mathscr{W})$ une représentation irréductible de U, et, pour $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, posons

$$F(z) = \int_U f(gz) \pi(g) dg \qquad (z \in \Omega).$$

La fonction F est holomorphe à valeurs dans $End(\mathscr{W})$, et vérifie, pour z fixé, et pour g dans un voisinage de $U_\mathbb{C}$,

$$F(gz) = F(z) \pi(g^{-1}).$$

L'égalité est en effet vérifiée pour $g \in U$, et les deux membres sont des fonctions holomorphes de g. D'après le théorème I.1.2, il en résulte que F admet un prolongement holomorphe à $\mathscr{X}_\mathbb{C}$, et

$$F(g \cdot o) = F(o) \pi(g^{-1}).$$

En particulier, si $k \in K$,
$$F(o) = F(o)\pi(k^{-1}).$$
Par suite $F(o)$ est nul sur l'orthogonal de $\mathscr{W}^K$. Si la représentation π n'est pas sphérique, $F(o) = 0$, et $F \equiv 0$. Si π est sphérique de plus haut poids restreint λ, on notera $F = F_\lambda$. Dans ce cas $F_\lambda(o)$ est un opérateur de rang un,
$$F_\lambda(o)w = (w|u)A_\lambda(f) \qquad (w \in \mathscr{W}),$$
avec
$$A_\lambda(f) = F_\lambda(o)u.$$
De la relation
$$F_\lambda(g\cdot o) = F_\lambda(o)\pi_\lambda(g^{-1}),$$
on déduit que
$$F_\lambda(g\cdot o)w = \big(\pi_\lambda(g^{-1})w|u\big)A_\lambda(f).$$
Puisque f est holomorphe, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$,
$$f(z) = \sum_{\lambda\in P_0^+} d_\lambda \operatorname{Tr}\big(F_\lambda(z)\big),$$
et comme
$$\operatorname{Tr}\big(F_\lambda(g\cdot o)\big) = \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u\big),$$
la série s'écrit aussi
$$f(z) = \sum_{\lambda\in P_0^+} d_\lambda\big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u\big) \qquad (z = g\cdot o\in\Omega,\ g\in U_{\mathbb{C}}).$$
C'est la *série de Laurent* de f.

Nous allons établir pour les coefficients d'une telle série de Laurent l'analogue des inégalités de Cauchy.

Le domaine Ω peut s'écrire $\Omega = U\exp i\omega\cdot o$, où $\omega\subset\mathfrak{a}$ est un ouvert invariant par W. Pour un compact $Q\subset\omega$ invariant par W on pose
$$M(f,Q) = \sup\{|f(g\exp H\cdot o)| \mid g\in U,\ H\in Q\}.$$

Rappelons la définition de la fonction d'appui h_Q d'un ensemble borné $Q\subset\mathfrak{a}$. Pour une forme linéaire $\mu\in\mathfrak{a}^*$ on pose
$$h_Q(\mu) = \sup_{H\in Q}\mu(H).$$
Et rappelons les propriétés que nous utiliserons dans la démonstration du théorème suivant. Pour deux ensembles bornés Q_1 et Q_2,
$$h_{Q_1+Q_2} = h_{Q_1} + h_{Q_2};$$
si $\widehat{Q}$ est l'enveloppe convexe de Q,
$$h_{\widehat{Q}} = h_Q;$$

si Q est la boule de centre 0 et de rayon R,

$$h_Q(\mu) = R\|\mu\|.$$

***V.2.1. Théorème* (Inégalités de Cauchy).** — $$\|A_\lambda(f)\| \leqslant \frac{M(f,Q)}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}} e^{-h_Q(-\lambda)}.$$

Démonstration. — De la relation

$$\begin{aligned} F_\lambda(g)w &= \big(\pi_\lambda(g^{-1})w|u_\lambda\big)A_\lambda \qquad (g\in U_{\mathbb{C}},\ w\in \mathscr{W}_\lambda)\\ &= \big(w|\pi_\lambda(g^{*-1})u_\lambda\big)A_\lambda, \end{aligned}$$

il résulte que

$$\|F_\lambda(g)\| = \|\pi_\lambda(g^{*-1})u_\lambda\|\|A_\lambda(f)\|.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|\pi_\lambda(g^{*-1})u_\lambda\|^2 &= \big(\pi_\lambda(g^{*-1})u_\lambda|\pi_\lambda(g^{*-1})u_\lambda\big)\\ &= \big(\pi_\lambda((g^*g)^{-1})u_\lambda|u_\lambda\big)\\ &= \varphi_\lambda(g^*g). \end{aligned}$$

Si $g=\gamma\exp H$ ($\gamma\in U$, $H\in\omega$), alors $g^*g=\exp 2H$, et

$$\|F_\lambda(\gamma\exp H)\| = \sqrt{\varphi_\lambda(\exp 2H)}\,\|A_\lambda(f)\|.$$

Si $H\in Q$, alors

$$\|F_\lambda(g)\| \leqslant M(f,Q),$$

donc

$$\sqrt{\varphi_\lambda(\exp(2H)}\,\|A_\lambda\| \leqslant M(f,Q).$$

Si $-H\in\overline{\mathfrak{a}_+}$, d'après la proposition IV.5.2,

$$\varphi_\lambda(\exp H) \geqslant c(\lambda+\rho)e^{-\lambda(H)},$$

donc, pour $H\in Q' := Q\cap(-\mathfrak{a}_+)$,

$$\|A_\lambda(f)\| \leqslant \frac{M(f,Q)}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}} e^{\lambda(H)}.$$

Prenant le minimum du second membre pour $H\in Q'$, nous obtenons

$$\|A_\lambda(f)\| \leqslant \frac{M(f,Q)}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}} e^{-h_{Q'}(-\lambda)}.$$

***V.2.2. Lemme*.** — *Si* $\lambda\in P^+$, $h_{Q'}(-\lambda) = h_Q(-\lambda)$.

Démonstration. — Soit $X = wH$ ($H\in Q'$, $w\in W$). Alors

$$\lambda(X) = \lambda(wH) = w^{-1}\lambda(H),$$

et $\mu = w^{-1}\lambda$ est un poids de la représentation π_λ. Donc, si $H\in -\overline{\mathfrak{a}_+}$,

$$\lambda(-X) = \mu(-H) \leqslant \lambda(-H),$$

et

$$h_Q(-\lambda) \leqslant h_{Q'}(-\lambda). \qquad \square$$

Ce lemme permet d'achever la démonstration du théorème :

$$\|A_\lambda(f)\| \leqslant \frac{M(f,Q)}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}} e^{-h_Q(-\lambda)}. \qquad \square$$

V.2.3. Proposition. — *Soit f une fonction continue sur $\mathscr{X}$, et soient $A_\lambda(f)$ ses coefficients de Fourier.*

(i) *Pour que f ait une extension holomorphe dans un voisinage de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{X}_\mathbb{C}$ il faut et suffit qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que*

$$\|A_\lambda(f)\| \leqslant Ce^{-\alpha\|\lambda\|}.$$

(ii) *Pour que f ait une extension holomorphe à $\mathscr{X}_\mathbb{C}$ il faut et suffit que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que*

$$\|A_\lambda(f)\| \leqslant C_\alpha e^{-\alpha\|\lambda\|}.$$

Démonstration. — Il existe des constantes A, M, B, N telles que

$$d_\lambda \leqslant A(1+\|\lambda\|)^M,$$
$$\frac{1}{c(\lambda+\rho)} \leqslant B(1+\|\lambda\|)^N.$$

(a) Supposons que

$$\|A_\lambda(f)\| \leqslant Ce^{-\alpha\|\lambda\|}.$$

Soit $0 < \varepsilon < \alpha$, et soit $\omega_\varepsilon \subset \mathfrak{a}$ la boule de centre 0 et de rayon ε. Si $z = g \cdot o \in \omega_\varepsilon$,

$$d_\lambda |(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda)| \leqslant A(1+\|\lambda\|)^M e^{\varepsilon\|\lambda\|} Ce^{-\alpha\|\lambda\|}.$$

Posons

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{\lambda\in P^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big) \quad (z = g\cdot o).$$

Cette série converge uniformément sur tout compact du domaine $\Omega = U \exp i\omega \cdot o$, où ω est la boule ouverte de centre 0 et de rayon α, donc $\widetilde{f}$ est holomorphe sur Ω, et sa restriction à $\mathscr{X}$ est égale à f.

(b) Réciproquement, supposons que f admette une extension holomorphe à un domaine Ω contenant $\mathscr{X}$. Ce domaine contient un ensemble compact de la forme $U \exp iQ \cdot o$, où Q est une boule fermée de centre 0 de rayon positif ε. D'après les inégalités de Cauchy,

$$\begin{aligned}\|A_\lambda(f)\| &\leqslant \frac{M(\widetilde{f},Q)}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}} e^{-\varepsilon\|\lambda\|} \\ &\leqslant M(\widetilde{f},Q)\sqrt{B}\,(1+\|\lambda\|)^{N/2} e^{-\varepsilon\|\lambda\|}.\end{aligned}$$

(c) La démonstration de (ii) est analogue. $\square$

***V.2.4. Proposition* (Formule de Gutzmer).** — *Soient $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, $z \in \Omega$, $z = \gamma \cdot o$. Alors*

$$\int_U |f(g \cdot z)|^2 dg = \sum_{\lambda \in P_0^+} d_\lambda \|A_\lambda(f)\|^2 \varphi_\lambda(\gamma^* \gamma).$$

(dg désigne la mesure de Haar normalisée de U.)

Démonstration. — C'est une conséquence des relations d'orthogonalité de Schur. En effet la série de Laurent de f s'écrit

$$\begin{aligned} f(g \cdot z) &= \sum_{\lambda \in P_0^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda((g\gamma^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big) \\ &= \sum_{\lambda \in P_O^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda|\pi_\lambda(\gamma^{*-1})u_\lambda. \end{aligned}$$

C'est une somme de fonctions orthogonales dans $L^2(U)$, et

$$\int_U |\big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|\pi_\lambda(\gamma^{*-1})u_\lambda)|^2 dg = \frac{1}{d_\lambda} \|A_\lambda\|^2 \|\pi_\lambda(\gamma^{*-1})u_\lambda\|^2.$$

Nous avons vu au cours de la démonstration de la proposition V.2.1 que

$$\|\pi_\lambda(\gamma^{*-1})u_\lambda\|^2 = \varphi_\lambda(\gamma^*\gamma).$$

La formule annoncée s'en déduit. □

Soit $\widehat{\omega}$ l'enveloppe convexe de ω, et posons

$$\widetilde{\Omega} = U \exp \widehat{\omega} \cdot o.$$

***V.2.5. Théorème*.** — *Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors*

$$f(z) = \sum_{\lambda \in P_0^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω. De plus la série converge uniformément sur tout compact de $\widetilde{\Omega}$, et sa somme est un prolongement holomorphe de f à $\widetilde{\Omega}$.

Démonstration. — Soit Q un ensemble compact invariant par W contenu dans ω. Son enveloppe convexe $\widehat{Q}$ est contenue dans $\widehat{\omega}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que, si B_ε désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon ε dans $\mathfrak{a}$, le compact $Q_\varepsilon = Q + B_\varepsilon$ soit contenu dans ω. Soit $z \in U \exp \widehat{Q} \cdot o$,

$$z = g \cdot o, \ g = \gamma \exp H \quad (\gamma \in U, \ H \in \widehat{Q}).$$

Observons que

$$\|\pi_\lambda(g^{-1})\| \leqslant e^{h_{\widehat{Q}}(-\lambda)}.$$

De cette inégalité et des inégalités de Cauchy (théorème V.2.1), nous déduisons la majoration suivante

$$|\big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big)| \leqslant e^{h_{\widehat{Q}}(-\lambda)}\frac{M(f,Q_\varepsilon)}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}}e^{-h_{Q_\varepsilon}(-\lambda)}.$$

Puisque $h_{\widehat{Q}} = h_Q$ et que

$$h_{Q_\varepsilon}(-\lambda) = h_Q(-\lambda) + \varepsilon\|\lambda\|,$$

nous obtenons

$$d_\lambda|\big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big)| \leqslant \frac{d_\lambda}{\sqrt{c(\lambda+\rho)}}M(f,Q_\varepsilon)e^{-\varepsilon\|\lambda\|}.$$

Il existe des constantes A, B, M, N telles que

$$d_\lambda \leqslant A(1+\|\lambda\|)^M, \quad \frac{1}{c(\lambda+\rho)} \leqslant B(1+\|\lambda\|)^N.$$

Finalement, pour $g \in U\exp\widehat{Q}$,

$$d_\lambda|\big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big) \leqslant A\sqrt{B}\,M(f,Q_\varepsilon)(1+\|\lambda\|)^{(M+\frac{N}{2})}e^{-\varepsilon\|\lambda\|}.$$

Par suite la série converge uniformément sur $U\exp\widehat{Q}$. $\square$

Références. — [**Las78b, Las78a**].

V.3. Espaces hilbertiens invariants de fonctions holomorphes

Soit Ω un domaine de $\mathscr{X}_\mathbb{C}$ qui est invariant par U. Nous allons étudier les sous-espaces hilbertiens de $\mathscr{O}(\Omega)$ qui sont invariants par U. Pour cela nous allons utiliser les résultats du chapitre III. L'involution θ associée à la paire (U,K) peut être étendue en une involution antiholomorphe de $U_\mathbb{C}$, que nous noterons $\widetilde{\theta}$, et $\widetilde{\theta}(K_\mathbb{C}) = K_\mathbb{C}$. On en déduit une involution antiholomorphe τ de $\mathscr{X}_\mathbb{C}$: pour $z = g\cdot o \in \mathscr{X}_\mathbb{C}$ $(g \in U_\mathbb{C})$, on pose

$$\tau(z) = \widetilde{\theta}(g)\cdot o.$$

Tout point z de Ω s'écrit

$$z = \gamma\exp H\cdot o \qquad (\gamma\in U,\ H\in\omega),$$

et alors

$$\tau(z) = \theta(\gamma)\exp H\cdot o.$$

Par suite $\tau(\Omega) = \Omega$, et pour tout $z\in\Omega$ il existe $g\in U$ tel que

$$\tau(z) = g\cdot z.$$

En effet $g = \widetilde{\theta}(\gamma)\gamma^{-1}$ convient. Ainsi la condition (H) (*cf.* section 2 du chapitre III) est vérifiée et, d'après le théorème III.2.6, l'action de U dans $\mathscr{O}(\Omega)$, qui est définie par

$$\big(T(g)f\big)(z) = f(g^{-1}\cdot z) \qquad (g\in U),$$

est sans multiplicité.

Soit $(\pi_\lambda, \mathscr{W}_\lambda)$ une représentation sphérique de la paire (U, K) de plus haut poids restreint λ. Pour $w \in \mathscr{W}_\lambda$ posons

$$f_w(z) = \big(\pi_\lambda(g^{-1})w | u_\lambda\big) \qquad (z = g \cdot o,\ g \in U_{\mathbb{C}}).$$

La fonction f_w est holomorphe sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ et

$$|f_w(z)| \leqslant \|\pi_\lambda(g^{-1})\| \|w\|.$$

Ainsi l'espace

$$\mathscr{H}_\lambda = \{f_w \mid w \in \mathscr{W}_\lambda\},$$

muni de la norme $\|f_w\| = \|w\|$, est sous-espace hilbertien de $\mathscr{O}(\mathscr{X}_{\mathbb{C}})$. Il est invariant par U et irréductible. Notons que

$$T(g)f_w = f_{\pi_\lambda(g)w} \qquad (g \in U).$$

Le noyau reproduisant de $\mathscr{H}_\lambda$ est égal à

$$\mathscr{K}_\lambda(z_1, z_2) = \varphi_\lambda(g_2^* g_1) \qquad (z_1 = g_1 \cdot o,\ z_2 = g_2 \cdot o).$$

Soit en effet $\{w_j\}$ une base orthonormée de $\mathscr{W}_\lambda$. Les fonctions $\psi_j = f_{w_j}$ constituent une base orthonormée de $\mathscr{H}_\lambda$, et

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_\lambda(z_1, z_2) &= \sum_{j=1}^{d_\lambda} \psi_j(z_1)\overline{\psi_j(z_2)} \\ &= \sum_{j=1}^{d_\lambda} \big(\pi(g_1^{-1})w_j | u_\lambda\big)\overline{\big(\pi(g_2^{-1})w_j | u_\lambda\big)} \\ &= \big(\pi(g_2^{*-1})u_\lambda | \pi(g_1^{*-1})u_\lambda\big) = \varphi_\lambda(g_2^* g_1).\end{aligned}$$

Nous allons voir que tout sous-espace hilbertien $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}(\Omega)$ qui est irréductible est égal à l'un des espaces $\mathscr{H}_\lambda$. Pour cela il suffit de montrer que la représentation de U dans $\mathscr{H}$ est sphérique. Soit λ le plus haut poids de cette représentation, et soit f un vecteur de plus haut poids. La fonction f vérifie

$$\begin{aligned}&dT(H)f = \lambda(H)f \qquad (H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}),\\ &dT(X)f = 0 \qquad (X \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}).\end{aligned}$$

Fixons $z_0 = \exp H \cdot o \in \Omega$ $(H \in \omega)$. Notons que z_0 est invariant par M. Pour $a \in \exp \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $n \in \exp \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ voisins de l'élément neutre, $z = na \cdot z_0 \in \Omega$, et, pour $m \in M$, puisque M normalise $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$,

$$f(m \cdot z) = f(mna \cdot z_0) = f(mnm^{-1}a \cdot z_0) = f(a \cdot z_0) = f(z).$$

Ainsi f est invariante par M au voisinage de z_0. La fonction f étant holomorphe et Ω étant connexe, f est invariante par M. D'après le théorème IV.4.2 la représentation de U dans $\mathscr{H}$ est sphérique.

V.3.1. Théorème. — *Soit $\mathscr{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathscr{O}(\Omega)$ invariant par U.*

(i) *Soit $\lambda \in P^+$. S'il existe $w_0 \in \mathscr{W}_\lambda$ non nul tel que $f_{w_0} \in \mathscr{H}$, alors $\mathscr{H}_\lambda \subset \mathscr{H}$ et il existe une constante $c = c(\lambda, \mathscr{H}) > 0$ telle que*

$$\|f_w\|^2_{\mathscr{H}} = c\|w\|^2 \qquad (w \in \mathscr{W}_\lambda).$$

(ii) *Soient $\lambda, \lambda' \in P^+$ distincts tels que $\mathscr{H}_\lambda$ et $\mathscr{H}_{\lambda'} \subset \mathscr{H}$. Alors $\mathscr{H}_\lambda$ et $\mathscr{H}_{\lambda'}$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathscr{H}$.*

(iii) *Appelons spectre de $\mathscr{H}$ l'ensemble*

$$\Lambda(\mathscr{H}) = \{\lambda \in P^+ \mid \mathscr{H}_\lambda \subset \mathscr{H}\}.$$

Le noyau reproduisant de $\mathscr{H}$ est égal à

$$\mathscr{K}(z_1, z_2) = \sum_{\lambda \in \Lambda(\mathscr{H})} \frac{1}{c(\lambda, \mathscr{H})} \varphi_\lambda(g_2^* g_1) \qquad (z_1 = g_1 \cdot o,\ z_2 = g_2 \cdot o).$$

Cet énoncé est essentiellement une reformulation des résultats présentés dans la section 2 du chapitre III dans la situation particulière que nous considérons dans cette section.

Soit Ω un domaine de $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ invariant par U. Nous avons vu qu'il peut s'écrire

$$\Omega = G \exp(i\omega) \cdot o.$$

Et soit p une fonction continue > 0 sur Ω qui est invariante par U. Notons $\mathscr{B}^2(\Omega, p)$ l'espace de Bergman pondéré des fonctions holomorphes f sur Ω telles que

$$\|f\|^2 = \int_\Omega |f(z)|^2 p(z)\, dm(z) < \infty,$$

où m désigne une mesure sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ qui est invariante par $U_{\mathbb{C}}$. Nous savons que $\mathscr{B}^2(\Omega, p)$ est un espace hilbertien de fonctions holomorphes. Nous allons donner une expression de son noyau reproduisant. Rappelons la formule d'intégration suivante (théorème IV.2.4) : soit f une fonction définie sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ par rapport à la mesure m. Alors

$$\int_{\mathscr{X}_C} f(z)\, dm(z) = c \int_U \int_{i\mathfrak{a}} f(g \exp H \cdot o) dg J(H) dH,$$

où

$$J(H) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \operatorname{sh} 2\langle \alpha, H \rangle,$$

et c est une constante positive.

V.3.2. Théorème. — *Le noyau reproduisant de l'espace de Bergman pondéré $\mathscr{B}^2(\Omega, p)$ est égal à*

$$K(z_1, z_2) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \frac{1}{\widetilde{p}(\lambda)} \varphi_\lambda(\overline{g}_2^* g_1) \quad (z_1 = g_1 \cdot o,\ z_2 = g_2 \cdot o),$$

où

$$\widetilde{p}(\lambda) = c \int_{i\omega} p(\exp H \cdot o) \varphi_\lambda(\exp 2H) J(H) dH.$$

Démonstration. — Il résulte de la formule de Gutzmer (Proposition V.2.4) que, pour $f \in \mathscr{O}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |f(z)|^2 p(z)\, dm(z) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \widetilde{p}(\lambda) \|\widehat{f}(\lambda)\|^2.$$

Par suite, avec les notations de la section V.3,

$$c(\lambda, \mathscr{H}) = d_\lambda \widetilde{p}(\lambda),$$

où $\mathscr{H} = \mathscr{B}^2(\Omega, p)$, et le résultat annoncé est une conséquence du théorème V.3.1. $\square$

V.4. Équation de la chaleur et transformation de Bargmann-Segal

Considérons d'abord le cas du groupe $\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. L'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur est le suivant : étant donnée une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, le problème est de déterminer une fonction u continue sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}$, périodique de période 2π en x, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}$, vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \big((t,x) \in\,]0, \infty[\times \mathbb{R}\big), \\ u(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Ce problème de Cauchy admet une solution unique qui est donnée par un produit de convolution :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_t(x-y) f(y) dy,$$

où γ_t est le noyau de Gauss du cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

$$\gamma_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \cos nx.$$

Le noyau de Gauss γ_t vérifie les propriétés suivantes :

$$\gamma_t(x) > 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_t(x) dx = 1, \tag{2}$$

$$\forall\, \eta > 0,\ \lim_{t \to 0} \int_\eta^\pi \gamma_t(x) dx = 0. \tag{3}$$

La solution u s'écrit aussi

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{-n^2 t} e^{inx},$$

où les nombres $a_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f,

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Pour $t > 0$ la fonction γ_t admet une extension holomorphe à $\mathbb{C}$. En effet la série

$$\gamma_t(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t} e^{inz}$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, et γ_t est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$. De même, pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ admet une extension holomorphe à $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$.

Pout $t > 0$ fixé, la transformation de Bargmann-Segal B_t est l'application qui à une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ associe la fonction holomorphe

$$\begin{aligned} F(z) = (B_t f)(z) &= u(t,z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \gamma_t(z-x) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{-n^2 t} e^{inz}. \end{aligned}$$

Soit $\gamma_t^1(y)$ le noyau de Gauss de $\mathbb{R}$,

$$\gamma_t^1(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-y^2/4t},$$

et posons, pour $z = x + iy$,

$$p_t(z) = 2\gamma_{2t}^1(2y).$$

Soit $\mathscr{F}_t$ l'espace de Bergman pondéré des fonctions holomorphes F sur $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ pour lesquelles

$$\|F\|_t^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 p_t(y) dx dy < \infty.$$

V.4.1. Proposition. — *La transformation de Bargmann-Segal est un isomorphisme unitaire de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sur $\mathscr{F}_t$.*

Démonstration. — Avec les notations précédentes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x+iy)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(f)|^2 e^{-2n^2 t} e^{-2ny}.$$

La transformée de Fourier de γ_t^1 est égale à $e^{-\mu^2 t}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_t^1(y) e^{-i\mu y} dy = e^{-\mu^2 t} \qquad (\mu \in \mathbb{R}),$$

et cette formule est valable pour $\mu \in \mathbb{C}$. Par suite, pour $\mu = -in$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_t(y) e^{-2ny} dy = \int_{-\infty}^{\infty} 2\gamma_{2t}^1(2y) e^{-2ny} dy = e^{2n^2 t}.$$

Finalement

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,x+iy)|^2 p_t(y)dxdy = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n(f)|^2 = \|f\|_2.$$

Le résultat annoncé s'en déduit. □

Revenons maintenant à la situation générale. Pour pouvoir écrire l'équation de la chaleur sur un espace symétrique compact $\mathscr{X} = U/K$, nous allons d'abord définir l'opérateur de Laplace. Considérons sur $\mathfrak{u}$ un produit scalaire euclidien invariant par la représentation adjointe :

$$\big(\mathrm{Ad}(g)X \,|\, \mathrm{Ad}(g)Y\big) = (X|Y).$$

Ceci revient à dire que les opérateurs $\mathrm{ad}\, X$ $(X \in \mathfrak{u})$ sont antisymétriques, ou aussi que, pour $X, Y, Z \in \mathfrak{u}$,

$$([X,Y]|Z) = (X|[Y,Z]).$$

On suppose de plus que $d\theta$ est une isométrie pour ce produit scalaire. Par exemple, si $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(n)$, le produit scalaire défini par

$$(X|Y) = \mathrm{tr}(XY^*) = -\,\mathrm{tr}(XY)$$

possède ces propriétés. Ce produit scalaire permet d'identifier $\mathfrak{u}$ et son dual $\mathfrak{u}^*$. Si $\{T_i\}$ est une base de $\mathfrak{u}$ on pose

$$g_{ij} = (T_i|T_j), \qquad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Si $(\pi, \mathscr{W})$ est une représentation de U on pose

$$\Omega_\pi = \sum_{i,j} g^{ij} d\pi(T_i) \circ d\pi(T_j).$$

L'opérateur Ω_π ne dépend pas de la base choisie, et Ω_π commute à la représentation π,

$$\Omega_\pi \circ \pi(g) = \pi(g) \circ \Omega_\pi.$$

Si $(\pi, \mathscr{W})$ est une représentation $\mathbb{C}$-linéaire, de dimension finie et irréductible, il résulte du lemme de Schur que Ω_π est un multiple de l'identité : il existe un nombre complexe κ_π tel que

$$\Omega_\pi = \kappa_\pi \,\mathrm{Id}\,.$$

Si $(\pi_\lambda, \mathscr{W}_\lambda)$ est une représentation irréductible sphérique de plus haut poids restreint λ, on notera

$$\kappa_{\pi_\lambda} = \kappa(\lambda).$$

Rappelons que ρ désigne la demi-somme des racines positives,

$$\rho = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} m_\alpha \alpha.$$

V.4.2. Proposition. — $\kappa(\lambda) = -\big(\|\lambda\|^2 + 2(\rho|\lambda)\big).$

Démonstration

(a) La décomposition de $\mathfrak{u}$,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{q}$$

est orthogonale. Rappelons que $\mathfrak{l}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$, et $\mathfrak{q}$ celui de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}$. On peut prolonger le produit scalaire euclidien $(\cdot|\cdot)$ en un produit scalaire hermitien sur $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$. Pour $H \in i\mathfrak{a}$, les opérateurs $\operatorname{ad} H$ sont autoadjoints. Il en résulte que les sous-espaces radiciels $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ sont deux à deux orthogonaux. On construit une base orthonormée de $\mathfrak{u}$ en choisissant comme dans la démonstration du théorème IV.1.1 des vecteurs $X_\alpha^j \in \mathfrak{u}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ tels que

– les vecteurs

$$Y_\alpha^j = \tfrac{1}{2}\,(X_\alpha^j - X_{-\alpha}^j)$$

constituent une base orthonormée de $\mathfrak{l}$,

– les vecteurs

$$Z_\alpha^j = \frac{1}{2i}(X_\alpha^j + X_\alpha^j)$$

constituent une base orthonormée de $\mathfrak{q}$.

On choisit de plus une base orthonormée $H_1, \ldots, H_r$ de $\mathfrak{a}$, et une base orthonormée $\{W_j\}$ de $\mathfrak{m}$.

On peut prolonger le produit scalaire en une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique β sur $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$. Avec la choix qui a été fait des vecteurs X_α^j on montre que

$$\beta(X_\alpha^j, X_\alpha^k) = 0,\ \ \beta(X_\alpha^j, X_{-\alpha}^k) = -2\delta_{jk}.$$

De plus, pour $H \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}\beta([X_\alpha^j, X_{-\alpha}^j], H) &= \beta(X_\alpha^j, [X_{-\alpha}^j, H]) \\ &= -\alpha(H)\beta(X_\alpha^j, X_{-\alpha}^j) = 2\alpha(H).\end{aligned}$$

(b) Soit $(\pi, \mathscr{W})$ une représentation de dimension finie de U. Si $\{T_i\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{u}$, alors

$$\Omega_\pi = \sum_i \big(d\pi(T_i)\big)^2.$$

Si la représentation est irréductible, pour tout vecteur $v \in \mathscr{W}$,

$$\Omega_\pi v = \sum_i \big(d\pi(T_i)\big)^2 v = \kappa_\pi v.$$

Nous supposons que $(\pi, \mathscr{W})$ soit irréductible et sphérique. Soit λ son plus haut poids restreint, et soit v un vecteur de plus haut poids. Pour $H \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$,

$$d\pi(H)v = \lambda(H)v,$$

et, pour $X \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$,

$$d\pi(X)v = 0.$$

Pour $H \in \mathfrak{a}$,

$$\lambda(H) = -i(i\lambda|H).$$

Par suite
$$\sum_{j=1}^{r}\big(d\pi(H_j)\big)^2 v = -\|\lambda\|^2 v.$$
D'autre part
$$\begin{aligned}\big(d\pi(Y_\alpha^j)\big)^2+\big(d\pi(Z_\alpha^j)\big)^2 &= -\tfrac{1}{2}\left(d\pi(X_\alpha^j)d\pi(X_{-\alpha}^j)+d\pi(X_{-\alpha})d\pi(X_\alpha^j)\right)\\ &= -d\pi(X_{-\alpha}^j)d\pi(X_\alpha^j)-\tfrac{1}{2}\,d\pi([X_\alpha^j,X_{-\alpha}^j]).\end{aligned}$$
De ces relations il résulte que, puisque $\lambda([X_\alpha^j,X_{-\alpha}^j])=2(\lambda|\alpha)$,
$$\sum_{\alpha\in\Delta^+}\sum_{j=1}^{m_\alpha}\Big(\big(d\pi(Y_\alpha^j)\big)^2+\big(d\pi(Z_\alpha^j)\big)^2\Big)v=-\sum_{\alpha\in\Delta^+}m_\alpha(\lambda|\alpha)v=-2(\lambda|\rho)v.$$
Finalement
$$\Omega_\pi=-\big(\|\lambda\|^2+2(\lambda|\rho)\big)I. \qquad \square$$

Au produit scalaire que nous avons considéré sur $\mathfrak{u}$ on associe un opérateur de Laplace D sur $\mathscr{X}$. Soit π la représentation de U dans $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{X})$ définie par
$$\big(\pi(g)f\big)(x)=f(g^{-1}\cdot x).$$
On pose
$$D=\Omega_\pi.$$
C'est un opérateur différentiel du second ordre elliptique qui est invariant par U.

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=Du,\\ u(x,0)&=f(x).\end{aligned}$$
La donnée initiale f est une fonction continue sur $\mathscr{X}$, et la fonction inconnue u est continue sur $[0,\infty[\times\mathscr{X}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,\infty[\times\mathscr{X}$. Sa solution est unique et est fournie par une convolution avec le noyau de Gauss γ_t de l'espace symétrique $\mathscr{X}$ qui est défini pour $t>0$ par
$$\gamma_t(g)=\sum_{\lambda\in P^+}d_\lambda e^{t\kappa(\lambda)}\varphi_\lambda(g).$$
La fonction γ_t est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et même analytique. Elle est bi-invariante par K et vérifie les propriétés suivantes :

(1) $$\gamma_t(g)>0,$$

(2) $$\int_U\gamma_t(g)dg=1,$$

(3) $$\gamma_s*\gamma_t=\gamma_{s+t},$$

(4) $$\text{pour tout voisinage } V \text{ de } e,\ \lim_{t\to 0}\int_{U\smallsetminus V}\gamma_t(g)dg=0.$$

La solution du problème de Cauchy est donnée par la convolution suivante

$$u(t,x) = \int_U f(g)\gamma_t(g^{-1}x)dg.$$

(La fonction f est considérée comme une fonction sur U invariante à droite par K.)

Si

$$\sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big)$$

est la série de Fourier de f (qui peut ne pas converger), alors, pour $t > 0$,

$$u(t,x) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda e^{t\kappa(\lambda)} \big(\pi_\lambda(g^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big).$$

D'après la proposition V.2.3, pour $t > 0$ la fonction γ_t admet une extension holomorphe à $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$. De même pour $t > 0$ la fonction $x \mapsto u(t,x)$ admet une extension holomorphe à $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$.

La transformation de Bargmann-Segal B_t ($t > 0$) associe à une fonction $f \in L^2(\mathscr{X})$ la fonction $B_t f \in \mathscr{O}(\mathscr{X}_{\mathbb{C}})$ définie par

$$B_t f(x) = u(t,x).$$

Dans [**Ste99**] il est montré que $\mathscr{F}_t$ est un espace de Bergman pondéré. Nous allons en donner une démonstration qui diffère sensiblement de l'originale.

Considérons le noyau de Gauss γ_t^1 de l'espace riemannien symétrique non compact $\mathscr{Y} = G/K$. Il admet la représentation de Fourier suivante

$$\gamma_t^1(g) = \int_{i\mathfrak{a}} e^{-t(\|\mu\|^2 + \|\rho\|^2)} \psi_\mu(g) \frac{d\mu}{|c(\mu)|^2},$$

où ψ_μ est la fonction sphérique de la paire (G,K) définie par

$$\psi_\mu(g) = \int_K e^{\langle i\mu - \rho, \mathscr{H}(gk)\rangle} dk.$$

Notons que

$$\int_{\mathscr{Y}} \gamma_t^1(x)\psi_{-\mu}(x)\, dm_1(x) = e^{-t(\|\mu\|^2 - \|\rho\|^2)},$$

où m_1 est une mesure sur $\mathscr{Y}$ invariante par G. La formule d'intégration suivante se démontre comme celle que nous avons établie pour la mesure m sur $\mathscr{X}$ invariante par G :

$$\int_{\mathscr{Y}} f(x)\, dm_1(x) = c_1 \int_K \int_{i\mathfrak{a}} f(k \exp H \cdot o) dk J_1(H) dH,$$

où

$$J_1(H) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \operatorname{sh}\langle \alpha, H\rangle dH,$$

et c_1 est une constante positive. Nous supposerons que les mesures m et m_1 sont normalisées de telle sorte que $c = c_1$. Ainsi

$$c \int_{i\mathfrak{a}} \gamma_t^1(\exp H)\psi_{-\mu}(\exp H) J_1(H) dH = e^{-t(\|\mu\|^2 + \|\rho\|^2)}.$$

Pour $z = g \exp H \cdot o \in \mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ ($g \in U$, $H \in i\mathfrak{a}$), posons

$$p_t(z) = 2^r \gamma^1_{2t}(g \exp 2H \cdot o) \qquad (g \in U,\, H \in i\mathfrak{a}).$$

V.4.3. Théorème. — *La transformation de Bargmann-Segal B_t est un isomorphisme unitaire de $L^2(\mathscr{X})$ sur l'espace de Bergman pondéré $\mathscr{B}^2(\mathscr{X}_{\mathbb{C}}, p_t)$.*

Démonstration. — Notons $\mathscr{F}_t$ l'image par B_t de $L^2(\mathscr{X})$, et munissons $\mathscr{F}_t$ de la norme définie par

$$\|F\| = \|f\|_2 \text{ si } F = B_t f.$$

C'est l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ de la forme

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_U f(g)\gamma_t(g^{-1}z)dg \\ &= \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda e^{t\kappa(\lambda)} \big(\pi_\lambda(g_0^{-1})A_\lambda(f)|u_\lambda\big), \end{aligned}$$

où $z = g_0 \cdot o$ ($g_0 \in U_{\mathbb{C}}$), et $f \in L^2(\mathscr{X}_{\mathbb{C}})$. C'est un espace hilbertien invariant de fonctions holomorphes sur $\mathscr{X}_{\mathbb{C}}$ dont le noyau reproduisant est donné par

$$\begin{aligned} K_t(z,w) &= \int_U \gamma_t(g^{-1}\cdot z)\overline{\gamma_t(g^{-1}\cdot w)}dg \\ &= \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda e^{2t\kappa(\lambda)} \varphi_\lambda(g_2^* g_1) \\ &= \gamma_{2t}(g_2^* g_1) \qquad (z = g_1 \cdot o,\, w = g_2 \cdot o). \end{aligned}$$

Déterminons maintenant le noyau reproduisant de $\mathscr{B}(\mathscr{X}_{\mathbb{C}}, p_t)$ en utilisant les théorèmes V.3.1 et V.3.2. Calculons pour cela $\widetilde{p}_t(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_t(\lambda) &= c\int_{i\mathfrak{a}} p_t(\exp H \cdot o)\varphi_\lambda(\exp iH)J(H)dH \\ &= c2^r \int_{i\mathfrak{a}} \gamma^1_{2t}(\exp 2H)\varphi_\lambda(\exp 2H)J(H)dH. \end{aligned}$$

Puisque $J(H) = J_1(2H)$,

$$\widetilde{p}_t(\lambda) = c\int_{i\mathfrak{a}} \gamma^1_{2t}(\exp H)\varphi_\lambda(\exp H)J_1(H)dH.$$

Pour $H \in i\mathfrak{a}$,

$$\varphi_\lambda(\exp H) = \psi_{-i(\lambda+\rho)}(\exp H),$$

par suite

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_t(\lambda) &= e^{-2t(-\|\lambda+\rho\|^2 + \|\rho\|^2)} \\ &= e^{2t(\|\lambda\|^2 + 2(\lambda|\rho)} \\ &= e^{-2t\kappa(\lambda)}. \end{aligned}$$

Par conséquent le noyau reproduisant de $\mathscr{B}^2(\mathscr{X}_{\mathbb{C}}, p_t)$ est égal à

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_t(z,w) &= \sum_{\lambda\in P^+} d_\lambda \frac{1}{\widetilde{p}_t(\lambda)}\varphi_\lambda(g_2^*g_1)\\ &= \sum_{\lambda\in P^+} d_\lambda e^{2t\kappa(\lambda)}\varphi_\lambda(g_2^*g_1)\\ &= \gamma_{2t}(g_2^*g_1) = K_t(z,w) \qquad (z = g_1\cdot o,\ w = g_2\cdot o).\end{aligned}$$

Les espaces hilbertiens de fonctions holomorphes $\mathscr{F}_t$ et $\mathscr{B}^2(\mathscr{X}_{\mathbb{C}}, p_t)$, ayant le même noyau reproduisant, sont égaux. □

Références. — [**Hal94, Hal97a, Hal97b**], [**Ste99**].

Références

[FT99] J. Faraut & E.G.F. Thomas – « Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions », *Journal of Lie Theory* **9** (1999), p. 383–402.

[Hal94] B. Hall – « The Segal-Bargmann "coherent state" transform for compact Lie groups », *J. Funct. Anal.* **122** (1994), p. 103–151.

[Hal97a] ______, « Phase space bounds for quantum mechanics on a compact Lie group », *Comm. Math. Phys.* **184** (1997), p. 233–250.

[Hal97b] ______, « The inverse Segal-Bargmann transform for compact Lie groups », *J. Funct. Anal.* **143** (1997), p. 98–116.

[Hel84] S. Helgason – *Groups and geometric analysis*, Academic Press, 1984.

[Hör79] L. Hörmander – *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland, 1979.

[Kob97] T. Kobayashi – « Multiplicity free branching laws for unitary highest weight modules », in *Proceedings of the Symposium on Representation theory held at Saga, Kyushu* (K. Mimachi, éd.), 1997, p. 9–17.

[Las78a] M. Lassalle – « Séries de Laurent des fonctions holomorphes dans la complexification d'un espace symétrique compact », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **11** (1978), p. 167–210.

[Las78b] ______, « Sur la transformation de Fourier-Laurent dans un groupe analytique complexe réductif », *Ann. Inst. Fourier* **28** (1978), p. 115–138.

[MT86] R. Mneimné & F. Testard – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, Paris, 1986.

[Phe66] R.R. Phelps – *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, 1966.

[Ste99] M.L. Stenzel – « The Segal-Bargmann transform on a symmetric space of compact type », *J. Funct. Anal.* **165** (1999), p. 44–58.

[Sug90] M. Sugiura – *Unitary representations and harmonic analysis*, North-Holland/Kodansha, 1990.

[Tak94] M. Takeuchi – *Modern spherical functions*, Transl. Math. Monographs, vol. 135, Amer. Math. Soc, 1994.

[Tho79] E.G.F. Thomas – « Integral representations of invariant reproducing kernels », in *Proceedings, Bicentennial Congress Wiskundig genootshap (Amsterdam 1978) Part II*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979, p. 391–404.

[Tho83] ———, *The theorem of Bochner-Schwartz-Godement for generalized Gelfand pairs*, North Holland, 1983.

[Tho94] ———, « Integral representations in conuclear cones », *J. convex analysis* **1** (1994), p. 225–258.

J. Faraut, Université Pierre et Marie Curie, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France
E-mail : faraut@math.jussieu.fr • *Url :* http://www.math.jussieu.fr/~faraut/