Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 51–82

RÉDUCTION AU BORD D'UN PROBLÈME MODÈLE DE KELVIN

par

Pierre Bolley & Pham The Lai

En hommage à Jean Leray

Résumé. — On s'intéresse à la formulation de Neumann-Kelvin du problème d'hydrodynamique navale concernant l'avancement d'un navire dans une mer calme de profondeur uniforme finie. La recherche d'une fonction de Green pour ce problème est ramenée par réduction sur la surface libre à un problème pseudo-différentiel pour lequel on présente un cadre et une méthode de résolution.

***Abstract* (Boundary reduction of a Kelvin-like problem).** — We are interested in the Neumann-Kelvin formulation of the marine hydrodynamics problem of a moving ship in a quiet sea of uniform finite depth. Looking for a Green function for this problem we are brought to a reduced pseudo-differential problem on the free boundary, for which we give a framework and a solving method.

Introduction

Le problème d'hydrodynamique navale concernant l'avancement d'un navire dans une mer calme est important tant du point de vue théorique que numérique, puisqu'il conduit en particulier au calcul de la résistance de vagues. Sous des hypothèses physiques classiques, la modélisation de ce problème se traduit par un système d'équations non linéaires dont une formulation linéarisée est celle de Neumann-Kelvin. Le cadre de cette modélisation dans le cas d'une mer de profondeur finie est le suivant (*cf.* par exemple [**WL**], [**N**], [**K**]...).

Étant donné un solide se déplaçant d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse V_0 dans un fluide de profondeur finie, limité inférieurement par un fond fixe et supérieurement par une surface libre, on considère un repère direct $Ozxy$ lié au solide, Oz étant l'axe vertical ascendant, Oxy le plan horizontal de la surface

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35J25, 35S99, 76B20, 76B99.
Mots clefs. — Hydrodynamique navale, problème de Neumann-Kelvin, résistance de vagues.

libre au repos, l'axe Ox étant dirigé selon la vitesse d'avance du solide. Le fond du fluide est supposé défini par l'équation $z = -h$ avec h réel > 0.

On suppose que le fluide est parfait, incompressible et qu'il n'est soumis qu'à des forces de gravité et de pression, et que l'écoulement est irrotationnel et stationnaire dans ce repère. Il existe alors un potentiel ϕ du champ de vitesses qui est harmonique et qui vérifie l'intégrale première de Bernoulli dans le domaine fluide. Par ailleurs l'écoulement est caractérisé par la présence d'une surface libre décrite par une équation $z = \eta(x, y)$ et sur laquelle on a une condition cinématique et une condition dynamique.

Ces deux inconnues ϕ et η vérifient alors un système d'équations non linéaires dans lequel l'inconnue ϕ est définie dans le domaine fluide qui dépend de l'inconnue η. Ces équations sont en fait simplifiées en faisant certaines hypothèses de linéarisation.

On suppose qu'au voisinage de la surface libre

$$\phi = -V_0 x + \varphi$$

où φ est une petite perturbation et que la hauteur de surface libre η est du même ordre. Par linéarisation, on obtient un système d'équations linéaires que doit vérifier φ. Cependant dans ces équations linéarisées, on ne voit aucune dissymétrie entre le comportement de φ à l'amont $x > 0$ et celui à l'aval $x < 0$. Or à l'amont, l'écoulement incident n'est pas perturbé par la présence du solide et on impose donc dans un sens à préciser, la condition de radiation

$$\lim_{x \to +\infty} \nabla\varphi = 0.$$

On est alors conduit au problème suivant dit de Neumann-Kelvin

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2)\varphi = 0, & \text{dans } -h < z < 0, \\ \partial_n \varphi = V_0 n \cdot \overrightarrow{x}, & \text{sur } \Gamma, \\ \nu \partial_z \varphi + \partial_x^2 \varphi = 0, & \text{sur } z = 0, \\ \partial_z \varphi = 0, & \text{sur } z = -h, \\ \text{condition de radiation}, \end{cases}$$

où n est le vecteur normal unitaire extérieur au bord Γ du solide et

$$\nu = \frac{g}{V_0^2}$$

est le paramètre de Kelvin dans lequel g est l'accélération de la pesanteur.

Il est en fait important de connaître une fonction de Green associé à ce problème tant du point de vue théorique que du point de vue numérique, en particulier pour élaborer des méthodes adaptées aux domaines non bornés.

Pour chercher une fonction de Green G des variables (z, x, y) avec $-h \leqslant z \leqslant 0$, dépendant du point source (z', x', y') avec $-h < z' < 0$, il est commode de poser (*cf.* [**K**] par exemple)

$$G = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) + H$$

où

$$r = ((z-z')^2+(x-x')^2+(y-y')^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_1 = ((z+z'+2h)^2+(x-x')^2+(y-y')^2)^{1/2},$$

et de chercher la composante H de G solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2)H = 0, & \text{dans } -h < z < 0, \\ \nu\partial_z H + \partial_x^2 H = g, & \text{sur } z = 0, \\ \partial_z H = 0, & \text{sur } z = -h, \\ \text{condition de radiation}, \end{cases}$$

où la fonction g vérifie en particulier pour tous $s < 2$ et $\alpha \in \mathbb{N}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + x^2 + y^2)^s \, |\partial_{xy}^\alpha g(x,y)|^2 \, dxdy < +\infty.$$

On cherche à résoudre ce problème par une méthode de réduction sur la surface $z = 0$.

Par analogie avec le problème de Cauchy pour l'opérateur des ondes $\partial_z^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$ dans le demi-espace $z \leqslant 0$ pour lequel on peut exprimer de façon classique la solution en fonction des données de Cauchy sur la surface $z = 0$ (*cf.* [**SR**], [**T**]...), on montre (*cf.* [**BP**]) que pour toute distribution tempérée $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ des variables (x, y), il existe une unique fonction $u \in C^2([-h, 0]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ des variables (z, x, y) solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0, & \text{dans } -h < z < 0, \\ u = v, & \text{sur } z = 0, \\ \partial_z u = 0, & \text{sur } z = -h, \end{cases}$$

qui s'exprime en fonction de v sous la forme

$$u = C(\cdot; D_{xy})v \qquad \text{dans } -h < z < 0,$$

où l'opérateur de Poisson $C(z; D_{xy})$ est un opérateur en (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ dépendant de z, dont le symbole est défini pour $z \in [-h, 0]$ et $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ par

$$C(z; (\xi, \eta)) = \frac{\cosh(|(\xi, \eta)|(z + h))}{\cosh(|(\xi, \eta)|h)}.$$

En particulier l'opérateur de Dirichlet-Neumann $N(D_{xy})$ associé à ce problème, défini par

$$N(D_{xy})v = \partial_z u(0, \cdot, \cdot),$$

est l'opérateur en (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ ayant pour symbole

$$N((\xi, \eta)) = |(\xi, \eta)| \tanh(|(\xi, \eta)|h).$$

En revenant au problème pour H, on voit ainsi que la recherche d'une fonction H solution du problème aux limites dans $-h \leqslant z \leqslant 0$ peut être ramenée par réduction sur la surface $z = 0$, à la recherche d'une fonction v vérifiant une condition de radiation et solution de l'équation

$$P(D_{xy})v = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

dans laquelle

$$P(D_{xy}) = \nu N(D_{xy}) + \partial_x^2.$$

Dans le travail présenté ici, on donne un cadre et une méthode pour la résolution de ce problème dans $\mathbb{R}^2$. On montre en particulier (*cf.* Théorème 1) que si

$$\nu h > 1,$$

il existe une unique fonction v de type Kelvin, c'est-à-dire de la forme

$$v(x,y) = C \log\left(1 + \frac{x^2}{\nu h - 1} + \frac{y^2}{\nu h}\right)^{1/2} + k(x,y)$$

où C est une constante et $k \in L^\infty(\mathbb{R}_x, L^2(\mathbb{R}_y))$ avec $\lim_{x\to+\infty} \|k(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, solution de l'équation

$$P(D_{xy})v = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Plus précisément pour cette solution v, la constante C est donnée par $C = c\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy$ où c est une constante universelle.

De plus $\partial_{xy}^\alpha v \in L^\infty(\mathbb{R}_x, L^2(\mathbb{R}_y))$ avec $\lim_{x\to+\infty} \|\partial_{xy}^\alpha v(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha| \geqslant 1$.

Ces résultats, qui seront en fait précisés et généralisés en dimension $d \geqslant 2$ pour les variables horizontales (*cf.* paragraphe 1), sont obtenus de la façon suivante. Le cadre de résolution de l'équation $P(D_{xy})v = g$ dans $\mathbb{R}^2$ dépend de l'ensemble Σ des zéros du symbole $P((\xi,\eta))$ de l'opérateur $P(D_{xy})$, cet ensemble étant la réunion de trois composantes disjointes $\Sigma = \Sigma^- \cup \Sigma^0 \cup \Sigma^+$ où $\Sigma^0 = \{0\}$, Σ^- et Σ^+ sont des courbes non bornées de $\mathbb{R}^2$ (*cf.* paragraphe 2). Pour préciser les solutions de type Kelvin de l'équation homogène $P(D_{xy})v = 0$, on est conduit (*cf.* paragraphe 3) à étudier des distributions dont les transformées de Fourier sont des densités de carré intégrable sur Σ^- et Σ^+ dans l'esprit des travaux de [**AH**]. Pour chercher des solutions v de l'équation $P(D_{xy})v = g$, on utilise au voisinage des surfaces Σ^- et Σ^+ (*cf.* paragraphe 4) une méthode d'absorption limite dans l'esprit des travaux de [**V**], alors qu'au voisinage de Σ^0 (*cf.* paragraphe 5) on utilise une méthode de convolution par une solution fondamentale associée à l'opérateur.

On montrera dans un prochain travail que l'on peut obtenir l'existence et l'unicité d'une fonction de Green G du problème de Neumann-Kelvin en profondeur finie, ayant un comportement bien précis à l'amont de type Kelvin, en construisant sa composante H à l'aide de sa trace v sur la surface libre $z = 0$ obtenue par résolution de l'équation $P(D_{xy})v = g$ (*cf.* paragraphe 7).

Des constructions de ce type ont été faites aussi par d'autres auteurs comme par exemple [**E**], [**L**], [**Gu**], [**D**]... en profondeur infinie. On note en particulier que, suivant une technique mise au point par [**L**] pour le problème bidimensionnel, [**Gu**], [**D**] n'utilisent pas une méthode d'absorption limite pour l'existence de v et résolvent directement une équation du type $P(D_{xy})v = g$ (pour un opérateur $P(D_{xy})$ correspondant à $h = \infty$) par transformation de Fourier et division dans l'espace des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^2$.

Pour terminer, on doit ajouter que les traités de référence sur ce sujet donnent différentes formes analytiques de telles fonctions de Green (*cf.* par exemple [**WL**], [**N**], [**K**]...).

1. Notations et résultats

En notant $x = (x_1, x')$ la variable de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$, où $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, on désigne par $L^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ l'espace des fonctions définies dans $\mathbb{R}^d$ considérées comme fonctions intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue dx_1 dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dx' dans $\mathbb{R}^{d-1}$, et par $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ l'espace défini de manière semblable.

Pour simplifier on note

$$L(\mathbb{R}^d) = L^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1})) \qquad \text{et} \qquad L^*(\mathbb{R}^d) = L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{d-1})),$$

ces espaces étant munis des normes associées à leurs définitions.

On introduit aussi les deux sous-espaces de l'espace $L^*(\mathbb{R}^d)$ définis par

$$\overset{\circ +}{L}{}^*(\mathbb{R}^d) = \{v \in L^*(\mathbb{R}^d);\ \lim_{x_1 \to +\infty} \|v(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = 0\},$$

$$\overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^d) = \{v \in L^*(\mathbb{R}^d);\ \lim_{|x_1| \to +\infty} \|v(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = 0\}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, on désigne par $L^2_s(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions v telles que $(1 + |\cdot|^2)^{s/2} v$ appartienne à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans $\mathbb{R}^d$, cet espace étant muni de la norme associée à sa définition.

En particulier pour $s > 1/2$ on a les inclusions

$$L^2_s(\mathbb{R}^d) \subset L(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad L^*(\mathbb{R}^d) \subset L^2_{-s}(\mathbb{R}^d).$$

Étant donnés deux réels ν et h positifs tels que

$$\nu h > 1$$

on considère la fonction P définie dans $\mathbb{R}^d$ par

$$P(\xi) = \nu |\xi| \tanh(|\xi| h) - \xi_1^2.$$

Cette fonction P est indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^d$ et ses dérivées ont des majorations de la forme $|\partial_\xi^\alpha P(\xi)| \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|)^{2-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leqslant 2$ et tendent vers 0 à l'infini pour $|\alpha| \geqslant 3$. On peut ainsi lui associer l'opérateur $P(D_x)$ linéaire continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en posant pour $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$P(D_x)v = F^{-1}(P\widehat{v})$$

où de façon générale on note $\widehat{\ }$ ou F la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^d$ définie par l'intégrale

$$\widehat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} v(x)dx$$

pour les fonctions v à décroissance rapide de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ou pour les fonctions intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans $\mathbb{R}^d$ de l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$, et par dualité pour les distributions tempérées de l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et on note F^{-1} la transformation de Fourier inverse.

Le cadre de résolution de l'équation

$$P(D_x)v = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d$$

dépend de l'ensemble Σ des zéros de la fonction P.

Cet ensemble qui est étudié dans le paragraphe 2, est la réunion de trois composantes disjointes

$$\Sigma = \Sigma^- \cup \Sigma^0 \cup \Sigma^+$$

où $\Sigma^0 = \{0\}$, Σ^- et Σ^+ sont des hypersurfaces non bornées de $\mathbb{R}^d$ représentées respectivement par des équations de la forme $\xi_1 = -p(\xi')$ et $\xi_1 = +p(\xi')$ et sur lesquelles on définit des mesures $d\sigma^-$ et $d\sigma^+$.

Pour préciser les solutions de type Kelvin de l'équation homogène $P(D_x)v = 0$, on est conduit dans le paragraphe 3 à étudier des distributions dont les transformées de Fourier sont des densités sur Σ.

Pour chercher des solutions v de l'équation $P(D_x)v = g$ lorsque le support de $\widehat{g}$ ne contient que les composantes Σ^- et Σ^+, on utilise dans le paragraphe 4 une méthode d'absorption limite par rapport à ces surfaces dans le cadre des espaces $L(\mathbb{R}^d)$ pour g et $L^*(\mathbb{R}^d)$ pour v.

Par contre pour des seconds membres g dont le support de la transformée de Fourier ne contient que la composante Σ^0, l'existence des solutions v est étudiée dans le paragraphe 5 à partir de la convolution par une solution fondamentale E^0 de l'opérateur $P^0(D_x)$ dans le cadre des espaces $L^2_s(\mathbb{R}^d)$, où P^0 désigne la partie principale de P au voisinage de 0.

En notant H la fonction de Heaviside dans $\mathbb{R}$ et $\widetilde{E}^0$ la fonction régulière définie dans $\mathbb{R}^d$ par

$$\widetilde{E}^0(x) = -\frac{1}{2\pi(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)^{1/2}} \log\left(1 + \frac{x_1^2}{\nu h - 1} + \frac{x_2^2}{\nu h}\right)^{1/2}, \qquad \text{si } d = 2,$$

$$\widetilde{E}^0(x) = \frac{1}{4\pi(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)} \left(1 + \frac{x_1^2}{\nu h - 1} + \frac{|x'|^2}{\nu h}\right)^{-1/2}, \qquad \text{si } d = 3,$$

on montre alors dans le paragraphe 6, le résultat suivant d'existence et d'unicité de solutions de type Kelvin de l'équation $P(D_x)v = g$ dans $\mathbb{R}^d$ pour $d = 2$ et 3 :

Théorème 1. — *Pour $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > 3/2$ et $d = 2$ ou 3, il existe une unique fonction $v \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ solution de l'équation*

$$P(D_x)v = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d$$

et ayant un comportement asymptotique de la forme

$$v = C\widetilde{E}^0 + k$$

où C est une constante et $k \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$.

Plus précisément cette solution a le comportement asymptotique suivant

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)dy\widetilde{E}^0(x) + \frac{iH(-x_1)}{(2\pi)^{d-1}}\Big(\int_{\Sigma^-}\frac{e^{i(x,\sigma^-)}\widehat{g}(\sigma^-)}{|\nabla P(\sigma^-)|}d\sigma^- + \int_{\Sigma^+}\frac{e^{i(x,\sigma^+)}\widehat{g}(\sigma^+)}{|\nabla P(\sigma^+)|}d\sigma^+\Big) + r(x)$$

où $r \in \overset{\circ}{L^*}(\mathbb{R}^d)$.

Si de plus $\partial^\alpha_x g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ pour un $\alpha \neq 0$, alors $\partial^\alpha_x v \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$.

Pour $d \geqslant 4$, le résultat se simplifie sous la forme :

Théorème 2. — *Pour $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > d/2$ et $d \geqslant 4$, il existe une unique fonction $v \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$ solution de l'équation*

$$P(D_x)v = g \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

Plus précisément cette solution a le comportement asymptotique suivant

$$v(x) = \frac{iH(-x_1)}{(2\pi)^{d-1}}\Big(\int_{\Sigma^-}\frac{e^{i(x,\sigma^-)}\widehat{g}(\sigma^-)}{|\nabla P(\sigma^-)|}d\sigma^- + \int_{\Sigma^+}\frac{e^{i(x,\sigma^+)}\widehat{g}(\sigma^+)}{|\nabla P(\sigma^+)|}d\sigma^+\Big) + r(x)$$

où $r \in \overset{\circ}{L^*}(\mathbb{R}^d)$.

Si de plus $\partial^\alpha_x g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ pour un $\alpha \neq 0$, alors $\partial^\alpha_x v \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$.

2. L'ensemble Σ des zéros de P

Tout d'abord cet ensemble a la décomposition suivante :

Proposition 1. — *Il existe une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ à valeurs réelles > 0 telle que l'ensemble Σ des zéros de P se décompose sous la forme*

$$\Sigma = \Sigma^- \cup \Sigma^0 \cup \Sigma^+$$

où

$$\Sigma^0 = \{0\} \quad \text{et} \quad \Sigma^\pm = \{\xi \in \mathbb{R}^d; \xi_1 = \pm p(\xi'), \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}\}.$$

De plus,

(1) 0 *est le seul point critique de* p *et il est non dégénéré,*
(2) $p_0 = \inf_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} p(\xi') > 0$,
(3) $\sup_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} |\nabla p(\xi')| < +\infty$.

Démonstration. — On écrit

$$P(\xi) = |\xi'|^2 - \phi(|\xi|)$$

où ϕ est la fonction définie dans $[0, +\infty[$ par

$$\phi(t) = t^2 - \nu t \tanh(th).$$

Cette fonction ϕ est indéfiniment dérivable, admet un unique zéro dans $[0, +\infty[$ noté $p_0 > 0$ et est strictement croissante de $[p_0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ avec $\phi'(t) > 0$ pour $t \in [p_0, +\infty[$. De plus $\lim_{t\to+\infty} t^{-2}\phi(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\phi'(t) = 2$.

On en déduit que la fonction φ réciproque de la restriction à $[p_0, +\infty[$ de la fonction ϕ est indéfiniment dérivable et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[p_0, +\infty[$ avec $\varphi'(s) > 0$ pour $s \geqslant 0$, $\lim_{s\to+\infty} s^{-1/2}\varphi(s) = 1$ et $\lim_{s\to+\infty} s^{1/2}\varphi'(s) = 1/2$.

Ainsi $\phi(|\xi|) = |\xi'|^2$ si et seulement si $|\xi| = 0$ ou $|\xi| = \varphi(|\xi'|^2)$. Or $|\xi| = \varphi(|\xi'|^2)$ si et seulement si $\xi_1^2 = \big(\varphi(|\xi'|^2)\big)^2 - |\xi'|^2$, c'est-à-dire aussi si et seulement si

$$\xi_1^2 = (p(\xi'))^2$$

où p est la fonction définie dans $\mathbb{R}^{d-1}$ par

$$p(\xi') = \big(\nu\varphi(|\xi'|^2)\tanh\big(\varphi(|\xi'|^2)h\big)\big)^{1/2} = \Big(\big(\varphi(|\xi'|^2)\big)^2 - |\xi'|^2\Big)^{1/2}.$$

Cette fonction p est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que

$$\inf_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} p(\xi') = p_0 > 0 \qquad \lim_{|\xi'|\to+\infty} |\xi'|^{-1/2} p(\xi') = 1.$$

Comme

$$p(\xi')\nabla p(\xi') = \nu\xi'\varphi'(|\xi'|^2)\left(\tanh\big(\varphi(|\xi'|^2)h\big) + \frac{\varphi(|\xi'|^2)h}{\cosh^2(\varphi(|\xi'|^2)h)}\right)$$

alors

$$\lim_{|\xi'|\to+\infty} |\xi'|^{1/2}|\nabla p(\xi')| = \frac{\nu}{2}$$

et 0 est le seul point critique de p. De plus 0 est un point critique non dégénéré.

Comme $P(\xi) = |\xi'|^2 - \phi(|\xi|)$, on en déduit la décomposition annoncée de l'ensemble Σ. De plus par cette écriture, on note que pour tous $\xi_1 > 0$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$\partial_{\xi_1} P(\xi_1, \xi') = -\phi'(|\xi|)\xi_1|\xi|^{-1} < 0. \qquad \square$$

On précise maintenant le comportement de la fonction P près des hypersurfaces Σ^- et Σ^+ par la factorisation suivante :

Proposition 2. — *Il existe des fonctions P^- et $P^+ \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que*
$$P(\xi_1,\xi') = (\xi_1 + p(\xi'))P^-(\xi_1,\xi') = (\xi_1 - p(\xi'))P^+(\xi_1,\xi')$$
avec
$$P^-(\xi_1,\xi') = -P^+(-\xi_1,\xi').$$
De plus,

(1) $\inf_{\substack{\xi_1\geqslant\gamma_1\\ \xi'\in\mathbb{R}^{d-1}}} (1+\xi_1)^{-1}|P^+(\xi_1,\xi')| > 0$ *pour tout* $\gamma_1 > 0$,

(2) $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\partial_\xi^\alpha P^+(\xi)| < +\infty$ *pour tout* $|\alpha| \geqslant 1$,

(3) $P^+(p(\xi'),\xi') < 0$ *pour tout* $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Démonstration. — En développant $P(\cdot,\xi')$ par la formule de Taylor à l'ordre 1, on peut écrire
$$P(\xi_1,\xi') = (\xi_1 - p(\xi'))P^+(\xi_1,\xi')$$
où P^+ est la fonction C^∞ dans $\mathbb{R}^d$ définie par
$$P^+(\xi_1,\xi') = \int_0^1 \partial_{\xi_1}P(t\xi_1 + (1-t)p(\xi'),\xi')dt.$$

En particulier
$$P^+(p(\xi'),\xi') = \partial_{\xi_1}P(p(\xi'),\xi') < 0$$
comme on l'a noté précédemment. Les autres propriétés se montrent facilement. □

On précise enfin le comportement de P au voisinage de Σ^0 à l'aide de sa partie principale P^0 qui est le polynôme quadratique elliptique (puisque $\nu h > 1$) défini par
$$P^0(\xi) = (\nu h - 1)\xi_1^2 + \nu h|\xi'|^2.$$

Proposition 3

(1) *Il existe une fonction $b \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on ait*
$$P(\xi) = P^0(\xi) + |\xi|^4 b(\xi),$$
avec de plus $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}(1+|\xi|)|b(\xi)| < +\infty$.

(2) *Pour tout* $0 < \gamma_1 < p_0 \left(= \inf_{\xi'\in\mathbb{R}^{d-1}} p(\xi')\right)$, *on a* $\inf_{\substack{|\xi_1|\leqslant\gamma_1\\ \xi\neq 0}} \dfrac{1+|\xi|}{|\xi|^2}|P(\xi)| > 0$.

Démonstration. — En développant tanh par la formule de Taylor à l'ordre 3, la différence
$$P(\xi) - P^0(\xi) = \nu|\xi|(\tanh(|\xi|h) - |\xi|h)$$
peut être écrite sous la forme
$$P(\xi) - P^0(\xi) = |\xi|^4 b(\xi)$$
où
$$b(\xi) = \nu h^3 \int_0^1 (1-t)^2 \frac{2\cosh^2(t|\xi|h) - 3}{\cosh^4(t|\xi|h)}dt$$
qui est une fonction C^∞ dans $\mathbb{R}^d$ et vérifie l'estimation annoncée. Les autres propriétés se montrent facilement. □

3. Transformation de Fourier de densités sur Σ

On définit les mesures de surface $d\sigma^-$ et $d\sigma^+$ sur Σ^- et Σ^+ respectivement à partir des représentations de Σ^- et Σ^+ par la fonction p et de la mesure de Lebesgue $d\xi'$ dans $\mathbb{R}^{d-1}$. Ainsi

$$\int_{\Sigma^\pm} a^\pm(\sigma^\pm)d\sigma^\pm = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} a^\pm(\pm p(\xi'),\xi')J(\xi')d\xi'$$

où

$$J(\xi') = (1+|\nabla p(\xi')|^2)^{1/2},$$

pour des fonctions $a^\pm$ définies sur $\Sigma^\pm$ telles que les seconds membres soient bien définis.

On désigne alors par $L^2(\Sigma^-)$ et $L^2(\Sigma^+)$ les espaces des fonctions définies et de carré intégrable sur Σ^- et Σ^+ par rapport aux mesures $d\sigma^-$ et $d\sigma^+$ respectivement, ces espaces étant munis de la norme associée à leur définition.

Par exemple si $a^+ \in L^2(\Sigma^+)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a en particulier

$$\left|\int_{\Sigma^+} \varphi(\sigma^+)a^+(\sigma^+)d\sigma^+\right| \leqslant \sup_{\xi'\in\mathbb{R}^{d-1}} \sqrt{J(\xi')}\|a^+\|_{L^2(\Sigma^+)} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\Big((1+|\xi'|)^{d/2}|\varphi(\xi)|\Big).$$

Ainsi $v = a^+d\sigma^+$ définit une distribution de l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$(v,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\Sigma^+}\varphi(\sigma^+)a^+(\sigma^+)d\sigma^+$$

et l'application $a^+ \to a^+d\sigma^+$ est continue de $L^2(\Sigma^+)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ muni de sa topologie faible*.

Concernant la transformation de Fourier des densités de carré intégrable sur Σ^- et Σ^+, on a la caractérisation suivante :

Théorème 3. — *Pour une distribution v de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$v \in L^*(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{v}$ a son support contenu dans Σ,*

(2) *il existe un unique couple de densités $a^- \in L^2(\Sigma^-)$ et $a^+ \in L^2(\Sigma^+)$ telles que*

$$\widehat{v} = a^-d\sigma^- + a^+d\sigma^+.$$

Si de plus $v \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{v}$ a son support contenu dans Σ, alors $v = 0$.

Démonstration. — On adapte les techniques de [**AH**], [**H**] (théorèmes 7-1-26 et 7-1-27).

(1) Étant données $a^- \in L^2(\Sigma^-)$ et $a^+ \in L^2(\Sigma^+)$, on va montrer que la distribution

$$v = F^{-1}(a^-d\sigma^- + a^+d\sigma^+)$$

appartient à $L^*(\mathbb{R}^d)$ et vérifie les propriétés suivantes :

(3) $\lim_{x_1\to-\infty}\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$ et $\lim_{x_1\to+\infty}\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$ existent et sont égales,

(4) il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant que de ∇p) telle que

$$C\|v\|^2_{L^*(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|a^-\|^2_{L^2(\Sigma^-)} + \|a^+\|^2_{L^2(\Sigma^+)} \leqslant (2\pi)^{d+1} \lim_{|x_1|\to+\infty} \|v(x_1,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

(1-1) On suppose d'abord que a^- et a^+ sont à support compact.

La distribution $a^- d\sigma^- + a^+ d\sigma^+$ étant alors une distribution à support compact, sa transformée de Fourier inverse v est donnée par l'intégrale

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\int_{\Sigma^-} e^{i(x,\sigma^-)} a^-(\sigma^-)d\sigma^- + \int_{\Sigma^+} e^{i(x,\sigma^+)} a^+(\sigma^+)d\sigma^+\right),$$

soit

$$v(x_1,x') = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i(x',\xi')}\left(e^{-ix_1p(\xi')}a^-(-p(\xi'),\xi') + e^{+ix_1p(\xi')}a^+(+p(\xi'),\xi')\right)J(\xi')d\xi'.$$

Par la relation de Parseval, on en déduit que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ on a l'égalité

$$\|v(x_1,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = (2\pi)^{-d-1}\|e^{-ix_1p}A^- + e^{+ix_1p}A^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

où $A^\pm$ est la fonction de $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ définie par

$$A^\pm(\xi') = a^\pm(\pm p(\xi'),\xi')J(\xi').$$

En particulier $v \in L^*(\mathbb{R}^d)$.

(1-2) Dans le cas général soit $(a_n^-)_n$ et $(a_n^+)_n$ des suites de fonctions à support compact convergeant vers a^- et a^+ dans $L^2(\Sigma^-)$ et $L^2(\Sigma^+)$ respectivement, et soit v_n la distribution définie par $v_n = F^{-1}(a_n^- d\sigma^- + a_n^+ d\sigma^+)$.

D'après les préliminaires et la continuité de F^{-1} dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la suite $(v_n)_n$ converge vers v dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. D'après l'égalité établie dans l'étape précédente, la suite $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^*(\mathbb{R}^d)$. Elle converge alors dans $L^*(\mathbb{R}^d)$, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et par conséquent $v \in L^*(\mathbb{R}^d)$.

De plus à la limite, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ on a aussi l'égalité

$$\|v(x_1,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = (2\pi)^{-d-1}\|e^{-ix_1p}A^- + e^{+ix_1p}A^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

avec les notations précédentes.

(1-3) Cette égalité implique alors les propriétés 3 et 4. En effet comme

$$\|e^{-ix_1p}A^- + e^{+ix_1p}A^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = \|A^-\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} + \|A^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} + 2\Re e\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2ix_1p(\xi')}A^-(\xi')\overline{A^+(\xi')}d\xi',$$

on déduit d'une part que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\|v(x_1,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant (2\pi)^{-d}\left(\|A^-\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} + \|A^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\right)$$

et d'autre part que

$$\lim_{|x_1|\to+\infty}\|v(x_1,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = (2\pi)^{-d-1}\left(\|A^-\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} + \|A^+\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\right)$$

puisque par la méthode de la phase stationnaire on a

$$\lim_{|x_1|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2ix_1p(\xi')}A^-(\xi')\overline{A^+(\xi')}d\xi'=0.$$

On en déduit les inégalités de la propriété 4, puisqu'en notant $R=\sup_{\xi'\in\mathbb{R}^{d-1}}J(\xi')$, on a

$$\|a^\pm\|^2_{L^2(\Sigma^\pm)}\leqslant\|A^\pm\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\leqslant R\|a^\pm\|^2_{L^2(\Sigma^\pm)}.$$

(2) Inversement soit $v\in L^*(\mathbb{R}^d)$ tel que $\widehat{v}$ ait son support contenu dans Σ. On va montrer qu'il existe un couple de densités $a^-\in L^2(\Sigma^-)$ et $a^+\in L^2(\Sigma^+)$ telles que

$$\widehat{v}=a^-d\sigma^-+a^+d\sigma^+.$$

Pour cela on régularise $\widehat{v}$ par convolution en posant $\widehat{v}_\varepsilon=\widehat{v}*\theta_\varepsilon$ où $\theta_\varepsilon(\xi)=\varepsilon^{-d}\theta(\varepsilon^{-1}\xi)$ pour une fonction $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, paire, à support dans la boule unité et telle que $\int_{\mathbb{R}^d}\theta(\xi)d\xi=1$.

(2-1) On estime tout d'abord $\widehat{v}_\varepsilon$. Comme par l'égalité de Parseval

$$\|\widehat{v}_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}=(2\pi)^{-d}\|\widehat{\widehat{v}_\varepsilon}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}=(2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d}|v(-x)|^2|\widehat{\theta}(\varepsilon x)|^2dx$$

et comme il existe une constante C telle que pour tous $x_1\in\mathbb{R}$ et $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$ on ait

$$|\widehat{\theta}(x_1,x')|\leqslant\frac{C}{1+x_1^2+|x'|^2}\leqslant\frac{C}{1+x_1^2}$$

on en déduit que

$$\|\widehat{v}_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant(2\pi)^d\int_{\mathbb{R}}\frac{C}{1+\varepsilon^2x_1^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|v(-x_1,-x')|^2dx'\Big)dx_1\leqslant\frac{2^d\pi^{d+1}C}{\varepsilon}\|v\|^2_{L^*(\mathbb{R}^d)}.$$

(2-2) En supposant de plus que le support de $\widehat{v}$ est contenu dans Σ, on va en déduire que $\widehat{v}$ est représentée par deux densités $a^-\in L^2(\Sigma^-)$ et $a^+\in L^2(\Sigma^+)$.

Le support de $\widehat{v}_\varepsilon$ est alors contenu dans l'ensemble Σ_ε des points de $\mathbb{R}^d$ situés à une distance inférieure à ε de Σ. De plus en notant

$$\Sigma^0_\varepsilon=\{\xi\in\mathbb{R}^d;|\xi|\leqslant\varepsilon\}\quad\text{et}\quad\Sigma^\pm_\varepsilon=\{\xi=(\xi_1,\xi')\in\mathbb{R}^d;|\xi_1\mp p(\xi')|\leqslant R\varepsilon\},$$

les ensembles Σ^-_ε, Σ^0_ε et Σ^+_ε sont disjoints pour $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ pour un ε_0 assez petit, et on a

$$\Sigma_\varepsilon\subset\Sigma^-_\varepsilon\cup\Sigma^0_\varepsilon\cup\Sigma^+_\varepsilon.$$

Ainsi d'après l'estimation de l'étape précédente, il existe une constante $C>0$ telle que pour tous $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ on ait

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{v}_\varepsilon(\xi)\varphi(\xi)d\xi\Big|^2\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\Big(\int_{\Sigma^-_\varepsilon}|\varphi(\xi)|^2d\xi+\int_{\Sigma^0_\varepsilon}|\varphi(\xi)|^2d\xi+\int_{\Sigma^+_\varepsilon}|\varphi(\xi)|^2d\xi\Big)\|v\|^2_{L^*(\mathbb{R}^d)}.$$

Or

$$\int_{\Sigma^+_\varepsilon}|\varphi(\xi)|^2d\xi=\int_{-R\varepsilon}^{+R\varepsilon}\Big(\int_{R^{d-1}}|\varphi(p(\xi')+t,\xi')|^2J(\xi')d\xi'\Big)dt,$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon^+}|\varphi(\xi)|^2 d\xi = 2R\int_{R^{d-1}}|\varphi(p(\xi'),\xi')|^2 J(\xi')d\xi' = 2R\int_{\Sigma^+}|\varphi(\sigma^+)|^2 d\sigma^+.$$

On a de même

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon^-}|\varphi(\xi)|^2 d\xi = 2R\int_{\Sigma^-}|\varphi(\sigma^-)|^2 d\sigma^-.$$

Enfin par intégration en coordonnées polaires, on a (pour $d \geqslant 2$)

$$\int_{\Sigma_\varepsilon^0}|\varphi(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\varepsilon\int_{S^{d-1}}|\varphi(r\omega)|^2 dr d\omega$$

où $d\omega$ est la mesure de surface sur la sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$, d'où l'on déduit que

$$\frac{1}{\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Sigma_\varepsilon^0}|\varphi(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Comme $\widehat{v}_\varepsilon$ converge vers $\widehat{v}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ quand ε tend vers 0, il en résulte que

$$|(\widehat{v},\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}|^2 \leqslant 2RC\left(\int_{\Sigma^-}|\varphi(\sigma^-)|^2 d\sigma^- + \int_{\Sigma^+}|\varphi(\sigma^+)|^2 d\sigma^+\right)\|v\|^2_{L^*(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit alors la formule de représentation de $\widehat{v}$. □

En notant de façon générale $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus d'un espace normé X dans un espace normé Y, on déduit du théorème précédent le résultat suivant :

Corollaire 1. — *La restriction à $\Sigma^\pm$ de la transformation de Fourier définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se prolonge par continuité en un opérateur de $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), L^2(\Sigma^\pm))$.*

Démonstration. — Tout d'abord pour $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on remarque que la restriction de $\widehat{\varphi}$ à Σ^+ appartient à $L^2(\Sigma^+)$. Ensuite pour $a^+\in L^2(\Sigma^+)$, en notant v la distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ définie par $v = F^{-1}(a^+ d\sigma^+)$, on peut écrire

$$\left|\int_{\Sigma^+}\widehat{\varphi}(\sigma^+)a^+(\sigma^+)d\sigma^+\right| = (2\pi)^d|(v,\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}| \leqslant (2\pi)^d\|v\|_{L^*(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

Le théorème précédent et la propriété 4 donnée dans la démonstration assurent alors qu'il existe une constante C telle que pour tous $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $a^+\in L^2(\Sigma^+)$ on ait

$$\left|\int_{\Sigma^+}\widehat{\varphi}(\sigma^+)a^+(\sigma^+)d\sigma^+\right| \leqslant (2\pi)^d C\|a^+\|_{L^2(\Sigma^+)}\|\varphi\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

Cette inégalité permet de conclure. □

En particulier :

Corollaire 2. — *L'opérateur défini dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$g \longrightarrow \int_{\Sigma^\pm} \frac{e^{i(x,\sigma^\pm)}\widehat{g}(\sigma^\pm)}{|\nabla P(\sigma^\pm)|} d\sigma^\pm$$

se prolonge par continuité en un opérateur de $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), L^*(\mathbb{R}^d))$, encore noté par cette intégrale.

Démonstration. — Par définition de la mesure $d\sigma^+$ et la relation de Parseval dans $\mathbb{R}^{d-1}$

$$\left\| \int_{\Sigma^+} \frac{e^{i(x,\sigma^+)}\widehat{g}(\sigma^+)}{|\nabla P(\sigma^+)|} d\sigma^+ \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = (2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{|\widehat{g}(p(\xi'),\xi')|^2}{|\nabla P(p(\xi'),\xi')|^2} (1+|\nabla p(\xi')|^2) d\xi'.$$

Comme

$$|\nabla P(p(\xi'),\xi')|^2 = (1+|\nabla p(\xi')|^2)|P^+(p(\xi'),\xi')|^2$$

il existe donc d'après la proposition 2 une constante $C > 0$ telle que pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left\| \int_{\Sigma^+} \frac{e^{i(x,\sigma^+)}\widehat{g}(\sigma^+)}{|\nabla P(\sigma^+)|} d\sigma^+ \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} &\leqslant C \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{g}(p(\xi'),\xi')|^2 \left(1+|\nabla p(\xi')|^2\right)^{1/2} d\xi' \\ &= C\|\widehat{g}\|^2_{L^2(\Sigma^+)}.\end{aligned}$$

Le corollaire précédent permet de conclure. □

4. Principe d'absorption limite par rapport à Σ^- et Σ^+

On rappelle que Σ^+ est définie par l'équation $\xi_1 - p(\xi') = 0$ et que la fonction P admet la factorisation $P(\xi_1,\xi') = (\xi_1 - p(\xi'))P^+(\xi_1,\xi')$.

Pour $\varepsilon > 0$, on inverse alors dans un voisinage de Σ^+ la fonction P_ε définie dans $\mathbb{R}^d$ par $P_\varepsilon(\xi) = (\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon)P^+(\xi)$ en introduisant la fonction Q^+_ε définie dans $\mathbb{R}^d$ par

$$Q^+_\varepsilon(\xi) = \frac{\chi^+(\xi_1)}{(\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon)P^+(\xi)}$$

où χ^+ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$0 \leqslant \chi^+(\xi_1) \leqslant 1, \quad \chi^+(\xi_1) = 0 \quad \text{pour } \xi_1 \leqslant \gamma_1, \quad \chi^+(\xi_1) = 1 \quad \text{pour } \xi_1 \geqslant 2\gamma_1$$

pour une constante γ_1 telle que $0 < 2\gamma_1 < p_0 (= \inf_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} p(\xi'))$.

Pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g} \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire $g \in F^{-1}\left(C^\infty_0(\mathbb{R}^d)\right)$, on pose alors

$$R^+_\varepsilon g = F^{-1}\left(Q^+_\varepsilon \widehat{g}\right),$$

autrement dit pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$(R^+_\varepsilon g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)} Q^+_\varepsilon(\xi)\widehat{g}(\xi) d\xi.$$

En particulier l'application

$$\varepsilon \longmapsto R_\varepsilon^+ g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

est continue pour la topologie faible* de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Ce résultat de continuité peut être prolongé dans le cadre des espaces $L(\mathbb{R}^d)$ et $L^*(\mathbb{R}^d)$. Pour le montrer on va préciser la transformée de Fourier partielle inverse par rapport à ξ_1 de la fonction Q_ε^+.

De façon générale, on note par F_1 et F' les transformations de Fourier partielles par rapport à x_1 dans $\mathbb{R}$ et par rapport à x' dans $\mathbb{R}^{d-1}$respectivement, et par F_1^{-1} et F'^{-1} les transformations de Fourier inverses correspondantes.

Proposition 4. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\varepsilon > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ on ait*

$$|(F_1^{-1} Q_\varepsilon^+)(x_1, \xi')| \leqslant C$$

Démonstration. — On fixe une constante δ telle que $0 < \delta < p_0 - 2\gamma_1$ et pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ donné, on décompose l'intégrale définissant $\left(F_1^{-1} Q_\varepsilon^+\right)(x_1, \xi')$ en la somme des trois intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
J_1(\varepsilon, x_1, \xi') &= \int_{|\xi_1 - p(\xi')| \geqslant \delta} e^{ix_1\xi_1} \frac{\chi^+(\xi_1)}{(\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon) P^+(\xi_1, \xi')} d\xi_1, \\
J_2(\varepsilon, x_1, \xi') &= \int_{|\xi_1 - p(\xi')| \leqslant \delta} e^{ix_1\xi_1} \frac{1}{(\xi - p(\xi') + i\varepsilon) P^+(p(\xi'), \xi')} d\xi_1, \\
J_3(\varepsilon, x_1, \xi') &= \int_{|\xi_1 - p(\xi')| \leqslant \delta} e^{ix_1\xi_1} \frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon} \Big(\frac{1}{P^+(\xi_1, \xi')} - \frac{1}{P^+(p(\xi'), \xi')} \Big) d\xi_1.
\end{aligned}$$

On rappelle qu'il existe des constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que pour $\xi_1 \geqslant \gamma_1$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ on ait $|P^+(\xi_1, \xi')| \geqslant C_1(1 + \xi_1)$ et $|\partial_{\xi_1}^{\alpha_1} P^+(\xi_1, \xi')| \leqslant C_2$ pour $\alpha_1 = 1, 2$.

(1) On majore la première intégrale sous la forme

$$\begin{aligned}
|J_1(\varepsilon, x_1, \xi')| &\leqslant \frac{1}{C_1} \Big(\int_{\gamma_1}^{p(\xi') - \delta} \frac{d\xi_1}{(p(\xi') - \xi_1)\xi_1} + \int_{p(\xi') + \delta}^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - p(\xi'))\xi_1} \Big) \\
&= \frac{1}{C_1 p(\xi')} \log \frac{(p(\xi') - \delta)(p(\xi') + \delta)(p(\xi') - \gamma_1)}{\delta^2 \gamma_1}.
\end{aligned}$$

(2) Pour estimer la seconde intégrale, on introduit une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, paire, telle que $\chi(\xi_1) = 1$ pour $|\xi_1| \leqslant \delta$ et $\chi(\xi_1) = 0$ pour $|\xi_1| \geqslant 2\delta$, et on décompose

$$\int_{|\xi_1| \leqslant \delta} e^{ix_1\xi_1} \frac{1}{\xi_1 + i\varepsilon} d\xi_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\xi_1} \frac{\chi(\xi_1)}{\xi_1 + i\varepsilon} d\xi_1 - \int_{\delta \leqslant |\xi_1| \leqslant 2\delta} e^{ix_1\xi_1} \frac{\chi(\xi_1)}{\xi_1 + i\varepsilon} d\xi_1.$$

Comme pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix_1\xi_1} \chi(\xi_1)}{\xi_1 + i\varepsilon} d\xi_1 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon(x_1 - y_1)} H(-(x_1 - y_1)) (F_1\chi)(y_1) dy_1 \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |(F_1\chi)(y_1)| dy_1$$

où H est la fonction de Heaviside, on en déduit que

$$|J_2(\varepsilon, x_1, \xi')| \leqslant C_1^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |(F_1\chi)(y_1)| dy_1 + \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} |\chi(\xi_1)| d\xi_1 \right).$$

(3) Pour estimer la troisième intégrale, en écrivant

$$J_3(\varepsilon, x_1, \xi') = \int_{p(\xi')-\delta}^{p(\xi')+\delta} \frac{e^{ix_1\xi_1}}{\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon}(\xi_1 - p(\xi'))S(\xi_1, \xi')d\xi_1$$

où

$$S(\xi_1, \xi') = -\int_0^1 \frac{\partial_{\xi_1} P^+(t\xi_1 + (1-t)p(\xi'), \xi')}{(P^+(t\xi_1 + (1-t)p(\xi'), \xi'))^2}dt,$$

on a

$$|J_3(\varepsilon, x_1, , \xi')| \leqslant 2\delta C_2 C_1^{-2}. \qquad \square$$

On peut en déduire le prolongement des opérateurs R_ε^+ à l'espace $L(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Proposition 5

(1) *Pour $\varepsilon > 0$, l'opérateur R_ε^+ défini sur le sous-espace $F^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ par*

$$R_\varepsilon^+ g = F^{-1}\left(Q_\varepsilon^+ \widehat{g}\right)$$

se prolonge de façon unique en un opérateur de $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), L^*(\mathbb{R}^d))$ encore noté R_ε^+.

(2) *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\varepsilon > 0$ et $g \in L(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\|R_\varepsilon^+ g\|_{L^*(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

(3) *L'application*

$$\varepsilon \longmapsto R_\varepsilon^+ :]0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), L^*(\mathbb{R}^d))$$

est continue pour la topologie normée de $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), L^*(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. — Pour $\varepsilon > 0$, $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^d$ et $g \in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ on a par définition

$$\begin{aligned}
&(R_\varepsilon^+ g)(x_1, x') \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i(x',\xi')}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\xi_1} Q_\varepsilon^+(\xi_1, \xi')\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_1 y_1}(F'g)(y_1, \xi')dy_1\Big)d\xi_1\Big)d\xi' \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i(x',\xi')}\Big(\int_{\mathbb{R}} (F_1^{-1}Q_\varepsilon^+)(x_1 - y_1, \xi')(F'g)(y_1, \xi')dy_1\Big)d\xi'.
\end{aligned}$$

(1 et 2) Par l'égalité de Parseval et l'estimation de la proposition 4, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\varepsilon > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$ et $g \in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$, on ait

$$\begin{aligned}
\|(R_\varepsilon^+ g)(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}}\int_{\mathbb{R}} \|(F_1^{-1}Q_\varepsilon^+)(x_1 - y_1, \cdot)(F'g)(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}dy_1 \\
&\leqslant \frac{C}{(2\pi)^{(d-1)/2}}\int_{\mathbb{R}} \|(F'g)(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}dy_1 = C\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Les conclusions 1 et 2 du théorème se déduisent alors de cette estimation et de la densité du sous-espace $F^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ dans l'espace $L(\mathbb{R}^d)$.

(3) Pour $0 < \varepsilon < \eta$, $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ on a la majoration uniforme suivante :

$$|\left(F^{-1}Q_\varepsilon^+\right)(x_1,\xi') - \left(F^{-1}Q_\eta^+\right)(x_1,\xi')| \leqslant \frac{\eta-\varepsilon}{2\pi C_1}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - p(\xi')^2 + \varepsilon^2} = \frac{\eta-\varepsilon}{2\varepsilon C_1}.$$

Comme précédemment on en déduit que pour $0 < \varepsilon < \eta$, $x_1 \in \mathbb{R}$ et $g \in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ on a

$$\|(R_\varepsilon^+ g)(x_1,\cdot) - (R_\eta^+ g)(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant \frac{\eta-\varepsilon}{2\varepsilon C_1}\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

La conclusion 3 du théorème se déduit alors de cette estimation. □

On va maintenant montrer que pour $g \in L(\mathbb{R}^d)$, l'application

$$\varepsilon \longmapsto R_\varepsilon^+ g :]0,+\infty[\longrightarrow L^*(\mathbb{R}^d)$$

admet un prolongement faiblement* continu en 0. Pour cela on rappelle d'abord que lorsque ε tend vers 0 par valeurs > 0, les fonctions de la variable $\xi = (\xi_1,\xi')$ de $\mathbb{R}^d$ définies par $1/(\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon)$ ont une limite dans l'espace des distributions dans $\mathbb{R}^d$ notée

$$\frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i0}.$$

Par conséquent pour $g \in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$,

$$\left(Q_\varepsilon^+\widehat{g}\right)(\xi) \left(= \frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon}\frac{\chi^+(\xi_1)\widehat{g}(\xi)}{P^+(\xi)}\right)$$

tend faiblement* dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers

$$\frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i0}\frac{\chi^+(\xi_1)\widehat{g}(\xi)}{P^+(\xi)}$$

quand ε tend vers 0 par valeurs > 0.

En notant Q^+ la distribution dans $\mathbb{R}^d$ définie par

$$Q^+(\xi) = \frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i0}\frac{\chi^+(\xi_1)}{P^+(\xi)},$$

on a alors le résultat suivant :

Théorème 4

(1) *L'opérateur R^+ défini sur le sous-espace $F^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ par*

$$R^+ g = F^{-1}\left(Q^+\widehat{g}\right)$$

se prolonge de façon unique en un opérateur de $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), L^*(\mathbb{R}^d))$ encore noté R^+.

(2) *Pour g et $f \in L(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$(R^+ g, f)_{L^*(\mathbb{R}^d)\times L(\mathbb{R}^d)} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (R_\varepsilon^+ g, f)_{L^*(\mathbb{R}^d)\times L(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. — Grâce aux résultats précédents, le théorème de Banach-Steinhaus assure que pour $g \in F^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ il existe un élément de $L^*(\mathbb{R}^d)$ que l'on notera R^+g tel que pour tout $f \in L(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$(R^+g, f)_{L^*(\mathbb{R}^d)\times L(\mathbb{R}^d)} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (R_\varepsilon^+ g, f)_{L^*(\mathbb{R}^d)\times L(\mathbb{R}^d)}$$

avec

$$\|R^+g\|_{L^*(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

L'application R^+ ainsi définie est linéaire continue du sous-espace $F^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ muni de la norme de l'espace $L(\mathbb{R}^d)$ dans $L^*(\mathbb{R}^d)$. Par densité elle se prolonge en une application linéaire continue de $L(\mathbb{R}^d)$ dans $L^*(\mathbb{R}^d)$ encore notée R^+ ayant les propriétés annoncées. □

Proposition 6. — *Pour $g \in L(\mathbb{R}^d)$, la fonction R^+g appartient à $L^*(\mathbb{R}^d)$ et vérifie l'équation*

$$P(D_x)\left(R^+g\right) = F^{-1}(\chi^+\widehat{g}) \qquad \textit{dans } \mathbb{R}^d.$$

Démonstration. — Pour $g \in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a par construction

$$\begin{aligned}
(P(D_x)(R^+g), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (R_\varepsilon^+ g, P(D_x)\varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (Q_\varepsilon^+ \widehat{g}, P\widehat{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{\chi^+(\xi_1)(\xi_1 - p(\xi'))}{\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon}\widehat{g}, \widehat{\varphi}\right)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}(\chi^+\widehat{g},\ \widehat{\varphi})_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\\
&= (F^{-1}(\chi^+\widehat{g}), \varphi)_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P(D_x)(R^+g) = F^{-1}(\chi^+\widehat{g}) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

et par densité cette égalité se prolonge pour $g \in L(\mathbb{R}^d)$. □

On va préciser maintenant le comportement asymptotique de $(R^+g)(x_1, \cdot)$ quand $|x_1|$ tend vers $+\infty$. Pour cela on donne tout d'abord une décomposition de R^+g pour $g \in F^{-1}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

D'une part en posant

$$\begin{aligned}
Q_{\varepsilon 1}^+(\xi) &= \frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon}\,\frac{1}{P^+(p(\xi'), \xi')} \quad \text{pour } \varepsilon > 0,\\
Q_1^+(\xi) &= \frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i0}\,\frac{1}{P^+(p(\xi'), \xi')},
\end{aligned}$$

alors $Q_{\varepsilon 1}^+\widehat{g}$ tend vers $Q_1^+\widehat{g}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ quand ε tend vers 0 par valeurs > 0.

D'autre part en posant

$$Q^+_{\varepsilon 2}(\xi) = \frac{1}{\xi_1 - p(\xi') + i\varepsilon}\left(\frac{\chi^+(\xi_1)}{P^+(\xi_1,\xi')} - \frac{1}{P^+(p(\xi'),\xi')}\right) \quad \text{pour } \varepsilon > 0,$$
$$Q^+_2(\xi) = \frac{1}{\xi_1 - p(\xi')}\left(\frac{\chi^+(\xi_1)}{P^+(\xi_1,\xi')} - \frac{1}{P^+(p(\xi'),\xi')}\right),$$

le théorème de Lebesgue assure que $Q^+_{\varepsilon 2}\widehat{g}$ tend vers $Q^+_2\widehat{g}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, quand ε tend vers 0 par valeurs > 0.

On note que Q^+_2 est une fonction régulière dans $\mathbb{R}^d$ qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$Q^+_2(\xi) = \frac{\chi^+(\xi_1) - 1}{\xi_1 - p(\xi')}\frac{1}{P^+(p(\xi'),\xi')} + \chi(\xi_1)S(\xi_1,\xi')$$

où

$$S(\xi_1,\xi') = -\int_0^1 \frac{\partial_{\xi_1}P^+(t\xi_1 + (1-t)p(\xi'),\xi')}{(P^+(t\xi_1 + (1-t)p(\xi'),\xi'))^2}dt.$$

Comme par définition $\widehat{R^+_\varepsilon g} = Q^+_{\varepsilon 1}\widehat{g} + Q^+_{\varepsilon 2}\widehat{g}$ et que $\widehat{R^+_\varepsilon g}$ tend vers $\widehat{R^+ g}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ quand ε tend vers 0, il en résulte que

$$\widehat{R^+ g} = Q^+_\chi \widehat{g}$$

pour une fonction $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi\widehat{g} = \widehat{g}$, où on a posé

$$Q^+_\chi = Q^+_1 + \chi Q^+_2.$$

Le comportement de la fonction $F_1^{-1}Q^+_\chi$ peut être précisé de la façon suivante :

Proposition 7. — *Pour toute fonction $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante $C_\chi > 0$ telle que pour $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ on ait*

$$\left|\left(F^{-1}Q^+_\chi\right)(x_1,\xi') + iH(-x_1)\frac{e^{ix_1 p(\xi')}}{P^+(p(\xi'),\xi')}\right| \leqslant C_\chi(1+|x_1|)^{-1}.$$

Démonstration. — Comme la transformée de Fourier inverse par rapport à la variable ξ_1 dans $\mathbb{R}$ de la distribution $1/(\xi_1 - p(\xi') + i0)$ est la fonction $-ie^{ix_1p(\xi')}H(-x_1)$, il suffit d'estimer la fonction

$$K_\chi = F_1^{-1}(\chi Q^+_2)\cdot$$

On fixe une constante δ telle que $0 < \delta < p_0 - 2\gamma_1$ et comme dans la démonstration de la proposition 4, on décompose l'intégrale définissant cette transformée de Fourier inverse en la somme des trois intégrales suivantes

$$J_1(x_1,\xi') = \int_{|\xi_1 - p(\xi')|\geqslant\delta} e^{ix_1\xi_1}\frac{\chi(\xi_1)\chi^+(\xi_1)}{(\xi_1 - p(\xi'))P^+(\xi_1,\xi')}d\xi_1,$$
$$J_2(x_1,\xi') = -\int_{|\xi_1 - p(\xi')|\geqslant\delta} e^{ix_1\xi_1}\frac{\chi(\xi_1)}{(\xi_1 - p(\xi'))P^+(p(\xi'),\xi')}d\xi_1,$$
$$J_3(x_1,\xi') = \int_{|\xi_1 - p(\xi')|\leqslant\delta} e^{ix_1\xi_1}\chi(\xi_1)S(\xi_1,\xi')d\xi_1.$$

(1) Pour la première intégrale on a d'abord pour tous $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$
\begin{aligned}
|J_1(x_1,\xi')| &\leqslant \frac{M}{C_1}\Big(\int_{\gamma_1}^{p(\xi')-\delta}\frac{d\xi_1}{(p(\xi')-\xi_1)\xi_1}+\int_{p(\xi')+\delta}^{+\infty}\frac{d\xi_1}{(\xi_1-p(\xi'))\xi_1}\Big)\\
&= \frac{M}{C_1 p(\xi')}\log\frac{(p(\xi')-\delta)(p(\xi')+\delta)(p(\xi')-\gamma_1)}{\delta^2\gamma_1}\cdot
\end{aligned}
$$

où M désigne un majorant de $|\chi^{(k)}|$ et de $|\chi^{+(k)}|$ pour $k=1$ et 2.

Ensuite par intégration par parties on a pour tous $x_1 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \neq 0$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$
\begin{aligned}
&J_1(x_1,\xi')\\
&\quad= \frac{1}{ix_1}\Big(\frac{e^{ix_1(p(\xi')-\delta)}}{-\delta}\frac{\chi(p(\xi')-\delta)\chi^+(p(\xi')-\delta)}{P^+(p(\xi')-\delta,\xi')}-\frac{e^{ix_1(p(\xi')+\delta)}}{\delta}\frac{\chi(p(\xi')+\delta)}{P^+(p(\xi')+\delta,\xi')}\Big)\\
&\quad-\frac{1}{ix_1}\int_{|\xi_1-p(\xi')|\geqslant\delta}\frac{e^{ix_1\xi_1}}{(\xi_1-p(\xi'))P^+(\xi_1,\xi')}\\
&\qquad\qquad\Bigg(\left((\chi\chi^+)'-\chi\chi^+\right)(\xi_1)\Big(\frac{1}{\xi_1-p(\xi')}+\frac{\frac{\partial P^+}{\partial\xi_1}(\xi_1,\xi')}{P^+(\xi_1,\xi')}\Big)\Bigg)d\xi_1
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
&|J_1(x_1,\xi')|\\
&\leqslant \frac{1}{|x_1|}\left(\frac{2M^2}{\delta C_1}+\frac{M^2}{C_1}\Big(2+\frac{1}{\delta}+\frac{C_2}{C_1}\Big)\frac{1}{1+p(\xi')}\log\frac{(1+p(\xi')+\delta)(1+p(\xi')-\delta)}{\delta^2}\right)\cdot
\end{aligned}
$$

(2) Pour la seconde intégrale on a d'abord pour tous $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$
|J_2(x_1,\xi')| \leqslant \frac{1}{C_1}\int_{|\xi_1-p(\xi')|\geqslant\delta}\frac{|\chi(\xi_1)|}{|\xi_1-p(\xi')|}d\xi_1 \leqslant \frac{1}{C_1\delta}\int_{\mathbb{R}}|\chi(\xi_1)|d\xi_1,
$$

puis par intégration par parties on a

$$
|J_2(x_1,\xi')| \leqslant \frac{1}{|x_1|}\frac{1}{C_1}\left(2M\delta+\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}}|\chi'(\xi_1)|d\xi_1+\frac{1}{\delta^2}\int_{\mathbb{R}}|\chi(\xi_1)|d\xi_1\right)\cdot
$$

(3) Pour la troisième intégrale, on a d'abord pour tous $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$
|J_3(x_1,\xi')| \leqslant 2\delta C_2 M C_1^{-2},
$$

puis par intégration par parties on a

$$
|J_3(x_1,\xi')| \leqslant \frac{1}{|x_1|}\left(\frac{2MC_2}{C_1^2}+2M\delta\left(\frac{C_2}{C_1^2}+2\frac{C_2^2}{C_1^3}\right)\right)\cdot
$$

Ce qui termine la démonstration □

On en déduit un comportement asymptotique de $(R^+g)(x_1,\cdot)$ quand $|x_1|$ tend vers $+\infty$.

Proposition 8. — *Il existe un opérateur* $r^+ \in \mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^d))$ *tel que pour* $g \in L(\mathbb{R}^d)$ *on ait*

$$\left(R^+g\right)(x) = \frac{i}{(2\pi)^{d-1}} H(-x_1) \int_{\Sigma^+} \frac{e^{i(x,\sigma^+)}\widehat{g}(\sigma^+)}{|\nabla P(\sigma^+)|} d\sigma^+ + (r^+g)(x).$$

En particulier $R^+ \in \mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), \overset{\circ+}{L}{}^*(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. — Soit $g \in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$. Par transformation de Fourier partielle inverse par rapport à ξ_1 dans $\mathbb{R}$ de la formule

$$\widehat{R^+g} = Q_\chi^+ \widehat{g}$$

où χ est une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi\widehat{g} = \widehat{g}$, on a par convolution par rapport à x_1 dans $\mathbb{R}$

$$F'\left(R^+g\right) = \left(F_1^{-1} Q_\chi^+\right) \underset{(x_1)}{*} F'g,$$

ce que l'on peut écrire d'après la proposition précédente sous la forme

$$\begin{aligned} F'\left(R^+g\right)(x_1, \xi') + i\frac{e^{ix_1p(\xi')}}{P^+(p(\xi'), \xi')} \int_{x_1}^{+\infty} e^{-iy_1p(\xi')} \left(F'g\right)(y_1, \xi') dy_1 \\ = \int_{\mathbb{R}} K_\chi(x_1 - y_1, \xi') \left(F'g\right)(y_1, \xi') dy_1 \end{aligned}$$

où K_χ est telle que pour une constante C_χ on ait pour $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$|K_\chi(x_1, \xi')| \leqslant C_\chi(1 + |x_1|)^{-1}.$$

Tout d'abord pour $x_1 \in \mathbb{R}$, on a par l'égalité de Parseval

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} K_\chi(x_1 - y_1, \cdot)(F'g)(y_1, \cdot) dy_1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \\ \leqslant C_\chi \int_{\mathbb{R}} (1 + |x_1 - y_1|)^{-1} \| \left(F'g\right)(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\ = C_\chi (2\pi)^{(d-1)/2} \int_{\mathbb{R}} (1 + |x_1 - y_1|)^{-1} \|g(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1, \end{aligned}$$

et par conséquent par le théorème de Lebesgue on en déduit que

$$\lim_{|x_1| \to +\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} K_\chi(x_1 - y_1, \cdot) \left(F'g\right)(y_1, \cdot) dy_1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = 0.$$

Ensuite on a de même

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{ix_1p(\cdot)}}{P^+(p(\cdot), \cdot)} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-iy_1p(\cdot)} \left(F'g\right)(y_1, \cdot) dy_1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \\ \leqslant \frac{(2\pi)^{(d-1)/2}}{C_1} \int_{-\infty}^{x_1} \|g(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\lim_{x_1\to-\infty}\left\|\frac{e^{ix_1p(\cdot)}}{P^+(p(\cdot),\cdot)}\int_{-\infty}^{x_1}e^{-iy_1p(\cdot)}\left(F'g\right)(y_1,\cdot)dy_1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}=0.$$

Enfin pour les mêmes raisons

$$\lim_{x_1\to+\infty}\left\|\frac{e^{ix_1p(\cdot)}}{P^+(p(\cdot),\cdot)}\int_{x_1}^{+\infty}e^{-iy_1p(\cdot)}\left(F'g\right)(y_1,\cdot)dy_1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}=0.$$

Ainsi pour $g\in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ la fonction

$$\left(F'\left(R^+g\right)\right)(x_1,\xi')+iH(-x_1)\frac{e^{ix_1p(\xi')}}{P^+(p(\xi'),\xi')}\widehat{g}(p(\xi'),\xi')$$

tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ quand $|x_1|$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire aussi par l'égalité de Parseval il existe $r^+g\in\mathring{L}^*(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\left(R^+g\right)(x)=-\frac{i}{(2\pi)^{d-1}}H(-x_1)\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{e^{i(x_1p(\xi')+(x',\xi'))}}{P^+(p(\xi'),\xi')}\widehat{g}(p(\xi'),\xi')d\xi'+(r^+g)(x).$$

Or par définition de la mesure de surface $d\sigma^+$ sur Σ^+ on a

$$\int_{\Sigma^+}\frac{e^{i(x,\sigma^+)}\widehat{g}(\sigma^+)}{|\nabla P(\sigma^+)|}d\sigma^+=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{e^{i(x_1p(\xi')+(x',\xi'))}\widehat{g}(p(\xi'),\xi')}{|\nabla P(p(\xi'),\xi')|}(1+|\nabla p(\xi')|^2)^{1/2}d\xi'$$

et de plus

$$|\nabla P(p(\xi'),\xi')|=(1+|\nabla p(\xi')|^2)^{1/2}|P^+(p(\xi'),\xi')|=-(1+|\nabla p(\xi')|^2)^{1/2}\ P^+(p(\xi'),\xi').$$

Ainsi pour tout $g\in F^{-1}\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$, on a la formule annoncée. Le corollaire 2 permet de conclure que cette formule est aussi vraie pour $g\in L(\mathbb{R}^d)$ et que r^+ est dans $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d),\mathring{L}^*(\mathbb{R}^d))$. □

On peut construire de manière analogue un opérateur R^- relativement à la surface Σ^-.

5. Solution fondamentale de $P^0(D_x)$

P^0 désignant la partie principale de P au voisinage de 0 définie par

$$P^0(\xi)=(\nu h-1)\xi_1^2+\nu h|\xi'|^2,$$

on note E^0 la solution fondamentale de l'opérateur $P^0(D_x)$ définie par

$$E^0(x)=-\frac{1}{2\pi(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)^{1/2}}\log\left(\frac{x_1^2}{\nu h-1}+\frac{x_2^2}{\nu h}\right)^{1/2},\qquad \text{si } d=2,$$

$$E^0(x)=\frac{\Gamma(d/2-1)}{2^2\pi^{d/2}(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)^{(d-1)/2}}\left(\frac{x_1^2}{\nu h-1}+\frac{|x'|^2}{\nu h}\right)^{-(d-2)/2},\qquad \text{si } d\geqslant 3.$$

Soit χ^0 une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$0 \leqslant \chi^0(\xi_1) \leqslant 1, \quad \chi^0(\xi_1) = 1 \text{ pour } |\xi_1| \leqslant \gamma_1, \quad \chi^0(\xi_1) = 0 \text{ pour } |\xi_1| \geqslant 2\gamma_1$$

pour une constante γ_1 telle que $0 < 2\gamma_1 < p_0$ $(= \inf_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} p(\xi'))$.

On rappelle qu'il existe une fonction $b \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et des constantes C_1 et $C_2 > 0$ telles que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on ait $P(\xi) = P^0(\xi) + |\xi|^4 b(\xi)$ avec $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d}(1+|\xi|)|b(\xi)| \leqslant C_1$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ avec $|\xi_1| \leqslant 2\gamma_1$ on ait $|P(\xi)| \geqslant C_2|\xi|^2/(1+|\xi|)$. En particulier la fonction $\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P^0}\right)\chi^0$ est indéfiniment différentiable et bornée dans $\mathbb{R}^d \setminus 0$.

On peut alors définir l'opérateur R^0 qui permettra d'inverser l'opérateur $P(D_x)$ près de $\xi = 0$.

Proposition 9

(1) *Pour $s > 1$ si $d = 2$ et $s = 1$ pour $d \geqslant 3$, l'opérateur R_0^0 défini sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$R_0^0 g = E^0 * g$$

se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L_s^2(\mathbb{R}^d), L_{-s}^2(\mathbb{R}^d))$ encore noté R_0^0.

(2) *L'opérateur R_1^0 défini sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par*

$$R_1^0 g = F^{-1}\left(\left(\frac{1}{P^0}(\chi^0 - 1) + \Big(\frac{1}{P} - \frac{1}{P^0}\Big)\chi^0\right)\widehat{g}\right)$$

se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L(\mathbb{R}^d), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^d))$ encore noté R_1^0.

(3) *Pour $g \in L_s^2(\mathbb{R}^d)$ avec $s > 1$ si $d = 2$ et $s = 1$ si $d \geqslant 3$, la fonction*

$$R^0 g = R_0^0 g + R_1^0 g$$

appartient à $L_{-s}^2(\mathbb{R}^d)$ et vérifie l'équation

$$P(D_x)(R^0 g) = F^{-1}(\chi^0 \widehat{g}) \qquad \textit{dans} \quad \mathbb{R}^d.$$

Démonstration. — Les résultats concernant l'opérateur R_0^0 de convolution dans $\mathbb{R}^d$ par la solution élémentaire E^0 de l'opérateur $P^0(D_x)$ se déduisent par homothétie des résultats classiques correspondants pour le Laplacien donnés par exemple dans [**M**], [**AGG**]...

(2) Pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^d$ on a par définition

$$(R_1^0 g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)}\left(\frac{\chi^0(\xi_1) - 1}{P^0(\xi)} + \Big(\frac{1}{P} - \frac{1}{P^0}\Big)(\xi)\chi^0(\xi_1)\right)\widehat{g}(\xi)d\xi$$

qu'on écrit sous la forme

$$\left(R_1^0 g\right)(x_1, x') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\xi_1}\widetilde{g}(\xi_1, x')d\xi_1$$

avec

$$\widetilde{g}(\xi_1, x') = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i(x',\xi')}\left(\frac{\chi^0(\xi_1) - 1}{P^0(\xi_1,\xi')} + \Big(\frac{1}{P} - \frac{1}{P^0}\Big)(\xi_1,\xi')\chi^0(\xi_1)\right)\widehat{g}(\xi_1,\xi')d\xi'.$$

Or par la relation de Parseval, on a pour tout $\xi_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}(\xi_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} &= (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} \left\| \left(\frac{\chi^0(\xi_1)-1}{P^0(\xi_1,\cdot)} + \Big(\frac{1}{P} - \frac{1}{P^0}\Big)(\xi_1,\cdot)\chi^0(\xi_1)\right) \widehat{g}(\xi_1,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \\ &\leqslant (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} \left(\frac{1-\chi^0(\xi_1)}{(\nu h-1)|\xi_1|^2} + \frac{C_1\chi^0(\xi_1)}{C_2(\nu h -1)}\right) \|\widehat{g}(\xi_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \\ &\leqslant \left(\frac{1-\chi^0(\xi_1)}{(\nu h-1)|\xi_1|^2} + \frac{C_1\chi^0(\xi_1)}{C_2(\nu h -1)}\right) \|g\|_{L(\mathbb{R}^{d})}.\end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{g} \in L(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\|\widetilde{g}\|_{L(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit alors le résultat annoncé pour l'opérateur R_1^0.

(3) Si on note Q^0 la distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$Q^0 = Pf\frac{1}{P^0} \quad \text{si } d=2 \qquad \text{et} \qquad Q^0 = \frac{1}{P^0} \quad \text{si } d \geqslant 3$$

où Pf désigne la partie finie en 0 définie par

$$(Pf\frac{1}{P^0},\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{P^0(x)\geqslant\varepsilon^2} \frac{\varphi(x)}{P^0(x)}dx + \frac{2\pi}{(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)^{1/2}}\log\varepsilon\varphi(0)\Big)$$

alors

$$\begin{aligned}&F^{-1}Q^0 a = E^0 + \frac{1}{2\pi(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)^{1/2}}(\log 2 + \Gamma'(1)) \qquad \text{si } d=2,\\ &F^{-1}Q^0 = E^0 \qquad \text{si } d \geqslant 3.\end{aligned}$$

Pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il est alors facile de vérifier que par construction

$$P(D_x)(R^0 g) = F^{-1}(\chi^0\widehat{g}) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

et cette égalité se prolonge par densité pour $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$. □

On précise maintenant le comportement de $(R^0 g)(x)$ quand x_1 tend vers l'infini.

Proposition 10

(1) *Pour $s > 3/2$ et $d = 2$ ou 3, il existe $r^0 \in \mathcal{L}(L^2_s(\mathbb{R}^d), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^d))$ tel que pour $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ on ait*

$$R^0 g = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)dy\widetilde{E}^0 + r^0 g.$$

(2) *Pour $s > d/2$ et $d \geqslant 4$, alors $R^0 \in \mathcal{L}(L^2_s(\mathbb{R}^d), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^d))$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer ces résultats pour l'opérateur R_0^0.

(1) Cas $d = 2$. Par homothétie, il suffit de montrer que l'opérateur intégral de noyau

$$\log|x-y| - \log\langle x\rangle$$

est un opérateur de $\mathcal{L}(L^2_s(\mathbb{R}^2), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^2))$ pour $s > 3/2$, où l'on note $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$.

Étant donnée une fonction χ continue dans $\mathbb{R}^2$ telles que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi(x) = 1$ pour $|x| \geqslant 2$ et $\chi(x) = 0$ pour $|x| \leqslant 1$, on décompose

$$\begin{aligned}\log|x-y| - \log\langle x\rangle &= \chi(x)(\log|x-y| - \log|x|)\\ &\quad + \chi(x)(\log|x| - \log\langle x\rangle) + (1-\chi(x))\log|x-y| - (1-\chi(x))\log\langle x\rangle.\end{aligned}$$

D'une part les fonctions $\chi(x)(\log|x| - \log\langle x\rangle)$ et $(1-\chi(x))\log\langle x\rangle$ appartiennent à l'espace $\overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^2)$ et $L^2_s(\mathbb{R}^2) \subset L^1(\mathbb{R}^2)$ pour $s > 1$. D'autre part $1-\chi$ est une fonction continue à support compact et la convolution par la fonction log opère de $L^2_s(\mathbb{R}^2)$ dans l'espace des fonctions continues dans $\mathbb{R}^2$ puisque $\partial^\alpha_x(\log *g) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ pour $|\alpha| \leqslant 2$ si $g \in L^2_s(\mathbb{R}^2)$. Ainsi on est ramené à montrer que l'opérateur intégral de noyau

$$\chi(x)\,(\log|x-y| - \log|x|)$$

est un opérateur de $\mathcal{L}(L^2_s(\mathbb{R}^2), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^2))$.

Pour x et $y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\big|\log|x-y| - \log|x|\big| = \left|\int_0^1 \frac{(y, x-ty)}{|x-ty|^2}dt\right| \leqslant |y|\int_0^1 |x-ty|^{-1}dt.$$

Or en posant $\varepsilon = s - 3/2$ qu'on peut supposer appartenir à $]0, \frac{1}{2}[$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour x et $y \in \mathbb{R}^2$ on ait

$$|x-y|^{-1} \leqslant C_1|x_1-y_1|^{-\frac14-\frac{\varepsilon}{2}}|x_2-y_2|^{-\frac34+\frac{\varepsilon}{2}}$$

et d'après [**NW**] (*cf.* aussi [**M**]...) il existe une constante $C_2 > 0$ telle que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}|x_2-y_2|^{-\frac34+\frac{\varepsilon}{2}}f(y_2)dy_2\right|^2 dx_2 \leqslant C_2^2\int_{\mathbb{R}}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}|f(y_2)|^2dy_2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\Big|\int_{\mathbb{R}^2}|(x_1,x_2)-y|^{-1}h(y)dy\Big|^2dx_2\\ &\qquad\leqslant C_1^2C_2^2\bigg(\int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-\frac14-\frac{\varepsilon}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}|h(y_1,y_2)|^2dy_2\Big)^{1/2}dy_1\bigg)^2\\ &\qquad\leqslant C_1^2C_2^2\int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-\frac12-\varepsilon}(1+|y_1|)^{-\frac12-\varepsilon}dy_1\int_{\mathbb{R}^2}(1+|y_1|)^{\frac12+\varepsilon}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}|h(y)|^2dy.\end{aligned}$$

Or en posant

$$I(x_1) = \int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-\frac12-\varepsilon}(1+|y_1|)^{-\frac12-\varepsilon}dy_1$$

on a d'une part

$$I(x_1) \leqslant \int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-\frac12-\varepsilon}|y_1|^{-\frac12-\varepsilon}dy_1 = |x_1|^{-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}|1-z|^{-\frac12-\varepsilon}|z|^{-\frac12-\varepsilon}dz$$

et d'autre part par intégration par parties on a

$$I(x_1) \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{\frac12-\varepsilon}(1+|y_1|)^{-\frac32-\varepsilon}dy_1,$$

donc pour $|x_1| \leqslant 1$
$$I(x_1) \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}(1+|y_1|)^{-1-2\varepsilon}dy_1.$$
Ainsi il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$
$$I(x_1) \leqslant C_3(1+|x_1|)^{-2\varepsilon},$$
et par conséquent il existe une constante $C_4 > 0$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\int_{\mathbb{R}^2}|(x_1,x_2)-y|^{-1}h(y)dy\Big|^2 dx_2 \\ \leqslant C_4^2(1+|x_1|)^{-2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|y_1|)^{\frac12+\varepsilon}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}|h(y)|^2dy.$$

La fonction
$$v(x) = \chi(x)\int_{\mathbb{R}^2}(\log|x-y| - \log|x|)g(y)dy$$
vérifiant
$$\begin{aligned}|v(x)| &\leqslant \chi(x)\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_0^1|x-ty|^{-1}dt\Big)|y||g(y)|dy\\ &= \chi(x)\int_0^1 t^{-2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|x-y|^{-1}\frac{|y|}{t}|g(y/t)|dy\Big)dt,\end{aligned}$$
on en déduit que
$$\begin{aligned}\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C_4(1+|x_1|)^{-\varepsilon}\int_0^1 t^{-2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}(1+|y_1|)^{\frac12+\varepsilon}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}\frac{|y|^2}{t^2}|g(y/t)|^2dy\Big)^{1/2}dt\\ &= C_4(1+|x_1|)^{-\varepsilon}\int_0^1 t^{-\frac34+\frac{\varepsilon}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}(1+|ty_1|)^{\frac12+\varepsilon}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}|y|^2|g(y)|^2dy\Big)^{1/2}dt\\ &\leqslant C_4(1+|x_1|)^{-\varepsilon}\int_0^1 t^{-\frac34+\frac{\varepsilon}{2}}dt\Big(\int_{\mathbb{R}^2}(1+|y_1|)^{\frac12+\varepsilon}|y_2|^{\frac12+\varepsilon}|y|^2|g(y)|^2dy\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$
Par conséquent il existe une constante $C_5 > 0$ telle que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$
$$\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_5(1+|x_1|)^{\frac32-s}\|g\|_{L^2_s(\mathbb{R}^3)}.$$
Ce qui permet de conclure.

(2) Cas $d=3$. Par homothétie, il suffit de montrer que l'opérateur intégral de noyau
$$|x-y|^{-1} - \langle x\rangle^{-1}$$
est un opérateur de $\mathcal{L}(L^2_s(\mathbb{R}^3), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^3))$ pour $s > 3/2\cdot$

On décompose
$$|x-y|^{-1} - \langle x\rangle^{-1} = |x-y|^{-1} - (1+|x|)^{-1} + (1+|x|)^{-1} - \langle x\rangle^{-1}.$$

Comme d'une part la fonction $(1+|x|)^{-1} - \langle x\rangle^{-1}$ appartient à $\overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^3)$ et $L^2_s(\mathbb{R}^3) \subset L^1(\mathbb{R}^3)$ pour $s > 3/2$, et comme d'autre part
$$\big||x-y|^{-1} - (1+|x|)^{-1}\big| \leqslant (1+|x|)^{-1}|x-y|^{-1}(1+|y|),$$

on est ramené à montrer que l'opérateur intégral de noyau

$$(1+|x|)^{-1}|x-y|^{-1}(1+|y|)^{1-s}$$

est un opérateur de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3), \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^3))$.

Or en posant $\varepsilon = s - 3/2$ qu'on peut supposer appartenir à $]0,1/2[$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour x et $y \in \mathbb{R}^3$ on ait

$$\begin{aligned}&(1+|x|)^{-1}|x-y|^{-1}(1+|y|)^{1-s}\\ &\qquad\leqslant C_1(1+|x_1|)^{-\frac{\varepsilon}{2}}|x_1-y_1|^{-\varepsilon}(1+|y_1|)^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}|x'|^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}|x'-y'|^{-1+\varepsilon}|y'|^{-\frac{3\varepsilon}{2}}\end{aligned}$$

et d'après [**NW**] (*cf.* aussi [**M**]...) il existe une constante $C_2 > 0$ telle que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Big|\int_{\mathbb{R}^2}|x'|^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}|x'-y'|^{-1+\varepsilon}|y'|^{-\frac{3\varepsilon}{2}}f(y')dy'\Big|^2dx' \leqslant C_2^2\int_{\mathbb{R}^2}|f(y')|^2dy'.$$

Ainsi la fonction

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^3}(1+|x|)^{-1}|x-y|^{-1}(1+|y|)^{1-s}g(y)dy$$

vérifie

$$\begin{aligned}&\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &\quad\leqslant C_1C_2(1+|x_1|)^{-\varepsilon/2}\int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-\varepsilon}(1+|y_1|)^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|g(y_1,y')|^2dy'\Big)^{1/2}dy_1\\ &\quad\leqslant C_1C_2(1+|x_1|)^{-\varepsilon/2}\Big(\int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-2\varepsilon}(1+|y_1|)^{-1+\varepsilon}dy_1\Big)^{1/2}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Comme pour $d=2$, on montre qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}}|x_1-y_1|^{-2\varepsilon}(1+|y_1|)^{-1+\varepsilon}dy_1 \leqslant C_3(1+|x_1|)^{-\varepsilon}$$

et par conséquent il existe une constante $C_4 > 0$ telle que pour $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\|v(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_4(1+|x_1|)^{\frac{3}{2}-s}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Ce qui permet de conclure.

(3) Cas $d \geqslant 4$. Pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\xi')|^2}{(\xi_1^2+\xi'^2)^2}d\xi'\Big)^{1/2}d\xi_1 &\leqslant \int_{|\xi_1|\geqslant 1}\frac{1}{\xi_1^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\widehat{g}(\xi_1,\xi')|^2d\xi'\Big)^{1/2}d\xi_1\\ &+\int_{|\xi_1|\leqslant 1}\Big(\int_{|\xi'|\geqslant 1}|\widehat{g}(\xi_1,\xi')|^2d\xi'\Big)^{1/2}d\xi_1+\int_{|\xi_1|\leqslant 1}\Big(\int_{|\xi'|\leqslant 1}\frac{|\widehat{g}(\xi_1,\xi')|^2}{(\xi_1^2+\xi'^2)^2}d\xi'\Big)^{1/2}d\xi_1.\end{aligned}$$

Or d'une part il existe une constante $C > 0$ telle que pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\sup_{\xi_1\in\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\widehat{g}(\xi_1,\xi')|^2d\xi'\Big)^{1/2} \leqslant C\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et} \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}|\widehat{g}(\xi_1,\xi')| \leqslant C\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

et d'autre part pour $d \geqslant 4$, l'intégrale

$$\int_{|\xi_1|\leqslant 1}\Big(\int_{|\xi'|\leqslant 1}\frac{1}{(\xi_1^2+\xi'^2)^2}d\xi'\Big)^{1/2}d\xi_1$$

est convergente.

Par conséquent par homothétie, il en résulte que $Q^0\widehat{g}\in L(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|Q^0\widehat{g}\|_{L(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(\|g\|_{L(\mathbb{R}^d)}+\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}).$$

Par suite $R_0^0 g\in \overset{\circ}{L}{}^*(\mathbb{R}^d)$ et pour $s>d/2$, il existe une constante $C>0$ telle que pour $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|R_0^0 g\|_{L^*(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|g\|_{L^2_s(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit alors le résultat annoncé. □

6. Démonstration des théorèmes d'existence et d'unicité

On fait une démonstration générale des théorèmes 1 et 2 pour $d\geqslant 2$.

(1) On montre d'abord le résultat d'unicité.

Si une distribution v de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est solution de l'équation

$$P(D_x)v=0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d,$$

alors le support de $\widehat{v}$ est contenu dans Σ. Si de plus $v\in \overset{\circ +}{L}{}^*(\mathbb{R}^d)$, alors nécessairement $v=0$ d'après le théorème 3.

Ainsi il suffit de montrer que pour $d=2$ et 3, si une distribution v de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est solution de l'équation $P(D_x)v=0$ dans $\mathbb{R}^d$ et est du type Kelvin $v=C\widetilde{E}_0+k$ où C est une constante et $k\in \overset{\circ +}{L}{}^*(\mathbb{R}^d)$, alors nécessairement $C=0$.

Pour cela on introduit une fonction $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$, paire, telle que $\chi(\xi_1)=0$ pour $|\xi_1|\geqslant \frac12\inf_{\xi'\in\mathbb{R}^{d-1}}p(\xi')$ et $F_1\chi\geqslant 0$ (où F_1 est la transformation de Fourier par rapport à ξ_1 dans $\mathbb{R}$).

Comme le support de $\widehat{v}$ est contenu dans Σ, la distribution $\chi\widehat{v}$ est alors une combinaison de masses de Dirac en 0 d'ordre $\leqslant m$ pour un certain entier m, autrement dit pour toute fonction $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ il existe des cœfficients $a_k(\varphi)$ tels que

$$CL_1(x_1;\varphi)+L_2(x_1;\varphi)=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}a_k(\varphi)x_1^k$$

où

$$L_1(x_1;\varphi)=\int_{\mathbb{R}^d}F_1\chi(y_1)\widetilde{E}_0(x_1-y_1,x')\varphi(x')dy_1dx'$$

$$L_2(x_1;\varphi)=\int_{\mathbb{R}^d}F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,x')\varphi(x')dy_1dx'.$$

Tout d'abord le second terme

$$L_2(x_1;\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}}F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,x')\varphi(x')dx'\Big)dy_1$$

tend vers 0 quand x_1 tend vers $+\infty$, comme on peut le voir par exemple par le théorème de Lebesgue puisque pour tout y_1, d'une part

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{d-1}}F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,x')\varphi(x')dx'\Big|\leqslant\sup_{y_1\in\mathbb{R}}|F_1\chi(y_1)|\,\|k(x_1-y_1,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

qui tend vers 0 quand x_1 tend vers $+\infty$, et d'autre part

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{d-1}}F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,x')\varphi(x')dx'\Big|\leqslant F_1\chi(y_1)\|k\|_{L^*(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}$$

avec $F_1\chi\in L^1(\mathbb{R})$.

On examine ensuite le premier terme pour $x_1\geqslant 0$ en distinguant les cas $d=2$ et $d=3$.

Pour $d=2$, en notant $c_2=-4\pi(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)^{1/2}$ et en supposant $\varphi\geqslant 0$, on a d'une part

$$\begin{aligned}c_2L_1(x_1;\varphi)&=\int_{\mathbb{R}}F_1\chi(y_1)\log\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}+\frac{x_2^2}{\nu h}\Big)\varphi(x_2)dy_1dx_2\\&\geqslant\int_{\mathbb{R}}F_1\chi(y_1)\log\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}\Big)dy_1\int_{\mathbb{R}}\varphi(x_2)dx_2\\&\geqslant\log\Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}\Big)\int_{-\infty}^0F_1\chi(y_1)dy_1\int_{\mathbb{R}}\varphi(x_2)dx_2,\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}c_2L_1(x_1;\varphi)\leqslant&\int_{\mathbb{R}}F_1\chi(y_1)\log\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}\Big)dy_1\int_{\mathbb{R}}\varphi(x_2)dx_2\\&+\int_{\mathbb{R}}F_1\chi(y_1)dy_1\int_{\mathbb{R}}\log\Big(1+\frac{x_2^2}{\nu h}\Big)\varphi(x_2)dx_2\\\leqslant&\int_{\mathbb{R}}F_1\chi(y_1)\log\Big(2\Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}\Big)\Big(1+\frac{y_1^2}{\nu h-1}\Big)\Big)dy_1\int_{\mathbb{R}}\varphi(x_2)dx_2\\&+\int_{\mathbb{R}}F_1\chi(y_1)dy_1\int_{\mathbb{R}}\log\Big(1+\frac{x_2^2}{\nu h}\Big)\varphi(x_2)dx_2.\end{aligned}$$

Par conséquent il existe des constantes C_1, C_2 et $C_3>0$ telles que pour $x_1\geqslant C_1$ on ait

$$-C_2\log\Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}\Big)\leqslant L_1(x_1;\varphi)\leqslant -C_3\log\Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}\Big)$$

et comme

$$CL_1(x_1;\varphi)+L_2(x_1;\varphi)=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}a_k(\varphi)x_1^k$$

il en résulte nécessairement que $C=0$.

Pour $d=3$, en notant $c_3 = 4\pi(\nu h-1)^{1/2}(\nu h)$ on a

$$c_3 L_1(x_1;\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} F_1\chi(y_1)\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}+\frac{|x'|^2}{\nu h}\Big)^{-1/2}\varphi(x')dy_1dx'$$

donc

$$c_3|L_1(x_1;\varphi)| \leqslant \Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}\Big)^{-1/2}\int_{-\infty}^0 F_1\chi(y_1)dy_1\int_{\mathbb{R}^2}|\varphi(x')|dx'$$

qui tend vers 0 quand x_1 tend vers $+\infty$.

Par conséquent comme

$$CL_1(x_1;\varphi)+L_2(x_1;\varphi) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} a_k(\varphi)x_1^k$$

il en résulte nécessairement que le polynôme du second membre est nul. Ceci ayant lieu pour toute fonction test $\varphi(x')$, on en déduit donc que

$$C\int_{\mathbb{R}} F_1\chi(y_1)\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}+\frac{|x'|^2}{\nu h}\Big)^{-1/2}dy_1 + c_3\int_{\mathbb{R}} F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,x')dy_1 = 0.$$

Or d'une part la fonction

$$(x_1,x')\longmapsto \int_{\mathbb{R}} F_1\chi(y_1)\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}+\frac{|x'|^2}{\nu h}\Big)^{-1/2}dy_1 \notin L^*(\mathbb{R}^3)$$

car

$$\int_{\mathbb{R}} F_1\chi(y_1)\Big(1+\frac{(x_1-y_1)^2}{\nu h-1}+\frac{|x'|^2}{\nu h}\Big)^{-1/2}dy_1 \geqslant \Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}+\frac{|x'|^2}{\nu h}\Big)^{-1/2}\int_0^{2x_1}\widehat{\chi^0}(y_1)dy_1$$

et $\Big(1+\frac{x_1^2}{\nu h-1}+\frac{|\cdot|^2}{\nu h}\Big)^{-1/2} \notin L^2(\mathbb{R}^2)$, alors que d'autre part la fonction

$$(x_1,x')\longmapsto \int_{\mathbb{R}} F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,x')dy_1 \in L^*(\mathbb{R}^3)$$

car

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}} F_1\chi(y_1)k(x_1-y_1,\cdot)dy_1\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|F_1\chi\|_{L^1(\mathbb{R})}\|k\|_{L^*(\mathbb{R}^3)}.$$

Il en résulte donc que nécessairement $C=0$.

(2) On montre maintenant le résultat d'existence.

Avec les notations et les résultats des paragraphes 4 et 5, étant donnée $g\in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ avec $s>1$ pour $d=2$ et $s=1$ pour $d\geqslant 3$, la fonction

$$v = R^-g + R^0g + R^+g$$

appartient à l'espace $L^2_{-s}(\mathbb{R}^d)$ et est solution de l'équation $P(D_x)v=g$ dans $\mathbb{R}^d$.

Si de plus $s>3/2$ pour $d=2,3$ et $s>d/2$ pour $d\geqslant 4$, les propositions 8 et 10 assurent que cette fonction v est une solution du type de Kelvin annoncé dans les théorèmes 1 et 2.

(3) On montre enfin la régularité de la solution v si de plus $\partial_x^\alpha g\in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ pour un $\alpha\neq 0$.

Pour cela en revenant à la définition par transformation de Fourier des opérateurs R^-, R^0 et R^+, on vérifie que ces opérateurs commutent avec l'opérateur de dérivation ∂_x^α. Par suite la solution v qui est donnée par $v = R^- g + R^0 g + R^+ g$ vérifie

$$\partial_x^\alpha v = R^-(\partial_x^\alpha g) + R^0(\partial_x^\alpha g) + R^+(\partial_x^\alpha g).$$

Comme précédemment, les propositions 8 et 10 assurent que cette fonction $\partial_x^\alpha v$ appartient à $\overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$ pour $d \geqslant 4$, alors que pour $d = 2, 3$ on peut l'écrire

$$\partial_x^\alpha v = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\alpha g(y) dy \widetilde{E}^0 + k$$

où $k \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$. Or dans ce cas $\widehat{g}$ est continue dans $\mathbb{R}^d$ car $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\alpha g(y) dy = i^{|\alpha|}(\xi^\alpha \widehat{g})(0) = 0$$

si $\alpha \neq 0$, et ainsi $\partial_x^\alpha v \in \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^d)$.

7. Fonction de Green

Pour terminer on peut annoncer un résultat qui sera donné dans un prochain travail et qui concerne l'existence et l'unicité d'une fonction de Green du problème de Neumann-Kelvin. Avec les notations de l'introduction et grâce à l'étude faite précédemment, on montrera en particulier qu'il existe une unique fonction $H \in C^2([-h, 0]; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2) H = 0, & \text{dans } -h < z < 0, \\ \nu \partial_z H + \partial_x^2 H = g, & \text{sur } z = 0, \\ \partial_z H = 0, & \text{sur } z = -h, \\ H, & \text{de type Kelvin sur } z = 0. \end{cases}$$

Plus précisément cette solution est de la forme

$$H(z, x, y) = C \log \Big(1 + \frac{x^2}{\nu h - 1} + \frac{y^2}{\nu h}\Big)^{1/2} + k(z, x, y)$$

où

$$C = -\frac{1}{2\pi(\nu h - 1)^{1/2}(\nu h)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy \quad \text{et} \quad k \in C^0([-h, 0]; \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^2)).$$

De plus $\partial_z^k \partial_{xy}^\alpha H \in C^0([-h, 0]; \overset{\circ +}{L^*}(\mathbb{R}^2))$ pour tout $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$ tel que $k + |\alpha| \geqslant 1$.

Références

[AH] S. Agmon & L. Hörmander – « Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics », *J. Analyse Math.* **30** (1976), p. 1–38.

[AGG] C. Amrouche, V. Girault & J. Giroire – « Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$ », *J. Math. Pures Appl.* **73** (1994), no. 6, p. 579–606.

[BP] P. Bolley & T. L. Pham – « Sur un problème modèle d'hydrodynamique navale », *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), p. 213–251.

[D] Y. Doutreleau – « Étude mathématique et numérique du problème de résistance de vagues », 1997, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, Paris.

[E] D. Euvrard – « Les mille et une facéties de la fonction de Green du problème de la résistance de vagues », Rapport de recherche ÉNSTA 144, Paris, 1983.

[Gu] C. Guttman – « Résultats théoriques et numériques sur la résistance de vagues d'un corps tridimentionnel immergé », Rapport de recherche ÉNSTA 177, Paris, 1983.

[H] L. Hörmander – *The analysis of linear partial differential operators. II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 257, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[K] A. A. Kostyukov – *Theory of ship waves and wave resistance*, E. C. I., Iowa City, 1968.

[WL] E. V. Laitone & J. V. Wehausen – « Surface waves », in *Handbuch der Physik, Vol. 9, Part 3*, Springer-Verlag, Berlin, 1960, p. 446–778.

[L] M. Lenoir – « Méthode de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance de vagues bidimentionnelle », Rapport de recherche ÉNSTA 164, Paris, 1982.

[M] R. C. McOwen – « The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces », *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979), no. 6, p. 783–795.

[N] J. N. Newman – *Marine hydrodynamics*, The M. I. T. Press, Cambridge, MA and London, 1977.

[NW] L. Nirenberg & H. F. Walker – « The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$ », *J. Math. Anal. Appl.* **42** (1973), p. 271–301.

[SR] X. S. Raymond – *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.

[T] F. Trèves – *Basic linear partial differential equations*, Pure and Applied Mathematics, no. 62, Academic Press, New York-London, 1975.

[V] B. R. Vainberg – *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*, Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1989.

P. Bolley, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UN/CNRS/ÉCN, UMR 6629,, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, F-44322 Nantes Cedex 3, France
E-mail : bolley@math.univ-nantes.fr

Pham The Lai, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UN/CNRS/ÉCN, UMR 6629, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, F-44322 Nantes Cedex 3, France