

**SUR UN MODÈLE DE DYNAMIQUE DE
POPULATIONS STRUCTURÉ EN ÂGE:
APPLICATION EN HALIEUTIQUE**

**(ON A MODEL OF AGE-STRUCTURED
POPULATION DYNAMICS: APPLICATION IN
FISHERY)**

Ali Moussaoui

Abstract. The aim of this work is the formulation and the study of a stock-effort fishing model, in which the fish population is structured by age and is governed by the McKendrick-von Foerster partial differential equation while the fishing effort is described by an ordinary differential equation. In this model, the number of vessels increases when the fishery makes profit, otherwise it decreases. The existence and uniqueness of solutions for the system are proved by using the Banach fixed point theorem. Existence of several stationary solutions is studied: extinction equilibrium where there are no fish and there is no fishing, a Fishery Free Equilibrium (FFE) as well as a Sustainable Fishery Equilibrium (SFE). A relatively simple method is used to arrive at a condition of stability of stationary solutions.

1 Introduction

De nombreux auteurs ont proposé des modèles de croissance de population qu'on peut trouver de manière condensée dans des ouvrages comme (Murray [25], ou Bazykin [6]). Ces modèles partent du plus simple, la croissance malthusienne formalisée par un modèle linéaire, à des modèles plus complexes prenant en compte la structure de l'espace (Modèle de Fisher, voir par exemple le livre de Murray [25]), la structure en âge (équation de McKendrick-von Foerster [29]), la présence de retard prenant en compte par exemple le temps de maturation [19] ou des modèles combinant ces

2010 Mathematics Subject Classification: 92A15; 92D25; 93A30.

Keywords: Age-structured model, McKendrick-von Foerster equation, Fisheries management, Steady states, Stability.

<http://www.utgjiu.ro/math/sma>

différentes structures. Les modèles les plus simples visent à décrire empiriquement une croissance observée (modèle linéaire, modèle logistique). Les autres tentent de décrire et d'expliquer l'impact d'une structure de la population (spatiale, en âge ou en poids, ect.) sur la croissance. Le choix de la structure n'est pas anodin et dépend essentiellement du problème posé : elle permet entre autres d'ajouter du réalisme au modèle afin de répondre à certaines questions auxquelles les modèles plus simples ne permettraient pas de répondre. Le premier exemple de structuration qui vient en tête et connu de tous remontent au début du XXe siècle avec Sharpe et Lotka [26] en 1911, et avec McKendrick [23] en 1926 (voir aussi Lotka [21, 25]). Ces modèles (linéaires) ont été rigoureusement étudiés par Feller [16], et Bellman et Cooke [7], en utilisant les équations intégrales de Volterra et la transformée de Laplace. Les modèles linéaires ne peuvent décrire toutes les situations en dynamique de population. Dans le cas où l'on fait dépendre les paramètres du modèle de la densité de la population, on obtient des modèles non linéaires dits modèles densité-dépendants. Les modèles non linéaires ont été étudiés à partir des années 70 avec les travaux de Gurtin et MacCamy [17]. Nous renvoyons aux livres de Hoppensteadt [18], Webb [29], Magal et Ruan [22], pour un survol du sujet.

Dans le domaine de l'halieutique, plusieurs modèles mathématiques ont été développés pour décrire la dynamique des pêcheries [10, 11, 12, 27, 28]. Les modèles les plus simples supposent une équation logistique pour le stock de poissons avec un terme de capture proportionnel au stock et à l'effort de pêche (donné, par exemple, le nombre de bateaux impliqués dans la pêche). L'étape suivante consiste à ajouter une équation pour l'effort de pêche, conduisant à des modèles de pêche de type prédateurs-proies, c'est le modèle de Smith [27, 28]. Dans [1, 2, 3, 4, 24], les auteurs ont publié de nombreux travaux qui s'attachent à décrire la dynamique des modèles de pêche dans lesquels plusieurs échelles de temps interviennent. Malgré les simplifications mathématiques que fournissent ces différences d'échelles de temps, la dynamique des pêcheries peut s'avérer très complexes (voir par exemple [5]).

Cet article se situe dans ce contexte général et illustre un modèle de gestion de la pêche. L'objectif est de mettre en place un modèle dynamique stock-effort avec une structuration continue obtenu à partir du modèle de McKendrick-von Foerster [23, 29], décrivant l'évolution d'une population de poissons exploitée par une flotte de pêche. La population de poissons est représentée par une équation aux dérivées partielles du premier ordre structurée en âge et l'effort de pêche est représenté par une équation différentielle ordinaire dans le temps. Dans ce travail, on suppose que les ressources alimentaires pour les poissons sont abondantes, ainsi on peut supposer que les poissons d'une même taille ont le même âge, ceci peut justifier le choix de la structuration en âge. On démontre que le comportement de la population dépend d'une valeur qui est étroitement liée au taux de reproduction net de la population. Le manuscrit est organisé comme suit. Dans un premier temps, on présente le modèle, La section 3 prouve l'existence et l'unicité de la solution du problème proposé. Pour ce faire, on utilise une version du théorème de Banach-Picard [9]

dans un espace de Banach approprié. La section 4 présente un cas particulier pour lequel les différents taux ne dépendent pas de l'âge. Cette version simplifiée permet de retrouver la forme classique des modèles globaux stock-effort sans structuration en âge. On montre l'existence de plusieurs équilibres: un équilibre trivial où il n'y a ni poisson ni pêche, un équilibre sans pêche (ESP) aussi bien qu'un équilibre qui permettra un développement durable de la pêche (EPD). Par analogie avec l'épidémiologie, on introduit la notion de R_0 en pêche. Par la théorie de Lyapunov, on démontre que lorsque $R_0 < 1$, l'équilibre sans pêche (ESP) est globalement asymptotiquement stable (G.A.S), et lorsque $R_0 > 1$ alors l'équilibre de pêche durable (EPD) est G.A.S. La section 5 s'intéresse au cas d'une population structurée en âge continu avec des taux dépendant de l'âge. On généralise les résultats du cas précédent. On montre qu'il existe un équilibre sans pêche et un équilibre de pêche durable. On généralise également la notion de R_0 de pêche au cas de la structuration en âge. Finalement, on étudie la stabilité des équilibres du modèle.

2 Présentation du modèle

Soit $u(a, t)$ la densité de population d'âge $a \geq 0$ au temps $t \geq 0$. Notons par

$$P(t) = \int_0^{+\infty} u(a, t) dx, \quad (2.1)$$

la population totale au temps t . Notons $\mu(a) \geq 0$ le taux de mortalité naturelle d'individus d'âge a , et $\beta(a, P(t)) \geq 0$ le taux de fertilité naturelle. On suppose que β dépend aussi de la densité totale de la population. Sous ces hypothèses, l'évolution de la densité u est régie par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu(a)u(a, t) - q(a)u(a, t)E(t), \quad (2.2)$$

qui traduit l'évolution au cours du temps, due au processus de vieillissement et de mortalité (naturelle et par pêche), d'une cohorte de la population (groupe d'individus de même âge). Dans cette équation, E est l'effort employé par un bateau de pêche (qui peut comprendre le coût du carburant, le temps passé en mer, etc.) et $q(a) \geq 0$ est le coefficient de capturabilité supposé dépendre de l'âge.

On note c le coût unitaire par unité de temps de l'effort de pêche et $p(a)$ le prix du poisson d'âge a . Le revenu net du secteur de la pêche est:

$$\int_0^{\infty} p(a)q(a)u(a, t)E(t)dx - cE(t).$$

C'est la différence entre la recette totale, $RT = \int_0^{\infty} p(a)q(a)u(a, t)E(t)da$, et le coût total, $CT = cE(t)$. On suppose pour simplifier que la dynamique de l'effort de pêche

s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dE}{dt} = \left(-c + \int_0^{\infty} p(a)q(a)u(a,t)da \right) E(t). \quad (2.3)$$

Formellement, ceci implique que l'effort de pêche augmente (resp., diminue) tant que: $RN = (RT - CT) > 0$, (resp., < 0).

Le processus de reproduction qui fait croître la population est donné par l'équation

$$B(t) = u(0,t) = \int_0^{+\infty} \beta(a, P(t))u(a,t)da. \quad (2.4)$$

La dynamique de la solution démarre au temps $t = 0$ de

$$u(x,0) = \phi(a), \quad E(0) = E_0, \quad (2.5)$$

où $\phi(a) \geq 0$ p.p est une fonction donnée dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ et E_0 est une constante positive.

3 Existence et unicité des solutions

Afin de simplifier les équations, nous utiliserons les notations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, E) &= e^{-\int_{\alpha}^{\beta} (\mu(s+a-t) + q(s+a-t)E(s))ds}, \\ \gamma(t, u) &= e^{-ct + \int_0^t \int_0^{+\infty} p(a)q(a)u(a,s)dads}. \end{aligned}$$

Soient $T > 0$ à choisir par la suite et $M > 0$ choisi de telle sorte que

$$\begin{aligned} \phi(a) &\geq 0 \text{ p.p,} \\ \Phi &= \int_0^{\infty} \phi(a)da \leq M \quad \text{et} \quad 0 \leq E_0 \leq M. \end{aligned}$$

Pour avoir des solutions continues, nous supposons

$$\phi(0) = \int_0^{\infty} \beta(a, \Phi)\phi(a)da. \quad (3.1)$$

Commençons par définir l'espace de Banach \mathbb{X} dans lequel nous allons considérer nos solutions

$$\mathbb{X} = \left\{ v = (u, E) \in L^{\infty}([0, T]; L^1(0, \infty)) \times L^{\infty}([0, T]) \right\}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(0, \infty)} \leq 2M, \quad |E(t)| \leq 2M \quad \text{p.p } t \Big\},$$

muni de la norme produit usuelle

$$\|(u, E)\|_{\mathbb{X}} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(0, \infty)} + \sup_{t \in [0, T]} |E(t)|.$$

On considère $I : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ l'opérateur défini par

$$I(u, E) = (I_1(u, E), I_2(u, E)),$$

avec

$$I_1(u, E)(a, t) = \begin{cases} \phi(a - t)\pi(0, t, E) & \text{si } a \geq t \\ B(t - a)\pi(t - a, t, E) & \text{si } a < t \end{cases} \quad (3.2)$$

et

$$I_2(u, E)(a, t) = E_0\gamma(t, u). \quad (3.3)$$

Les formules précédentes s'obtiennent en intégrant l'équation (2.2) le long des caractéristiques et l'équation (2.3) par rapport au temps t .

Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cadre des hypothèses générales suivantes:

Hypothèse 1.

- les fonctions $\mu(\cdot)$, $q(\cdot)$, $p(\cdot)$ sont positives ou nulles, bornées et vérifient les inégalités suivantes:

- $0 < \mu(a) \leq \bar{\mu} = \sup_a \mu(a)$,

- $0 \leq q(a) \leq \bar{q} = \sup_a q(a)$,

- $0 \leq p(a) \leq \bar{p} = \sup_a p(a)$,

- la fonction $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ est à valeurs positives ou nulles, strictement décroissante par rapport à P et est à support compact telle que pour tout $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_+$

$$|\beta(a, P_1) - \beta(a, P_2)| \leq \delta_1 |P_1 - P_2| \quad \text{p.p } a \in \mathbb{R}_+,$$

où δ_1 est une constante positive. On note par $\bar{\beta} = \|\beta\|_\infty$.

Ces hypothèses sont faites pour des raisons techniques. Ainsi nous avons le résultat suivant:

Théorème 1. *Considérons le système (2.1)-(2.5) avec l'hypothèse 1, alors, pour tout $T > 0$ et $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+)$, il existe une unique solution globale $v = (u, E) \in \mathbb{X}$ qui satisfait (3.2) et (3.3). Ainsi, v est l'unique solution du système (2.2)-(2.5). En outre $u(a, t) \geq 0$ et $E(t) \geq 0$ dès que $\phi(a) \geq 0$ et $E_0 \geq 0$.*

Démonstration. Nous avons besoin du lemme suivant pour démontrer ce théorème.

Lemme 2. *Supposons vérifiée l'hypothèse 1, alors pour tout $v_1 := (u_1, E_1) \in \mathbb{X}$ et $v_2 := (u_2, E_2) \in \mathbb{X}$*

$$i) \pi(\alpha, \beta, E) \leq 1, \tag{3.4}$$

$$ii) \exists \delta_1 > 0 \text{ tel que } |B(t)| \leq \delta_1, \quad t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

$$iii) \exists \delta_2(T) > 0 \text{ tel que } \forall \alpha, \beta, t \in [0, T] \\ |\pi(\alpha, \beta, E_1) - \pi(\alpha, \beta, E_2)| \leq \delta_2(T) \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)| \quad \text{où } \delta_2(T) = \bar{q}T. \tag{3.6}$$

Proof. *i) – ii)* Ces inégalités sont évidentes.

$$iii) |\pi(\alpha, \beta, E_1) - \pi(\alpha, \beta, E_2)| = e^{-\int_{\alpha}^{\beta} (\mu(s+a-t) + q(s+a-t)E_1(s)) ds} - e^{-\int_{\alpha}^{\beta} (\mu(s+a-t) + q(s+a-t)E_2(s)) ds} \\ \leq \int_{\alpha}^{\beta} |q(s+a-t)(E_1(s) - E_2(s))| ds \\ \leq \bar{q} \int_{\alpha}^{\beta} |E_1(s) - E_2(s)| ds \\ \leq \delta_2(T) \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)|,$$

où nous avons utilisé l'inégalité: $|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, (théorème des accroissements finis). \square

Pour démontrer l'existence des solutions positives de (3.2) et (3.3), nous utilisons le théorème du point fixe de Banach-Picard dans l'espace de Banach \mathbb{X} . On démontre que I envoie \mathbb{X} dans \mathbb{X} et que I est strictement contractante pour T petit.

(1) $I : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

De la définition de I , on a

$$\int_0^{+\infty} |I_1(u, E)|(a, t) dx = \int_0^t B(t-a)\pi(t-a, t, E) da + \int_t^{+\infty} \phi(a-t)\pi(0, t, E) da \\ = \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \beta(b, P(t-a))u(b, t-a) db \right) \pi(t-a, t, E) da + \int_t^{+\infty} \phi(a-t)\pi(0, t, E) da \\ \leq 2M\bar{\beta}T + \int_0^{+\infty} \phi(a) da$$

$$\leq 2M\bar{\beta}T + M. \tag{3.7}$$

On a également :

$$\begin{aligned} |I_2(u, E)|(t) &= E_0\gamma(t, u) \\ &\leq E_0e^{\int_0^t \int_0^{+\infty} p(a)q(a)u(a,s)dads} \\ &\leq Me^{\bar{p}\bar{q} \int_0^t \int_0^{+\infty} u(a,s)dads} \\ &\leq Me^{2\bar{p}\bar{q}MT} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Il en résulte que pour T suffisamment petit, l'opérateur I envoie \mathbb{X} dans \mathbb{X} .

(2) Maintenant, nous allons montrer que I est strictement contractante pour T petit. Soient (u_1, E_1) et (u_2, E_2) dans \mathbb{X} et vérifiant (2.2)-(2.5). Notons que: $I(u_1, E_1)|_{t=0} = I(u_2, E_2)|_{t=0}$.

$$\begin{aligned} &\|I_1(u_1, E_1)(\cdot, t) - I_1(u_2, E_2)(\cdot, t)\|_{L^1(0,\infty)} \\ &= \int_0^t |I_1(u_1, E_1) - I_1(u_2, E_2)|(a, t)da + \int_t^{+\infty} |I_1(u_1, E_1) - I_1(u_2, E_2)|(a, t)da = J_1 + J_2 \end{aligned}$$

• Estimation de J_1

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^t |B_1(t-a)\pi(t-a, t, E_1) - B_2(t-a)\pi(t-a, t, E_2)|da \\ &= \int_0^t \left| (B_1(t-a) - B_2(t-a))\pi(t-a, t, E_1) + B_2(t-a)(\pi(t-a, t, E_1) - \pi(t-a, t, E_2)) \right| da \\ &\leq \underbrace{\int_0^t |B_1(t-a) - B_2(t-a)|da}_{J_1^1} + \underbrace{\int_0^t B_2(t-a)|\pi(t-a, t, E_1) - \pi(t-a, t, E_2)|da}_{J_1^2} \end{aligned}$$

Évaluons maintenant J_1^1 . On a

$$\begin{aligned} J_1^1 &\leq \int_0^t \int_0^{+\infty} |\beta(b, P_1(t-a))u_1(b, t-a) - \beta(b, P_2(t-a))u_2(b, t-a)|dbda \\ &\leq \int_0^t \int_0^{+\infty} |\beta(b, P_1(t-a)) - \beta(b, P_2(t-a))|u_1(b, t-a)dbda \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{+\infty} \beta(b, P_2(t-a))|u_1(b, t-a) - u_2(b, t-a)|dbda. \end{aligned}$$

De l'hypothèse 1, on obtient

$$\begin{aligned} J_1^1 &\leq \delta_1 \int_0^t \left| P_1(t-a) - P_2(t-a) \right| \int_0^{+\infty} u_1(b, t-a) db da \\ &\quad + \bar{\beta} \int_0^t \int_0^{+\infty} \left| u_1(b, t-a) - u_2(b, t-a) \right| db da \\ &\leq T(2M\delta_1 + \bar{\beta}) \sup_{t \in [0, T]} \int_0^{+\infty} |u_1(a, t) - u_2(a, t)| da. \end{aligned}$$

Estimation de J_1^2

$$\begin{aligned} J_1^2 &\leq \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \beta(b, P_2(t-a)) u_2(b, t-a) db \right) |\pi(t-a, t, E_1) - \pi(t-a, t, E_2)| da \\ &\leq 2M\bar{\beta} \int_0^t |\pi(t-a, t, E_1) - \pi(t-a, t, E_2)| da \\ &\leq 2M\bar{\beta}\bar{q}T^2 \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)| \\ &\leq 2M\bar{\beta}\delta_2(T)T \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)|. \end{aligned}$$

• Estimation de J_2

$$J_2 = \int_t^{+\infty} \phi(a-t) |\pi(0, t, E_1) - \pi(0, t, E_2)| da.$$

En utilisant (3.6), on obtient

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \delta_2(T) \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)| \int_0^{+\infty} \phi(a) da \\ &\leq \delta_2(T)M \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\|I_1(u_1, E_1)(\cdot, t) - I_1(u_2, E_2)(\cdot, t)\|_{L^1(0, \infty)} \leq$$

$$T(2M\delta_1 + \bar{\beta}) \sup_{t \in [0, T]} \int_0^{+\infty} |u_1(a, t) - u_2(a, t)| dx + \bar{q}TM(1 + 2\bar{\beta}T) \sup_{t \in [0, T]} |E_1(t) - E_2(t)| \quad (3.9)$$

et

$$|I_2(u_1, E_1) - I_2(u_2, E_2)| = E_0 |\gamma(t, u_1) - \gamma(t, u_2)| \tag{3.10}$$

$$\leq M \left| e^{\int_0^t \int_0^{+\infty} p(a)q(a)u_1(a,s)dads} - e^{\int_0^t \int_0^{+\infty} p(a)q(a)u_2(a,s)dads} \right| \tag{3.11}$$

$$\leq M e^{4\bar{p}\bar{q}MT} \int_0^t \int_0^{+\infty} p(a)q(a) |u_1(a, s) - u_2(a, s)| dads \tag{3.12}$$

$$\leq \bar{p}\bar{q}M e^{4\bar{p}\bar{q}MT} T \sup_{t \in [0, T]} \int_0^{+\infty} |u_1(a, t) - u_2(a, t)| da \tag{3.13}$$

où nous avons utilisé la relation: $e^x - e^y = e^{(x+y)}(e^{-y} - e^{-x})$.
 Choisissons T assez petit de telle sorte que l'opérateur I devienne une contraction. Par conséquent, nous avons prouvé l'existence locale et l'unicité de solution du problème (2.2)-(2.5) sur un intervalle $0 \leq t \leq T_{max}$ où T_{max} dépend de $\|(\phi, E_0)\|_{\mathbb{X}}$. De plus, si $T_{max} < \infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|v\|_{\mathbb{X}} = +\infty$$

On passe maintenant à l'existence globale. Notons que les inégalités (3.7)-(3.8) sont vrai non seulement pour T petit, ainsi les solutions sont bornées quand $t \rightarrow T_{max}$ et par suite $T_{max} = +\infty$, d'où l'existence globale. Comme les taux vitaux $\beta(x, P)$ et $\mu(x)$ sont positifs, on vérifie aisément la positivité de la solution du système (2.2)-(2.5).

4 Etude d'un cas particulier

Supposons que les taux ne dépendent pas de l'âge a , c'est-à-dire

$$\beta(a, P) = \beta(P), \mu(a) = \mu, q(a) = q, p(a) = p.$$

À partir du système (2.2)-(2.5), on obtient la paire suivante d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha(P)P - qPE, \\ \frac{dE}{dt} = (-c + pqP)E, \\ P(0) = P_0, E(0) = E_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\alpha(P) = \beta(P) - \mu$ décrit l'effet de la population totale sur la fertilité. Ce système est bien connu car il ressemble au modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra [25]. Il a un équilibre d'extinction donné par $P = 0$ et $E = 0$, où il n'y a ni poisson ni

pêche; cet équilibre est localement asymptotiquement stable si $\alpha(0) < 0$, c'est-à-dire si $\beta(0) < \mu$, et instable sinon. Ainsi, on suppose désormais que

$$\beta(0) > \mu. \quad (4.2)$$

En l'absence d'effort de pêche, on peut obtenir l'équilibre avec que des poissons en résolvant l'équation

$$\beta(P) = \mu. \quad (4.3)$$

Par analogie avec la situation en épidémiologie, on appelle cet équilibre l'équilibre sans pêche (ESP) et on le note par $\nu = (\tilde{P}, 0)$. Les hypothèses 1 et (4.2) impliquent que cette équation a une seule solution positive \tilde{P} .

On montre facilement que cet équilibre est stable si

$$pq\tilde{P} - c < 0,$$

et instable sinon. De manière complètement analogue à l'épidémiologie, on peut définir une reproductivité nette du prédateur [13, 14]. La notion de reproductivité nette vient de la démographie [21]. C'est le nombre moyen de prédateurs secondaires engendrés par un prédateur typique pendant sa vie lorsqu'il a été introduit dans une population de proies (à l'équilibre) sans prédateur. Dans notre contexte, la reproductivité nette pour une pêcherie sera l'effort de pêche moyen engendré (au sens économique) par un effort de pêche donné pendant sa durée d'existence, lorsqu'il est appliqué à une population de poissons non encore pêchée à l'équilibre démographique. Avec (4.1), la durée d'existence moyenne d'un effort de pêche est $\frac{1}{c}$, tandis que l'effort de pêche secondaire engendré par unité de temps est $pq\tilde{P}$. Ainsi, en utilisant par exemple l'approche de van den Driessche et Watmough [15], on voit que

$$\tilde{R}_0 = \frac{pq\tilde{P}}{c}. \quad (4.4)$$

Un article sur ce sujet est apparu dans [2] où les auteurs introduisent la notion et le calcul de la reproductivité nette dans le contexte de pêcherie. D'après les résultats de [13], on sait que si $\tilde{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans pêche (ESP) $(\tilde{P}, 0)$ est localement asymptotiquement stable; cet équilibre est instable si $\tilde{R}_0 > 1$. Posons

$$P_* = \frac{c}{pq}. \quad (4.5)$$

On appelle la quantité P_* la taille minimale du stock (TMS) pour que des bateaux s'engagent dans la pêcherie.

Cherchons maintenant des équilibres tels que $E > 0$, c'est-à-dire des équilibres pour lesquels l'effort de pêche est non nul. Pour ces équilibres, l'effort de pêche est durable et la pêcherie est économiquement viable. On appelle ces équilibres des équilibres

de pêche durable (EPD). Notons (P_*, E_*) un tel équilibre avec $E_* > 0$. Le modèle (4.1) a un unique EPD positif (P_*, E_*) , où

$$P_* = \frac{c}{pq} \text{ et } E_* = \frac{\alpha(P_*)}{q}.$$

Cet équilibre est positif lorsque $\alpha(P_*) > 0$, c'est-à-dire lorsque $\beta(P_*) > \mu$. On démontre aussi qu'il est localement asymptotiquement stable.

4.1 Stabilité globale de l'ESP

Théorème 3. *Si $\tilde{R}_0 < 1$, l'équilibre sans pêche ESP est globalement asymptotiquement stable dans l'orthant positif avec $E_0 > 0$.*

Démonstration. On considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$V = \left(P - \tilde{P} - \tilde{P} \log \frac{P}{\tilde{P}} \right) + \frac{1}{p} E.$$

Il est facile de vérifier que V est définie positive, c'est à dire $V(P, E) \geq 0$ et $V(P, E) = 0$ si et seulement si $(P, E) = (\tilde{P}, 0)$. Sa dérivée le long de la trajectoires de (4.1) est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P - \tilde{P}}{P} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{p} \frac{dE}{dt} \\ &= (P - \tilde{P})(\alpha(P) - qE) + (qEP - \frac{c}{p}E) \\ &= \alpha(P)(P - \tilde{P}) + \underbrace{\frac{c}{p}(\tilde{R}_0 - 1)E}_{\leq 0} \end{aligned}$$

Comme α est décroissante et $\alpha(\tilde{P}) = 0$, nous avons $\alpha(P)(P - \tilde{P}) \leq 0$. Ainsi $\frac{dV}{dt} \leq 0$, ceci prouve la stabilité de l'ESP (voir Figure 1). On conclut par le principe de Lasalle [20], que le plus grand ensemble invariant tel que $\frac{dV}{dt} = 0$ est réduit à l'ESP. Ceci termine la preuve du théorème.

4.2 Stabilité globale de l'EPD

Théorème 4. *Si $\tilde{R}_0 > 1$, alors l'équilibre de pêche durable EPD est globalement asymptotiquement stable dans l'orthant positif.*

Démonstration. L'équilibre ESP est strictement positif si et seulement si

$$\tilde{R}_0 > 1.$$

On considère la fonction de Lyapunov:

$$W = \left(P - P_* - P_* \log \frac{P}{P_*} \right) + \frac{1}{p} \left(E - E_* - E_* \log \frac{E}{E_*} \right).$$

La dérivée de W le long de la trajectoire est,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{P - P_*}{P} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{p} \frac{E - E_*}{E} \frac{dE}{dt}, \\ &= (P - P_*)(\alpha(P) - qE) + \frac{1}{p}(E - E_*)(-c + pqP). \end{aligned}$$

Par les équations de l'équilibre:

$$\begin{cases} \alpha(P_*) - qE_* = 0, \\ -c + pqP_* = 0, \end{cases}$$

nous avons:

$$\frac{dW}{dt} = (P - P_*)(\alpha(P) - \alpha(P_*) - q(E - E_*)) + q(P - P_*)(E - E_*).$$

Le théorème des accroissements finis donne

$$\frac{dW}{dt} = \alpha'(P_0)(P - P_*)^2 \leq 0,$$

où $P_0 \in (P, P_*)$ c'est à dire que $\frac{dW}{dt}$ est semi définie négative. L'équilibre EPD est donc stable par le théorème de Lyapunov. On prouve l'attractivité de cet équilibre en utilisant le principe d'invariance de LaSalle. Nous remarquons que l'égalité $\frac{dW}{dt} = 0$ se produit si et seulement si $P(t) = P_*$, par conséquent, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= (-c + pqP(t))E(t), \\ &= (-c + pqP_*)E(t), \\ &= 0, \end{aligned}$$

ainsi $E(t) = E^*$, il en résulte que l'EPD est globalement asymptotiquement stable (voir Figure 1). Ceci termine la preuve du théorème.

D'un point de vue biologique, $\tilde{R}_0 > 1$ signifie que le stock se trouverait dans une situation d'exploitation équilibrée et durable. Cela peut arriver dans plusieurs cas, par exemple, si les coûts sont plus faibles ou le prix est assez élevé.

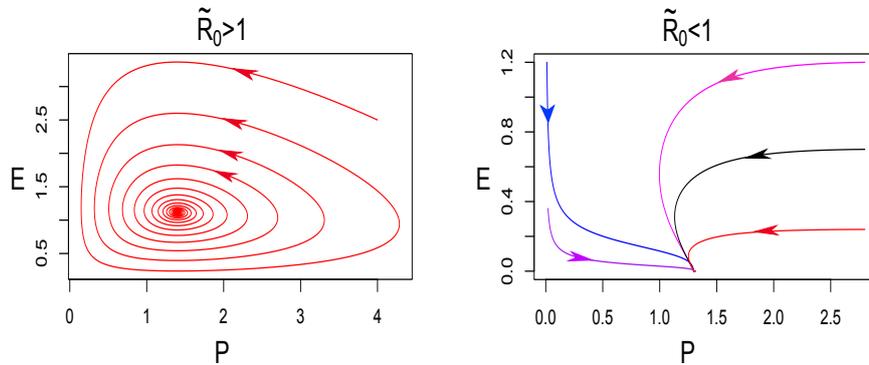


Figure 1: Figure à gauche: cas d'une pêcherie viable ($\tilde{R}_0 > 1$). Figure à droite: cas d'un équilibre sans pêche ($\tilde{R}_0 < 1$).

5 Existence d'équilibres pour le modèle de pêcherie structuré par âge

L'une des propriétés importantes dans l'étude de la dynamique des populations est celle du comportement asymptotique et des équilibres de la population [1, 8, 25, 29]. Pour le système (2.2)-(2.5), un état d'équilibre $(u(a, t), E(t)) = (u^*(a), E^*)$ vérifie les équations

$$\frac{du^*(a)}{da} = -(\mu(a) + q(a)E^*)u^*(a), \tag{5.1}$$

$$\left(-c + \int_0^\infty p(a)q(a)u^*(a)da\right)E^* = 0, \tag{5.2}$$

$$u^*(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a, P^*)u^*(a)da, \tag{5.3}$$

où P^* et E^* sont, respectivement, le stock total de poissons et l'effort de pêche à l'équilibre, la constante P^* est donnée par $P^* = \int_0^\infty u^*(a)da$.

En résolvant (5.1) directement, on obtient:

$$u^*(a) = u^*(0)\pi(a, E^*) \tag{5.4}$$

où $\pi(a, E^*)$ est la probabilité qu'un poisson vive jusque l'âge a en présence de l'effort de pêche à l'équilibre, elle est donnée par

$$\pi(a, E^*) = e^{-\int_0^a (\mu(s)+q(s)E^*)ds}. \tag{5.5}$$

Pour trouver $u^*(0)$, E^* et P^* , on reporte la formule pour $u^*(a)$ dans les autres équations et l'on obtient le système non linéaire suivant de trois équations avec les inconnues $u^*(0)$, E^* et P^* :

$$\begin{aligned} u^*(0) &= u^*(0) \int_0^\infty \beta(a, P^*) \pi(a, E^*) da, \\ 0 &= u^*(0) E^* \int_0^\infty p(a) q(a) \pi(a, E^*) dx - c E^*, \\ P^* &= u^*(0) \int_0^\infty \pi(a, E^*) da. \end{aligned} \quad (5.6)$$

On voit ainsi que toute solution $(u^*(0), E^*, P^*)$ de (5.6) détermine un équilibre $(u^*(a), E^*)$ du système (2.2)-(2.5).

Il existe un équilibre d'extinction où il n'y a ni poisson ni pêcheurie; il s'obtient avec la solution triviale $u^*(0) = 0$, $E^* = 0$, $P^* = 0$ du système (5.6).

En plus de cet équilibre, il existe un équilibre sans pêcheurie (ESP), qui est solution du système

$$1 = \int_0^\infty \beta(a, \tilde{P}) \pi_0(a) da, \quad (5.7)$$

$$\tilde{P} = \tilde{u}(0) \int_0^\infty \pi_0(a) da, \quad (5.8)$$

où $\pi_0(a) = \pi(a, 0)$.

Si l'on suppose un instant que \tilde{P} dans (5.7) est connu et constant, alors $\tilde{u}(0)$ s'obtient avec l'équation (5.8). Ainsi $\tilde{u}(0)$ est de la forme:

$$\tilde{u}(0) = \frac{\tilde{P}}{\int_0^\infty \pi_0(a) da}. \quad (5.9)$$

Par conséquent, la recherche d'ESP conduit à s'intéresser au nombre de solutions de l'équation (5.7).

Posons

$$R(P) = \int_0^\infty \beta(a, P) \pi_0(a) da, \quad (5.10)$$

qui est appelé la reproductivité nette et qui est le nombre moyen d'individus qu'engendre un individu au cours de sa vie lorsque la population totale est P . À l'équilibre \tilde{P} , la reproductivité nette est égale à 1. Les hypothèses sur le taux de naissance en fonction de P garantissent que $\lim_{P \rightarrow \infty} R(P) = 0$.

L'existence et les propriétés de l'équilibre dépendent du paramètre seuil R_0 défini par

$$R_0 = R(0) = \int_0^\infty \beta_0(a) \pi_0(a) da, \quad (5.11)$$

où $\beta_0(a) = \beta(a, 0)$. Si $R_0 > 1$, il y a une solution positive \tilde{P} telle que $R(\tilde{P}) = 1$. Si $R_0 < 1$, l'équation $R(P) = 1$ n'a pas de solution positive. Par conséquent, on a:

Lemme 5. *Si $R_0 > 1$, alors le système (5.6) admet un seul ESP $\tilde{\Phi} = (\tilde{u}(a), 0)$. Dans tout ce qui suit, on suppose que $R_0 > 1$.*

Cherchons maintenant des équilibres de pêche durable (EPD). Notons $(u^*(a), E^*)$ un tel équilibre avec $E^* > 0$. Il doit vérifier les équations

$$\int_0^\infty \beta(a, P^*)\pi(a, E^*)da = 1, \tag{5.12}$$

$$P^* = u^*(0) \int_0^\infty \pi(a, E^*)da, \tag{5.13}$$

$$u^*(0) \int_0^\infty p(a)q(a)\pi(a, E^*)da - c = 0. \tag{5.14}$$

L'équation (5.14) donne

$$u^*(0) = \frac{c}{\int_0^\infty p(a)q(a)\pi(a, E^*)da}. \tag{5.15}$$

On remplace (5.15) dans l'équation (5.13) et l'on obtient

$$P^* = \frac{c \int_0^\infty \pi(a, E^*)da}{\int_0^\infty p(a)q(a)\pi(a, E^*)da}. \tag{5.16}$$

Comme dans le cas des ESP, on définit la reproductivité nette en présence d'un effort de pêche:

$$R(P, E) = \int_0^\infty \beta(a, P)\pi(a, E)da. \tag{5.17}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire suivant en P et E :

$$R(P, E) = 1, \tag{5.18}$$

$$P = \frac{c \int_0^\infty \pi(a, E)da}{\int_0^\infty p(a)q(a)\pi(a, E)da}. \tag{5.19}$$

Chaque solution positive de ce système d'équations donne un EPD $(u^*(a), E^*)$. Avec la même technique que dans [8], on peut résoudre par rapport à E en fonction de P par le théorème des fonctions implicites. Pour chaque P fixé arbitrairement, l'équation $R(P, E) = 1$ d'inconnue E a une solution unique, qui cependant peut être positive ou négative. Ceci définit $E = f(P)$ comme une fonction continue pour tout $P \geq 0$. De plus,

$$\frac{\partial R}{\partial E}(P, f(P)) = - \int_0^\infty \beta(a, P) \left(\int_0^a q(s)ds \right) \pi(a, f(P))da < 0.$$

Noter que $f(\tilde{P}) = 0$: l'effort de pêche est nul pour l'équilibre sans pêcherie. Insérons $E = f(P)$ dans (5.19). On obtient l'équation en P

$$\int_0^{\infty} (p(a)q(a)P - c)\pi(a, f(P))da = 0. \quad (5.20)$$

Notons $F(P)$ le côté gauche de (5.20), c'est-à-dire

$$F(P) = \int_0^{\infty} (p(a)q(a)P - c)\pi(a, f(P))da. \quad (5.21)$$

On définit un seuil \tilde{R}_0 par

$$\tilde{R}_0 = \frac{\tilde{P} \int_0^{\infty} p(a)q(a)\pi_0(a)da}{c \int_0^{\infty} \pi_0(a)da}, \quad (5.22)$$

qui généralise la reproductivité nette définie par (4.4) dans le cas où les paramètres ne dépendent pas de l'âge. On arrive ainsi au résultat suivant:

Lemme 6. *Supposons que R_0 donné par (5.11) soit > 1 et que $\tilde{R}_0 > 1$ où \tilde{R}_0 est donné par (5.22). Alors le système admet un seul EPD $(u^*(a), E^*)$.*

Démonstration. On a $F(0) < 0$ et $F(\tilde{P}) > 0$. Donc il existe $P^* \in (0, \tilde{P})$ tel que $F(P^*) = 0$. On en déduit immédiatement la valeur correspondante de l'effort de pêche $E^* = f(P^*)$. Puisque $R_0 > 1$, cette valeur est positive.

6 Analyse de la stabilité des équilibres

Pour examiner la stabilité locale des équilibres dont on vient de discuter l'existence, on linéarise le système (2.2)-(2.5) près de ces équilibres.

Considérons les perturbations $v(a, t)$, $F(t)$ respectivement de $u^*(a)$, E^* . Ainsi

$$u(a, t) = v(a, t) + u^*(a), \quad E(t) = F(t) + E^*.$$

Avec le système (2.2)-(2.5), on peut dire que ces perturbations vérifient le système suivant

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu(a)v - q(a)E^*v(a, t) - q(a)u^*(a)F(t), \quad (6.1)$$

$$v(0, t) = \int_0^{\infty} \beta(a, P^*)v(a, t)da + \int_0^{\infty} n(t)\beta'(a, P^*)u^*(a)da, \quad (6.2)$$

$$\frac{dF}{dt} = -cF + E^* \int_0^{\infty} p(a)q(a)v(a, t)da + F \int_0^{\infty} p(a)q(a)u^*(a)da, \quad (6.3)$$

où $\beta'(a, P^*) = \frac{d\beta}{dP}(a, P^*)$ et $n(t) = \int_0^{\infty} v(a, t)da$.

6.1 Analyse de stabilité de l'équilibre d'extinction

Le système linéarisé (6.1)-(6.3) près de cet équilibre devient

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu(a)v, \tag{6.4}$$

$$v(0, t) = \int_0^\infty \beta_0(a)v(a, t)da, \tag{6.5}$$

$$\frac{dF}{dt} = -cF. \tag{6.6}$$

Pour obtenir l'équation caractéristique de ce système, on cherche des solutions de la forme $v(t, x) = e^{\lambda t}w(x)$, $F(t) = e^{\lambda t}G$. Substituons dans (6.4)-(6.6) et divisons par $e^{\lambda t}$, les fonctions w et F doivent vérifier

$$\lambda w(a) + w'(a) = -\mu(a)w(a), \tag{6.7}$$

$$w(0) = \int_0^\infty \beta_0(a)w(a)da, \tag{6.8}$$

$$\lambda G = -cG. \tag{6.9}$$

Visiblement, $\lambda = -c$ est une des valeurs propres; elle est négative. On suppose donc que $\lambda \neq -c$ de sorte que $G = 0$. Pour trouver les autres valeurs propres, on cherche des solutions non nulles des deux premières équations. En résolvant l'équation (6.7), on obtient

$$w(a) = w(0)e^{-\int_0^a (\mu(s)ds + \lambda)ds}. \tag{6.10}$$

En reportant (6.10) dans (6.8), et en divisant chaque côté par $w(0)$ (puisque $w(0) \neq 0$), on obtient l'équation caractéristique du système (2.2)-(2.4) à l'équilibre d'extinction

$$1 = \int_0^\infty \beta_0(a)e^{-\int_0^a (\mu(s)ds + \lambda)ds} da. \tag{6.11}$$

Notons $F(\lambda)$ le côté droit de l'équation (6.11):

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \beta_0(a)e^{-\int_0^a (\mu(s)ds + \lambda)ds} da.$$

On peut ainsi écrire l'équation (6.11) sous la forme

$$F(\lambda) = 1. \tag{6.12}$$

Pour λ réel, la fonction $F(\lambda)$ est évidemment décroissante. De plus, $F(\infty) = 0$ et $F(0) = R_0$. On a donc les deux cas suivants:

(1) Si $R_0 > 1$, alors $F(0) > 1$. À cause de la monotonie de F , il existe une racine réelle positive. L'équilibre d'extinction est donc instable.

(2) Si $R_0 < 1$, alors $F(0) < 1$. L'équation caractéristique $F(\lambda) = 1$ a une unique solution réelle $\lambda^* < 0$. Si l'équation $F(\lambda) = 1$ a d'autres solutions qui sont complexes, elles doivent avoir une partie réelle négative. En effet, pour λ complexe avec $\Re(\lambda) \geq 0$, on a

$$|F(\lambda)| \leq F(\Re(\lambda)) \leq R_0 < 1.$$

Ceci contredit l'égalité (6.12). On obtient donc que $\Re(\lambda) < 0$ si $R_0 < 1$. Autrement dit, l'équilibre d'extinction est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$. On a donc démontré:

Théorème 7. *Pour le système (2.2)-(2.5), l'équilibre d'extinction est localement asymptotiquement stable (LAS) si $R_0 < 1$, mais instable si $R_0 > 1$.*

6.2 Analyse de stabilité de l'équilibre sans pêcheries (ESP)

La linéarisation du modèle original structuré par âge (2.2)-(2.5) près de l'équilibre $\tilde{\Phi} = (\tilde{u}(a), 0)$ s'obtient à partir du système linéarisé (6.1)-(6.3):

$$\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu(a)v - q(a)\tilde{u}F, \quad (6.13)$$

$$v(0, t) = \int_0^\infty \beta(a, \tilde{P})v(a, t)dx + \int_0^\infty n(t)\beta'(a, \tilde{P})\tilde{u}(a)da, \quad (6.14)$$

$$\frac{dF}{dt} = -cF + F \int_0^\infty p(a)q(a)\tilde{u}(a)da. \quad (6.15)$$

On pose désormais

$$A_0 = \int_0^\infty p(a)q(a)\tilde{u}(a)da.$$

Rappelons que pour l'ESP $\tilde{\Phi}$, on a défini dans (5.22) le seuil \tilde{R}_0 ainsi:

$$\tilde{R}_0 = \frac{\tilde{P} \int_0^\infty p(a)q(a)\pi_0(a)da}{c \int_0^\infty \pi_0(a)da}.$$

Il résulte de la formule pour $\tilde{u}(0)$ donnée par (5.9) et de l'expression de A_0 que

$$\tilde{R}_0 = \frac{A_0}{c}.$$

On affirme le résultat suivant:

Lemme 8. *Si $\tilde{R}_0 > 1$, alors l'ESP est instable.*

Démonstration. Si $\tilde{R}_0 > 1$, alors $A_0 > c$. En résolvant l'équation (6.15), on obtient que

$$F(t) = F_0 e^{(A_0 - c)t},$$

qui tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc l'équilibre est instable.

Dans le reste de cette section, on considère l'ESP $\tilde{\Phi} = (\tilde{u}(a), 0)$ où $\tilde{R}_0 < 1$. Pour trouver l'équation caractéristique pour le système (6.13)-(6.15), on cherche des solutions de la forme

$$(v(t, a), F(t)) = (e^{\lambda t} w(a), e^{\lambda t} G),$$

En substituant dans (6.13)-(6.15) pour $(w(a), G)$, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \lambda w(a) + w'(a) = -\mu(a)w(a) - q(a)\tilde{u}G, \\ w(0) = \int_0^\infty \beta(a, \tilde{P})w(a)da + n \int_0^\infty \beta'(a, \tilde{P})\tilde{u}(a)da, \\ \lambda G = A_0 G - cG, \end{cases} \quad (6.16)$$

où $n = \int_0^\infty w(a)da$. Deux cas se présentent:

Cas 1: Si $\lambda = A_0 - c$, alors $\lambda < 0$. De plus, la dernière équation est vérifiée pour tout G tel que $G \neq 0$. On peut choisir comme solution non nulle des équations (6.16) $(w(a), G)$, où $w(a)$ est la solution des deux premières équations avec le G choisi. Une telle solution $w(a)$ existe si $\lambda = A_0 - c$ n'est pas une valeur propre des deux premières équations du système (6.16) avec $G = 0$.

Cas 2: $\lambda \neq A_0 - c$. On doit avoir $G = 0$. Alors $\lambda G = (A_0 - c)G$. On peut avoir un vecteur propre non nul si les deux équations restantes ont une solution non nulle $w(x)$. Les autres valeurs propres sont solutions du système suivant.

$$\begin{cases} \lambda w(a) + w'(a) = -\mu(a)w(a), \\ w(0) = \int_0^\infty \beta(a, \tilde{P})w(a)da + n \int_0^\infty \beta'(a, \tilde{P})\tilde{u}(a)da. \end{cases} \quad (6.17)$$

Une solution de la première équation différentielle pour $w(a)$ donne

$$w(a) = w(0)e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda) ds}. \quad (6.18)$$

En remplaçant l'expression (6.18) dans l'expression pour $w(0)$ ci-dessus, on obtient l'équation caractéristique

$$1 = \int_0^\infty \beta(a, \tilde{P})e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda) ds} da + \int_0^\infty \beta'(a, \tilde{P})\tilde{u}(a)da \int_0^\infty e^{-\int_0^a (\mu(s) + \lambda) ds} da. \quad (6.19)$$

Notons $A(\lambda)$ le côté droit de (6.19), c'est-à-dire

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \beta(a, \tilde{P}) e^{-\int_0^a (\mu(s)+\lambda) ds} da + \alpha \int_0^\infty e^{-\int_0^a (\mu(s)+\lambda) ds} da, \quad (6.20)$$

où la constante α est donnée par $\alpha = \int_0^\infty \beta'(a, \tilde{P}) \tilde{u}(a) da$. Ainsi on peut écrire l'équation (6.19) sous la forme

$$A(\lambda) = \int_0^\infty (\beta(a, \tilde{P}) + \alpha) e^{-\int_0^a (\mu(s)+\lambda) ds} da = 1. \quad (6.21)$$

Évidemment,

$$A(0) = R(\tilde{P}) + \alpha \int_0^\infty e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da = 1 + \alpha \int_0^\infty e^{-\int_0^a \mu(s) ds} da < 1, \quad (6.22)$$

puisque \tilde{P} , la population totale à l'équilibre, est solution de l'équation $R(P) = 1$ et que $\alpha < 0$. On peut montrer que pour λ réel, $A(\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Dans le lemme 9, la stabilité locale de l'ESP est démontrée dans le cas spécial où le taux de naissance est indépendant de l'âge et densité-dépendant, c'est-à-dire: $\beta(a, P) = \beta(P)$.

Lemme 9. *Supposons que $\tilde{R}_0 < 1$, alors l'équilibre sans pêche ESP est asymptotiquement stable si $-\alpha < 2\beta(\tilde{P})$.*

Démonstration. Soit $\lambda = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ une solution complexe arbitraire de l'équation $A(\lambda) = 1$ avec $\Re(\lambda) > 0$. Alors

$$\begin{aligned} 1 = |A(\lambda)| &= |(\beta(\tilde{P}) + \alpha) \int_0^\infty e^{-\int_0^x (\mu(s)+\lambda) ds} da| \\ &\leq |(\beta(\tilde{P}) + \alpha) \int_0^\infty e^{-\int_0^x (\mu(s)+\Re(\lambda)) ds} da|. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Mais on a supposé que $-\alpha < 2\beta(\tilde{P})$. On conclut que

$$1 = |A(\lambda)| < \int_0^\infty \beta(\tilde{P}) e^{-\int_0^x \mu(s) ds} da = 1,$$

ce qui est une contradiction. Ainsi on a $\Re(\lambda) < 0$. Autrement dit, l'ESP est LAS, ce qui termine la preuve.

6.3 Stabilité de l'équilibre de coexistence

L'analyse de stabilité de l'équilibre non trivial $(u^*(a), E^*)$, pour lequel l'effort de pêche est non nul, est plus compliquée. Notre étude se simplifie grandement si l'on considère le cas où tous les paramètres sauf β sont indépendants de la taille: $\mu(a) = \mu$, $p(a) = p$ et $q(a) = q$ sont constants. Dans ce cas, on montre que l'EPD est localement asymptotiquement stable sous certaines hypothèses.

Lemme 10. *Supposons que $\tilde{R}_0 > 1$ et $\beta(a, P^*) = \beta(P^*)e^{-\gamma a}$, où γ est paramètre positif ou nul, alors l'EPD est localement asymptotiquement stable.*

Démonstration. Pour examiner la stabilité locale de l'équilibre non trivial, on considère la solution exponentielle du système (6.1)-(6.3)

$$v(t, a) = e^{\lambda t}w(a), \quad F(t) = e^{\lambda t}G, \tag{6.24}$$

où λ est un paramètre. Il résulte de l'équation (5.2) que

$$\int_0^\infty p(x)q(x)u^*(a)da = c.$$

En utilisant les solutions (6.24), le système (6.1)-(6.3) donne

$$\begin{cases} \lambda w(a) + w'(a) = -\mu w(a) - qE^*w(a) - qu^*(a)G, \\ w(0) = \int_0^\infty \beta(a, P^*)w(a)da + n \int_0^\infty \beta'(a, P^*)u^*(a)da, \\ \lambda G = nE^*pq, \end{cases} \tag{6.25}$$

où

$$n = \int_0^\infty w(a)da. \tag{6.26}$$

En résolvant la première équation de (6.25), on obtient

$$w(a) = w(0)e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} - \frac{qGu^*(0)}{\lambda} \left[e^{-(\mu+qE^*)a} - e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} \right]. \tag{6.27}$$

En mettant la valeur de $w(a)$ tirée de l'équation (6.27) dans l'équation (6.26), on obtient

$$n = \frac{w(0)(\mu + qE^*) - q\frac{E^*pqn}{\lambda}u^*(0)}{(\mu + qE^*)(\lambda + \mu + qE^*)}. \tag{6.28}$$

En résolvant l'équation (6.28) en n , on obtient

$$n = \frac{\lambda w(0)}{\lambda^2 + L\lambda + K}. \tag{6.29}$$

où

$$L = \mu + qE^*, \quad K = \frac{pq^2u^*(0)E^*}{\mu + qE^*}.$$

On substitue (6.29) dans la dernière équation de (6.25), ce qui donne

$$G = \frac{pqw(0)E^*}{\lambda^2 + L\lambda + K}. \quad (6.30)$$

Substituons la valeur de G et n dans (6.27). On obtient la forme suivante de $w(a)$

$$w(a) = w(0)e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} - \frac{qu^*(0)w(0)pqE^*}{\lambda(\lambda^2 + L\lambda + K)} \left(e^{-(\mu+qE^*)a} - e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} \right). \quad (6.31)$$

Substituons cette expression dans la seconde équation de (6.25), on obtient l'équation caractéristique

$$1 = \int_0^\infty \beta(a, P^*) e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} \left(1 - \frac{pq^2u^*(0)E^*}{\lambda(\lambda^2 + L\lambda + K)} (e^{\lambda a} - 1) \right) da + \frac{\alpha^*\lambda}{\lambda^2 + L\lambda + K}, \quad (6.32)$$

où $\alpha^* = \beta'(a, P^*)u^*(a)da$. Notons $F(\lambda)$ le côté droit de l'équation (6.32):

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \beta(a, P^*) e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} \left(1 - \frac{pq^2u^*(0)E^*}{\lambda(\lambda^2 + L\lambda + K)} (e^{\lambda a} - 1) \right) da + \frac{\alpha^*\lambda}{\lambda^2 + L\lambda + K}, \quad (6.33)$$

Évidemment, $F(0) = 1 - \frac{pq^2u^*(0)E^*}{K} \int_0^\infty a\beta(a, P^*) e^{-(\mu+qE^*)a} da$. Donc on a toujours $F(\lambda) < 1$.

Ainsi donc, par un calcul direct, l'équation caractéristique est transformée en

$$1 - \frac{\alpha^*\lambda^2}{\lambda^3 + L\lambda^2 + K\lambda + pq^2u^*(0)E^*} = \int_0^\infty \beta(a, P^*) e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} da.$$

Un calcul direct montre que le dénominateur dans l'équation caractéristique peut s'écrire

$$\lambda^3 + L\lambda^2 + K\lambda + pq^2u^*(0)E^* = (\lambda + \mu + qE^*)(\lambda^2 + R), \quad \text{où } R = \frac{u^*(0)pq^2E^*}{\mu + qE^*}.$$

Ainsi l'équation caractéristique devient

$$\frac{\alpha^*\lambda^2}{(\lambda + \mu + qE^*)(\lambda^2 + R)} = 1 - \int_0^\infty \beta(P^*) e^{-\gamma a} e^{-(\lambda+\mu+qE^*)a} da.$$

L'équation pour l'équilibre $R(P^*, E^*) = 1$ donne

$$\int_0^\infty \beta(P^*) e^{-\gamma a} e^{-(\mu+qE^*)a} da = 1.$$

Une intégration donne

$$\beta(P^*) = \gamma + \mu + qE^*.$$

L'équation caractéristique se réduit donc à

$$\frac{\alpha^* \lambda}{\lambda^3 + (\mu + qE^*)\lambda^2 + R\lambda + R(\mu + qE^*)} = \frac{1}{\lambda + \gamma + \mu + qE^*}.$$

Si l'on définit

$$\begin{aligned} A &= \mu + qE^* - \alpha^*, \\ B &= R - \alpha^*(\gamma + \mu + qE^*), \\ C &= R(\mu + qE^*), \end{aligned}$$

alors l'équation caractéristique peut s'écrire comme une équation cubique:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

Puisque $\alpha^* < 0$, on a $A > 0$, $B > 0$ et $C > 0$. De plus, il n'est pas difficile de voir que $AB > C$. D'après le critère de Routh et Hurwitz, on sait que les racines sont négatives ou elles ont une partie réelle négative. Ainsi l'équilibre non trivial est stable. CQFD

7 Remarques de conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un modèle structuré afin de décrire la dynamique des populations marines exploitées. On a introduit un modèle stock-effort dans lequel l'effort de pêche est modélisé par une équation différentielle ordinaire tandis que la population de poissons a une structure par âge. Le modèle est construit à partir de modèles structurés par âge déjà existants en ajoutant le recrutement de nouveau-nés et une dynamique pour l'effort de pêche. Tout d'abord, on a examiné le cas où les paramètres du modèle ne dépendent pas de l'âge, ce qui conduit à une paire d'équations différentielles ordinaires. On a défini un seuil pour ce système, semblable à la reproductivité nette en épidémiologie et qui permet entre autres de savoir si une maladie peut ou non s'installer dans une population. Dans notre cas, la reproductivité nette va nous permettre d'obtenir une condition nécessaire d'existence d'un équilibre positif, autrement dit un équilibre de pêche durable. Quand la reproductivité nette de la pêcherie est inférieure à 1, la pêcherie ne peut persister et l'effort global de pêche disparaît. Sinon il existe un équilibre de pêcherie durable qui est globalement asymptotiquement stable. Deuxièmement, on résoud complètement le comportement asymptotique du modèle structuré par âge. Plusieurs équilibres existent: un équilibre d'extinction, un équilibre sans pêcherie

(ESP) et un équilibre de pêche durable (EPD). Inspiré par la démographie et l'épidémiologie, on a introduit un seuil R_0 pour le modèle de pêche. En particulier lorsque $R_0 > 1$, il y a toujours un ESP. On a trouvé que l'équilibre d'extinction est localement stable si $R_0 < 1$ et instable sinon. De plus, on a trouvé que l'ESP est instable si la reproductivité nette de la pêche du ESP \tilde{R}_0 est plus grand que 1. On a étudié la stabilité de l'EPD dans un cas plus simple, où nous avons fait l'hypothèse que les taux sont constants par rapport à l'âge, et que le taux de naissance prend la forme $\beta(a, P) = \beta(P)e^{-\gamma a}$. On a montré que l'EPD est localement asymptotiquement stable sous des conditions additionnelles.

Ce modèle présente une double caractéristique. D'une part, c'est un outil théorique qui permet d'analyser de manière théorique l'impact d'une exploitation halieutique sur la biomasse d'un écosystème et sur la production qui en est issue. D'autre part, ce modèle est un outil de diagnostic permettant d'analyser des situations particulières, et débouchant généralement sur des prévisions et des recommandations de gestion. L'analyse du modèle a permis d'obtenir quelques résultats intéressants. Nous avons démontré que si la reproductivité nette de la pêche est supérieure à 1, alors il existe un équilibre de pêche durable qui est stable, cela peut arriver par exemple, si les coûts sont plus faibles ou si le prix est assez élevé.

La stabilité locale de l'équilibre de coexistence dans le cas général où les paramètres dépendent de l'âge est un problème ouvert, que l'on souhaiterait discuter en détail dans un article à venir.

References

- [1] P. Auger, C. Lett, J.C. Poggiale, *Modélisation Mathématique en écologie, Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010.
- [2] P. Auger, A. Moussaoui, G. Sallet, *Basic reproduction ratio for a fishery model in a patchy environment*. Acta Biotheoretica, **60** (2012), 167-188.
- [3] P. Auger, R. Mchich, N. Raïssi, B. Kooi, *Effects of market price on the dynamics of a spatial fishery model: over-exploited fishery/traditional fishery*, Ecol Complex. **7** (2010), 13–20.
- [4] P. Auger, C. Lett, A. Moussaoui, S. Pioch, *Optimal number of sites in artificial pelagic multisite fisheries*, Can. J. Fish. Aquat. Sci. **67** (2010), 296–303.
- [5] P. Auger, J.C. Poggiale, *Reduction of complexity and emergence in hierarchically organized systems : population dynamics*, Systems Analysis Modelling Simulation, **26** (1996), 217-237. [Zbl 0877.92027](#).
- [6] A. D. Bazykin, *Nonlinear dynamics of interacting populations*, Word Scientific Series on Nonlinear Science 11. Word Scientific, Singapore, 1998. [MR1635219](#).

- [7] R. Bellman, K. Cooke, *Differential Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.
- [8] S. Bhattacharya, M. Martcheva, *Oscillations in a size-structured prey-predator model*, Math Biosci. **228** (2010), 31-44. [Zbl 1200.92039](#).
- [9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [10] C. W. Clark, *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*. A Wiley-Interscience, New York (Pure and Applied Mathematics), 1976.
- [11] C. W. Clark, *Bioeconomic modelling and fisheries management. A Wiley-Interscience Publication*, New York, 1985.
- [12] C. W. Clark, *Mathematical bioeconomics*, Pure and Applied Mathematics (New York) 2nd edn. John Wiley & Sons Inc., New York (The optimal management of renewable resources, with a contribution by Gordon Munro, A Wiley-Interscience Publication), 1990.
- [13] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, J.A.J. Metz, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, J Math Biol. **28** (1990), 365-382. [MR1057044](#). [Zbl 0726.92018](#)
- [14] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, Wiley-Blackwell, 2000.
- [15] P. Van den Driessche, J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Math Biosci **180** (2002), 29-48. [MR1950747](#). [Zbl 1015.92036](#).
- [16] W. Feller, *On the integral equation of renewal theory*, Ann Math Stat. **12** (1941), 243-267. [MR5419](#).
- [17] M. Gurtin, R. MacCamy, *Nonlinear age-dependent population dynamics*, Arch. Rational Mech Anal. **54** (1974), 281-300.
- [18] F. Hoppensteadt, *Mathematical Theories of Populations : Demographics, Genetics, and Epidemics*, SIAM, Philadelphia, 1975. [MR526771](#). [Zbl 0304.92012](#).
- [19] Y. Kuang, *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*, Mathematics in Science & Engineering Series, Academic Press, 2012. [MR1218880](#).
- [20] J. P. LaSalle, *Stability of Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia, 1976.

Surveys in Mathematics and its Applications **13** (2018), 1 – 26

<http://www.utgjiu.ro/math/sma>

- [21] A. Lotka, *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris, 1939.
- [22] P. Magal, S. Ruan, *Structured Population Models in Biology and Epidemiology*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 2008. [MR2445337](#). [Zbl 1138.92029](#).
- [23] A. McKendrick, *Applications of mathematics to medical problems*, Proc Edin Math Soc. **44** (1926), 98-130.
- [24] A. Moussaoui, P. Auger, C. Lett, *Optimal number of sites in multi-site fisheries with fish stock dependent migrations*, Math Biosci Eng. **8** (2011), 769-783. [MR2811011](#). [Zbl 1259.34069](#).
- [25] J. D. Murray, *Mathematical Biology: An Introduction*, Springer, 2002.
- [26] F. Sharpe, A. Lotka, *A problem in age-distribution*, Philos Mag. **6** (1911), 435-438. [JFM 42.1030.02](#).
- [27] V. L. Smith, *Economics of Production from Natural Resources*. *American Economic Review*, **58** (1968) 409-431.
- [28] V. L. Smith. *On models of commercial fishing*, J Polit Econ. **77** (1969) 181–198.
- [29] G.F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, CRC Press, New York, 1985. [MR772205](#). [Zbl 0555.92014](#).

Ali Moussaoui

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tlemcen. Algérie.

e-mail: moussaoui.ali@gmail.com

License

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](#). 

Surveys in Mathematics and its Applications **13** (2018), 1 – 26

<http://www.utgjiu.ro/math/sma>