Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 519.41

О ВЗАИМНЫХ КОММУТАНТАХ ОБОБЩЕННЫХ КОВРОВЫХ ПОДГРУПП

Е. В. Яковлев

Аннотация: Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $2R$ и конечным полем вычетов P. Общая и специальная ковровая подгруппы определяются равенствами

$$G(\mu) = G(k,l,m) = \begin{pmatrix} 1+2^kR & 2^lR \\ 2^mR & 1+2^kR \end{pmatrix}, \quad S(\mu) = S(k,l,m) = G(k,l,m) \cap SL_2(R),$$

где k,l,m — целые положительные числа с условием $l+m \geq k$. Вычислен взаимный коммутант двух произвольных ковровых подгрупп, и доказано, что множество ковровых подгрупп замкнуто относительно коммутирования тогда и только тогда, когда $|P| > 4$.

Рассмотрен класс обобщенных ковровых подгрупп, полученный наложением полиномиальных условий на коэффициенты матриц из $S(k,l,m)$, и доказано, что он совпадает с множеством подгрупп, лежащих между «соседними» ковровыми подгруппами. Доказано, что множество обобщенных ковровых подгрупп замкнуто относительно коммутирования тогда и только тогда, когда $|P| = 2$. Библиогр. 9.

Система идеалов $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_{ij} \mid i,j \in \mathbf{Z}\}$ коммутативного кольца R с единицей называется *ковром идеалов*, если $\mathscr{A}_{ik}\mathscr{A}_{kj} \subseteq \mathscr{A}_{ij}$ для всех $i,j,k \in \mathbf{Z}$ [1, с. 145]. Легко проверить, что множества

$$G(\mathscr{A}) = \{g \in GL_n(R) \mid g_{ij} \equiv \delta_{ij} \bmod \mathscr{A}_{ij}\}, \quad S(\mathscr{A}) = G(\mathscr{A}) \cap SL_n(R)$$

являются подгруппами общей линейной группы $GL_n(R)$; они называются соответственно *общей* и *специальной конгруэнц-подгруппами по модулю ковра* $\mathscr{A}$ или *ковровыми подгруппами* (здесь $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Если все идеалы ковра $\mathscr{A}$ совпадают, то мы получаем главные конгруэнц-подгруппы. В 1964 г. Ю. И. Мерзляков [2] исследовал коммутаторное строение подгрупп, соответствующих ковру, у которого для любого $i \in \mathbf{Z}$ диагональные идеалы $\mathscr{A}_{ii}$ квазирегулярны, т. е. все элементы из $1 + \mathscr{A}_{ii}$ обратимы. В частности, была доказана формула $[S(\mathscr{A}), S(\mathscr{B})] = S(\mathscr{C})$, где $\mathscr{C}$ — ковер идеалов, получаемый определенным образом из ковров $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, за исключением случая, когда $n = 2$ и элемент 2 кольца R необратим. Аналог этой теоремы для симплектических групп установил Ю. В. Сосновский [3], а для остальных групп Шевалле — В. М. Левчук [4].

Были получены некоторые результаты и для оставшегося исключительного случая. Так, Ю. Е. Вапнэ [5] исследовал главные конгруэнц-подгруппы двумерных линейных групп над кольцом вычетов по четному модулю, а Т. Зауэр [6] вычислил нижний центральный ряд и ряд коммутантов для некоторых ковровых подгрупп над кольцом целых 2-адических чисел. В работах автора [7, 8] изучались двумерные линейные группы над целостным локальным кольцом R с максимальным идеалом $2R$ и полем вычетов $\mathbf{F}_2$. Напомним, что локальным называется коммутативное кольцо с единицей, имеющее единственный максимальный идеал. В этой ситуации взаимный коммутант двух ковровых подгрупп не обязан быть ковровой подгруппой, но он всегда лежит в более широком классе обобщенных ковровых подгрупп, т. е. подгрупп, определяемых системой сравнений по модулю некоторого ковра идеалов. Множество обобщенных ковровых подгрупп уже будет замкнуто относительно взятия взаимного коммутанта. Кроме того, в работе [7] вычислены нижний центральный ряд и ряд коммутантов произвольной обобщенной ковровой подгруппы в случае поля вычетов $\mathbf{F}_2$, а в [9] эти ряды найдены для произвольной ковровой подгруппы в случае конечного поля вычетов характеристики 2. Пользуясь случаем, отметим, что в формулировке теоремы 2 из [9] упущено предположение, что поле вычетов состоит из двух элементов.

В этой статье мы исследуем аналогичные вопросы для случая локального кольца R с максимальным идеалом $2R$ и конечным полем вычетов P. В частности, мы докажем, что замкнутость ковровых подгрупп равносильна условию $|P| > 4$. Обобщенные ковровые подгруппы будут описаны как промежуточные подгруппы между «соседними» ковровыми подгруппами. Мы покажем, что замкнутость класса таких подгрупп относительно коммутирования равносильна требованию $|P| = 2$.

Всюду в дальнейшем R будет обозначать локальное кольцо с максимальным идеалом $2R$ и конечным полем вычетов P. Элементы кольца R обозначаются греческими буквами, а матрицы из $GL_2(R)$ — латинскими. В частности, зафиксируем обозначения

$$d(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad u(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}.$$

Тройку $\mu = (k, l, m)$ целых положительных чисел назовем *допустимой*, если $l + m \geq k$, и *вырожденной*, если $l + m = k$. Для любой допустимой тройки $\mu = (k, l, m)$ положим $\mu + 1 = (k + 1, l + 1, m + 1)$.

Рассмотрим множества

$$G(\mu) = G(k, l, m) = \begin{pmatrix} 1 + 2^k R & 2^l R \\ 2^m R & 1 + 2^k R \end{pmatrix},$$

$$S(\mu) = S(k, l, m) = G(k, l, m) \cap SL_2(R),$$

где $\mu = (k, l, m)$ — тройка целых положительных чисел.

Непосредственными вычислениями доказывается

Лемма 1. *Множества $G(\mu)$ и $S(\mu)$ будут подгруппами $GL_2(R)$ тогда и только тогда, когда тройка μ допустима. Для любой допустимой тройки μ группы $G(\mu)$ и $S(\mu)$ порождаются содержащимися в них диагональными матрицами и трансвекциями. Если тройка $\mu = (k, l, m)$ невырожденна и 2^k, 2^l, 2^m не равны нулю, то фактор-группа $S(\mu)/S(\mu + 1)$ изоморфна прямой сумме $P^+ \oplus P^+ \oplus P^+$ аддитивных групп поля вычетов P.*

Определим множество представлений элемента g из $S(\mu)$ равенством

$$P_\mu(g) = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in R \times R \times R \mid g = \begin{pmatrix} 1 + 2^k \alpha & 2^l \beta \\ 2^m \gamma & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Очевидно, для целостного кольца R любой элемент g имеет единственное представление указанного вида и $|P_\mu(g)| = 1$.

Пусть $L = L(x_{11}, x_{12}, x_{21})$ — некоторая система многочленов от трех переменных x_{11}, x_{12}, x_{21} с коэффициентами из кольца R. Запись $L(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 0 \bmod 2R$ для элементов α, β, γ кольца R будет означать, что для любого многочлена $f(x_{11}, x_{12}, x_{21})$ из системы L значение $f(\alpha, \beta, \gamma)$ лежит в идеале $2R$. Если хотя бы один такой набор существует, то будем говорить, что система L *совместна*.

Пусть $\mu = (k, l, m)$ — допустимая тройка, $L = L(x_{11}, x_{12}, x_{21})$ — совместная система функций. Определим *обобщенную ковровую подгруппу* равенством

$$S(\mu; L) = \text{гр}\,(g \in S(\mu) \mid \exists\,(\alpha, \beta, \gamma) \in P_\mu(g) : L(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 0 \bmod 2R).$$

Лемма 2. *Для любой обобщенной ковровой подгруппы H существует допустимая тройка μ такая, что $S(\mu+1) \le H \le S(\mu)$. Кроме того, H всегда можно представить в виде $H = S(\mu; L)$, где μ определяет наименьшую ковровую подгруппу с условием $H \le S(\mu)$. Такое представление для H будем называть наименьшим.*

Доказательство. Пусть $H = S(\mu; L)$, где $\mu = (k, l, m)$ — некоторая допустимая тройка,

$$g = \begin{pmatrix} 1 + 2^k\alpha & 2^l\beta \\ 2^m\gamma & 1 + 2^k\delta \end{pmatrix} \in H$$

и g' — произвольная матрица из $S(\mu+1)$. Тогда нетрудно проверить, что

$$g \cdot g' = \begin{pmatrix} 1 + 2^k(\alpha + 2\alpha'') & 2^l(\beta + 2\beta'') \\ 2^m(\gamma + 2\gamma'') & 1 + 2^k(\delta + 2^k\delta'') \end{pmatrix},$$

где $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ — некоторые элементы кольца R. Так как $g \in H$, то $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \equiv 0 \bmod 2R$, следовательно,

$$L(\alpha + 2\alpha'', \beta + 2\beta'', \gamma + 2\gamma'', \delta + 2\delta'') \equiv 0 \bmod 2R.$$

Таким образом, $g \cdot S(\mu+1) \subseteq S(\mu; L)$ и, значит, $S(\mu+1) \le S(\mu; L)$. Первое утверждение доказано.

Пусть $S(\mu')$ — наименьшая ковровая подгруппа, удовлетворяющая условию $H \le S(\mu')$, и $\mu' = (k', l', m')$. Предположим, что $k' > k$. Тогда несложно проверить, что $H = S((k', l, m); L')$, где система L' получается из системы L подстановкой $x_{11} = 0$. Аналогично рассматриваются случаи $l' > l$ и $m' > m$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть P — конечное поле, $n \in \mathbf{N}$. Тогда для любого подмножества M прямого произведения P^n существует конечная система $L(x_1, \dots, x_n)$ многочленов из $P[x_1, \dots, x_n]$, множество нулей которой совпадает с M, т. е. M — алгебраическое множество.*

Доказательство проведем индукцией по n. Если $n = 1$, то $L(x) = \prod\limits_{\alpha \in M} (x - \alpha)$. Пусть теперь $n > 1$. Определим

$$X = \{\alpha \in P \mid \exists\, y_2, \dots, y_n : (\alpha, y_2, \dots, y_n) \in M\}$$

и для каждого α из X положим

$$Y_\alpha = \{(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in P^{n-1} \mid (\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in M\}.$$

По предположению индукции существует конечная система L_α многочленов из $P[x_2, \dots, x_n]$, множество нулей которой совпадает с Y_α. Тогда несложно проверить, что система

$$L(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{\alpha \in X} (x_1 - \alpha) = 0, \\ \prod\limits_{\substack{\alpha \in X \\ \alpha \neq \alpha^*}} (x_1 - \alpha) f_{i^*}(x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_{i^*} \in L_{\alpha^*},\ \alpha^* \in X, \end{cases}$$

задает множество M. Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 2, 3 следует

Теорема 1. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $2R$ и конечным полем вычетов. Тогда подгруппа $H \leq SL_2(R)$ будет обобщенной ковровой тогда и только тогда, когда существует допустимая тройка μ такая, что $S(\mu+1) \leq H \leq S(\mu)$.*

Для произвольных допустимых троек $\mu = (k, l, m)$, $\mu' = (k', l', m')$ определим функцию $[\mu, \mu'] = \mu'' = (k'', l'', m'')$ по правилу

$$k'' = \min\{k''_*, k''_{**}\}, \quad l'' = \min\{l''_*, l''_{**}\}, \quad m'' = \min\{m''_*, m''_{**}\},$$

где

$$k''_* = \min\{l' + m' + k + \psi(k, P),\ l + m + k' + \psi(k', P)\},$$
$$l''_* = \min\{l' + k + \psi(k, P),\ l + k' + \psi(k', P)\},$$
$$m''_* = \min\{m' + k + \psi(k, P),\ m + k' + \psi(k', P)\},$$

$k''_{**} = \min\{l' + m,\ l + m'\}$, $l''_{**} = \min\{2l' + m,\ 2l + m'\}$, $m''_{**} = \min\{2m + l',\ 2m' + l\}$
и

$$\psi(a, P) = \begin{cases} 2, & \text{если } a = 1 \text{ и } P = \mathbf{F}_2, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть μ, μ' — допустимые тройки, $\mu'' = [\mu, \mu']$. Тогда*

$$S(\mu'' + 1) \leq [S(\mu), S(\mu')] \leq [G(\mu), G(\mu')] \leq S(\mu''),$$

причем тройка μ'' невырожденна.

Доказательство. Пусть g и g' — произвольные матрицы из $G(\mu)$ и $G(\mu')$ соответственно. Непосредственные вычисления коммутатора $[g, g'] = (h_{ij})_{i,j=1,2}$ показывают, что

$$h_{11} = 1 + 2^{l'+m'+k+\psi(k,P)}\alpha_1 + 2^{l+m+k'+\psi(k',P)}\alpha_2 + 2^{l'+m}\alpha_3 + 2^{l+m'}\alpha_4,$$
$$h_{12} = 2^{l'+k+\psi(k,P)}\beta_1 + 2^{l+k'+\psi(k',P)}\beta_2 + 2^{2l'+m}\beta_3 + 2^{2l+m'}\beta_4,$$
$$h_{21} = 2^{m'+k+\psi(k,P)}\gamma_1 + 2^{m+k'+\psi(k',P)}\gamma_2 + 2^{2m+l'}\gamma_3 + 2^{2m'+l}\gamma_4,$$
$$h_{22} = 1 + 2^{l'+m'+k+\psi(k,P)}\delta_1 + 2^{l+m+k'+\psi(k',P)}\delta_2 + 2^{l'+m}\delta_3 + 2^{l+m'}\delta_4,$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ — некоторые элементы из кольца R. Тем самым $[G(\mu), G(\mu')] \leq S(\mu'')$.

Обозначим $N = [S(\mu), S(\mu')]$ и покажем, что $S(\mu''+1) \leq N$. Для этого нам потребуются следующие равенства, которые проверяются непосредственными вычислениями:

$$u(2^{l+k'+1}\beta\alpha'(1 + 2^{k'-1}\alpha')) = [u(2^l\beta),\ d(1 + 2^{k'}\alpha')], \tag{1}$$

$$v(2^{m+k'+1}\gamma\alpha'(1+2^{k'-1}\alpha')) = [v(2^m\gamma),\, d(1+2^{k'}\alpha')^{-1}], \tag{2}$$

$$d(1+2^{l+m'}\beta\gamma') = u(2^{2l+m'}\beta^2\gamma'(1+2^{l+m'}\beta\gamma')^{-1}) \\ \cdot [u(2^l\beta),\, v(-2^{m'}\gamma')] \cdot v(2^{2m'+l}\beta\gamma'^2(1+2^{l+m'}\beta\gamma')^{-1}), \tag{3}$$

$$d(1+2^{l'+m'+k+1}\sigma(1+2^{k-1})) \\ = u(2^{l'+k+1}(2^{l'+m+1}\sigma-(1+2^{k-1})^{-1}))\cdot[u(2^{l'})\cdot v(2^{m'}\sigma),\, d(1+2^k)] \\ \cdot v(2^{m'+k+1}((1+2^{k-1})^{-1}-2^{l'+m+1}\sigma)(1+2^k)^{-2}). \tag{4}$$

Введем для удобства обозначения

$$b=[u(2^{l'}),v(2^m\sigma)],\quad b_1=v(2^{2m+l'}\sigma^2(1-2^{l'+m}\sigma)^{-1}),$$
$$b_2=u(2^{2l'+m}\sigma(1-2^{l'+m}\sigma)^{-1}),\quad u=u(2^{l'}\beta),\quad v=v(2^m\gamma).$$

Тогда так как $b\in N$ и $N\triangleleft \operatorname{гр}(S(\mu),S(\mu'))$, то $[bb_1,u]=[b,u]^{b_1}[b_1,u]$ и $[b^{-1}b_2,v]=[b^{-1},v]^{b_2}[b_2,v]$ лежат в N. Далее, при

$$\beta=(1-2^{l'+m-1})^{-1}\tau,\quad \gamma=(1-2^{l'+m-1})^{-1}\theta,\quad \sigma=1$$

получаем

$$u(2^{2l'+m+1}\tau)=[bb_1,u],\quad v(2^{2m+l'+1}\theta)=[b^{-1}b_2,v],$$

а при

$$\sigma=-2\omega,\quad \tau=(1+2^{l'+m+1}\omega)^{-1}\omega,\quad \theta=(1+2^{l'+m+1}\omega)^{-1}2\omega^2$$

имеем

$$d(1+2^{l'+m+1}\omega)=u(2^{2l'+m+1}\tau)\cdot b\cdot v(2^{2m+l'+1}\theta).$$

Поменяв местами во всех этих формулах «штрихованные» и «нештрихованные» символы, получим (в силу леммы 1) включение $S(\mu''+1)\le[S(\mu),S(\mu')]$.

Невырожденность тройки μ'' проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Пусть $\mu=(k,l,m)$ и $\mu'=(k',l',m')$ — произвольные допустимые тройки и $[\mu,\mu']=\mu''=(k'',l'',m'')$. Назовем *следом* i-й компоненты значения функции $[\mu,\mu']=\mu''$ набор

$$\operatorname{tr}(\mu'')^i=(\lambda_i,\varepsilon_i,\delta_i),\quad i=1,2,3,$$

из нулей и единиц, где

$$\lambda_1=\chi\,(k''=k''_*),\quad \varepsilon_1=\chi\,(k''=l'+m),\quad \delta_1=\chi\,(k''=l+m'),$$
$$\lambda_2=\chi\,(l''=l''_*),\quad \varepsilon_2=\chi\,(l''=2l'+m),\quad \delta_2=\chi\,(l''=2l+m'),$$
$$\lambda_3=\chi\,(m''=m''_*),\quad \varepsilon_3=\chi\,(m''=2m+l'),\quad \delta_3=\chi\,(m''=2m'+l),$$
$$\chi(A)=\begin{cases}1, & \text{если } A \text{ истинно},\\ 0, & \text{если } A \text{ ложно}.\end{cases}$$

Для любых допустимых троек μ, μ' определим функции

$$\langle\mu,\mu'\rangle_1=\begin{cases}1, & \text{если } \operatorname{tr}(\mu'')^1\ne\operatorname{tr}(\mu'')^2=\operatorname{tr}(\mu'')^3 \text{ и } \lambda_2=0,\\ 2, & \text{если } \operatorname{tr}(\mu'')^1=\operatorname{tr}(\mu'')^3\ne\operatorname{tr}(\mu'')^2 \text{ и } \lambda_3=0,\\ 3, & \text{если } \operatorname{tr}(\mu'')^1=\operatorname{tr}(\mu'')^2\ne\operatorname{tr}(\mu'')^3 \text{ и } \lambda_2=0,\\ 4, & \text{если } \operatorname{tr}(\mu'')^1\ne\operatorname{tr}(\mu'')^2\ne\operatorname{tr}(\mu'')^3\ne\operatorname{tr}(\mu'')^1 \text{ и } \lambda_2=\lambda_3=0,\\ 5, & \text{если } \operatorname{tr}(\mu'')^1=\operatorname{tr}(\mu'')^2=\operatorname{tr}(\mu'')^3 \text{ и } \lambda_2=0,\\ 0 & \text{иначе},\end{cases}$$

$$\langle \mu, \mu' \rangle_2 = \begin{cases} 6, & \text{если } \operatorname{tr}(\mu'')^2 = \operatorname{tr}(\mu'')^3 \text{ и } \lambda_2 = 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Зафиксируем следующие системы:

$$L_0 = \varnothing; \quad L_1 = \{x_{12} + x_{21}\}; \quad L_2 = \{x_{11} + x_{21}\}; \quad L_3 = \{x_{11} + x_{12}\};$$
$$L_4 = \{x_{11} + x_{12} + x_{21}\}; \quad L_5 = \{x_{11} + x_{12}, x_{11} + x_{21}\}; \quad L_6 = \{x_{12}^2 + x_{21}\}.$$

Теорема 2. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $2R$ и конечным полем вычетов P. Тогда для любых допустимых троек μ, μ' справедливо равенство*

$$[G(\mu), G(\mu')] = [S(\mu), S(\mu')] = S([\mu, \mu']; L_n),$$

где

$$n = \begin{cases} \langle \mu, \mu' \rangle_1, & \textit{если } P = \mathbf{F}_2, \\ \langle \mu, \mu' \rangle_2, & \textit{если } P = \mathbf{F}_4, \\ 0 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mu = (k, l, m)$, $\mu' = (k', l', m')$, $\mu'' = (k'', l'', m'') = [\mu, \mu']$. Очевидно, достаточно показать включения

$$[G(\mu), G(\mu')] \le S(\mu''; L_n) \le [S(\mu), S(\mu')].$$

Пусть

$$g = \begin{pmatrix} 1 + 2^k \alpha & 2^l \beta \\ 2^m \gamma & * \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} 1 + 2^{k'} \alpha' & 2^{l'} \beta' \\ 2^{m'} \gamma' & * \end{pmatrix} \tag{5}$$

— произвольные матрицы из $G(\mu)$ и $G(\mu')$ соответственно. Тогда из леммы 4 следует, что $[g, g'] = (h_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ лежит в $S(\mu'')$. Если $\lambda_2 = 0$, то либо $l'' = 2l' + m$ и тогда $k'' \le l' + m < k''_*$, либо $l'' = 2l + m'$ и $k'' \le l + m' < k''_*$. Следовательно, $\lambda_2 = 0$ влечет $\lambda_1 = 0$. Нетрудно проверить, что если $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_3 = 0$, то по модулю $S(\mu'' + 1)$ получаем

$$h_{11} \equiv 1 + 2^{l'+m} \beta' \gamma + 2^{l+m'} \beta \gamma', \quad h_{12} \equiv 2^{2l'+m} \beta'^2 \gamma + 2^{2l+m'} \beta^2 \gamma' + 2^{l''_*} \beta'',$$
$$h_{21} \equiv 2^{2m+l'} \beta' \gamma^2 + 2^{2m'+l} \beta \gamma'^2 + 2^{m''_*} \gamma'',$$

где β'', γ'' — некоторые элементы из R. Так как $x^2 = x$ в $\mathbf{F}_2$ и $x^4 = x$ в $\mathbf{F}_4$, отсюда легко следуют включения $[G(\mu), G(\mu')] \le S(\mu''; L_n)$ при любом n.

Осталось показать, что $S(\mu''; L_n) \le [S(\mu), S(\mu')]$. Из леммы 4 получаем $S(\mu'' + 1) \le [S(\mu), S(\mu')]$. Несложно проверить, что для любых β', γ из R верно сравнение

$$[v(2^m \gamma), u(2^{l'} \beta')] \equiv (h_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} \bmod S(\mu'' + 1), \tag{6}$$

где $h_{11} = 1 + 2^{l'+m} \beta' \gamma$, $h_{12} = 2^{2l'+m} \beta'^2 \gamma$, $h_{21} = 2^{2m+l'} \beta' \gamma^2$. Поскольку μ'' — невырожденная тройка (лемма 4), то фактор-группа $S(\mu'')/S(\mu''+1)$ изоморфна прямой сумме $P^+ \oplus P^+ \oplus P^+$ аддитивных групп поля вычетов P (лемма 1) и, значит, гр $([v(2^m \gamma), u(2^{l'} \beta')] \mid \gamma, \beta' \in R)/S(\mu'' + 1)$ изоморфно вкладывается в гр $((xy, x^2 y, xy^2) \in P \oplus P \oplus P \mid x, y \in P)$. Докажем одну техническую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $G = \text{гр}\,((xy, x^2y, xy^2) \in P \oplus P \oplus P \mid x, y \in P)$, *где* P — *поле характеристики* 2. *Тогда*

$$G = \begin{cases} \{(z,z,z) \mid z \in P\}, & \text{если } P = \mathbf{F}_2, \\ P^+ \oplus \{(z,z^2) \mid z \in P\}, & \text{если } P = \mathbf{F}_4, \\ P^+ \oplus P^+ \oplus P^+ & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как $x^2 = x$ в поле $\mathbf{F}_2$, первое утверждение леммы очевидно.

Если $P = \mathbf{F}_4$, то $x^4 = x$ и, значит, (ξ, ν, ν^2) лежит в G для любых ξ, ν из P. Поскольку $(\xi, \nu, \nu^2) + (\xi_1, \nu_1, \nu_1^2) = (\xi + \xi_1, \nu + \nu_1, (\nu + \nu_1)^2)$ для любых ξ, ξ_1, ν, ν_1 из P, доказано второе утверждение.

Пусть теперь $|P| > 4$. Обозначим через P^* множество обратимых элементов поля P. Положим $x = ba^{-1}, y = b^{-1}a^2$, где a, b — произвольные элементы из P^*. Тогда $(xy, x^2y, xy^2) = (a, b, a^3b^{-1}) \in G$. Так как $|P| > 4$, то для любого $\xi \in P^*$ существует $\xi_1 \in P^*$ такой, что $\xi + \xi_1 \in P^*$ и $(\xi + \xi_1)^2 \neq \xi\xi_1$. Положим $b = ((\xi + \xi_1)^3 + \xi_1^3)\zeta^{-1}$, где $\zeta \in P^*$. Тогда

$$(\xi + \xi_1, b, (\xi + \xi_1)^3 b^{-1}) + (\xi_1, b, \xi_1^3 b^{-1}) = (\xi, 0, \zeta)$$

лежит в G. Выбрав $\zeta_1 \in P^*$ так, что $\zeta + \zeta_1 \neq 0$, получим, что и элемент $(\xi, 0, \zeta + \zeta_1) + (\xi, 0, \zeta_1) = (0, 0, \zeta)$ также лежит в G. Отсюда легко следует третье утверждение леммы. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Включения $S(\mu''; L_n) \leq [S(\mu), S(\mu')]$ несложно вывести из леммы 5, равенств (1)–(4), (6) и равенств, получаемых из них перестановкой «штрихованных» и «нештрихованных» символов. Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть* R — *локальное кольцо с максимальным идеалом* $2R$ *и конечным полем вычетов* P. *Множество ковровых подгрупп* $S(\mu), G(\mu)$ *замкнуто относительно коммутирования тогда и только тогда, когда* $|P| > 4$.

Лемма 6. *Если* $S(\mu; L)$ *и* $S(\mu'; L')$ — *наименьшие представления двух обобщенных ковровых подгрупп и* $\mu'' = [\mu, \mu']$, *то*

$$S(\mu'' + 2) \leq [S(\mu; L), S(\mu'; L')] \leq S(\mu'').$$

Доказательство. Включение $N = [S(\mu; L), S(\mu'; L')] \leq S(\mu'')$ непосредственно следует из леммы 4. Покажем, что $S(\mu'' + 2) \leq N$.

Пусть $\mu = (k, l, m)$ и $\mu' = (k', l', m')$. Так как представление $S(\mu; L)$ наименьшее, то в $S(\mu; L)$ существует матрица

$$g = \begin{pmatrix} 1 + 2^k\alpha & 2^l\beta \\ 2^m\gamma & * \end{pmatrix}$$

такая, что $\beta\gamma$ — обратимый элемент. Введем для удобства следующие обозначения:

$$b = [g, v(2^{m'+1}\sigma)], \quad b_1 = v(2^{m'+1}\gamma'\sigma), \quad u = u(2^{l+1}\xi\tau),$$
$$\gamma' = (2^{k+1}\alpha(1 + 2^{k-1}\alpha) + 2^{l+m'+1}\beta\sigma(1 + 2^k\alpha))(1 - 2^{l+m'+1}\beta\sigma(1 + 2^k\alpha))^{-1},$$
$$\xi = (\beta(1 + 2^k\alpha)(1 - 2^{l+m'}\beta(1 + 2^k\alpha)))^{-1}.$$

Так как $b \in N$ и $N \triangleleft \text{гр}\,(S(\mu; L), S(\mu'; L'))$, то при $\sigma = 1$ матрица

$$u(2^{2l+m'+3}\tau) = [bb_1, u] = [b, u]^{b_1}[b_1, u]$$

лежит в N для любого $\tau \in R$. Аналогично показывается, что матрица $v(2^{2m'+l+3}\theta)$ лежит в N для любого $\theta \in R$, а значит, и

$$d(1 + 2^{l+m'+2}\omega) = u(2^{2l+m'+3}\omega(1 + 2^{l+m'+2}\omega)^{-1}) \\ \cdot [u(2^{l+1}), v(-2^{m'+1}\omega)] \cdot v(2^{2m'+l+3}\omega^2(1 + 2^{l+m'+2}\omega)^{-1})$$

лежит в N. При $\sigma = 2\beta\zeta$ матрицы b_1 и

$$u(2^{2l+m'+2}\zeta) = d(1 - 2^{l+m'+2}\beta\sigma(1 + 2^k\alpha))^{-1}bb_1u(2^{3l+2m'+4}(1 + 2^k\alpha)\beta^2\zeta)$$

также принадлежат N. Аналогично получаем $v(2^{2m'+l+2}\nu) \in N$. Кроме того,

$$d(1 + 2^{l+m+k'+4}\omega) = u(2^{l+k'+3}\gamma_1) \\ \cdot [u(-2^{l+1}\omega) \cdot v(2^{m+1}\delta^{-1}(1 + 2^{k'}\delta)^{-1}), d(1 + 2^{k'+1}\delta)] \cdot v(2^{m+k'+3}\gamma_2),$$

$$d(1 + 2^{l+m+k'+3}\omega_1) \\ \equiv [g, d(1 - 2^{k'+2}(\beta\gamma)^{-1}\omega_1)] \bmod S(l + m + k' + 4, l + k' + 3, m + k' + 3),$$

где

$$\gamma_1 = \omega\delta(1 + 2^{k'}\delta)(1 + 2^{l+m+k'+4}\omega)^{-1},$$
$$\gamma_2 = (1 - 2^{l+m+2}\omega\delta^{-1}(1 + 2^{k'}\delta)^{-1})(1 + 2^{l+m+k'+4}\omega)^{-1}(1 + 2^{k'+1}\delta)^{-2}.$$

Меняя местами во всех этих формулах «штрихованные» и «нештрихованные» символы и учитывая (1)–(4), получим (в силу леммы 1) включение $S(\mu'' + 2) \leq N$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $2R$ и конечным полем вычетов P. Множество обобщенных ковровых подгрупп замкнуто относительно коммутирования тогда и только тогда, когда $|P| = 2$.*

Доказательство. Пусть $S(\mu; L)$, $S(\mu'; L')$ — наименьшие представления двух обобщенных подгрупп и $\mu'' = [\mu, \mu']$. Покажем, что $N = [S(\mu; L), S(\mu'; L')]$ — обобщенная ковровая подгруппа. В силу леммы 6 имеем включения $S(\mu'' + 2) \leq N \leq S(\mu'')$.

Покажем, что $l'' + m'' > k'' + 1$. Если $k'' = l + m + k' + \psi(k', P)$, то из $k'' \leq l + m'$ и $k'' \leq l' + m$ легко следует, что $l'' = l + k' + \psi(k', P)$, $m'' = m + k' + \chi(k', P)$ и $l'' + m'' > k'' + 1$. Предположим теперь, что $k'' = l + m'$. Нетрудно проверить, что $l + m'' \geq k''$ и $l' + m \geq k''$, а значит, $l'' + m'' > k'' + 1$. Остальные возможности для k'' проверяются аналогично.

Пусть $S(\mu_1)$ и $S(\mu_2)$ — наибольшая и наименьшая ковровые подгруппы с условием $S(\mu'' + 2) \leq S(\mu_1) \leq N \leq S(\mu_2) \leq S(\mu'')$. Покажем, что $S(\mu_2 + 1) \leq S(\mu_1)$.

Определим отображения $\varphi_i : S(\mu; L) \to S(\mu; L)$, $i = 1, 2, 3$, по правилу: если

$$g = \begin{pmatrix} 1 + 2^k\alpha & 2^l\beta \\ 2^m\gamma & * \end{pmatrix} \in S(\mu; L),$$

то
$$\varphi_1(g)=\begin{pmatrix}1+2^k\alpha & -2^l\beta\\ -2^m\gamma & *\end{pmatrix},\quad \varphi_2(g)=\begin{pmatrix}1-2^k\alpha & -2^l\beta\\ 2^m\gamma & *\end{pmatrix},$$
$$\varphi_3(g)=\begin{pmatrix}1-2^k\alpha & 2^l\beta\\ -2^m\gamma & *\end{pmatrix}.$$
Аналогично определим φ_i',φ_i'', $i=1,2,3$, для $S(\mu';L')$ и $S(\mu'';L'')$. Несложно проверить, что
$$[\varphi_1(g),\varphi_1'(g')]=\varphi_1''([g,g']),$$
$$[\varphi_i(g),\varphi_i'(g')]\equiv\varphi_j''([g,g'])\bmod S(\mu''+2),\quad \text{где } i\in\{2,3\},\ i+j=5.$$

Пусть $k_2=k''$. Тогда должны существовать матрицы $g\in S(\mu;L)$ и $g'\in S(\mu';L')$ такие, что на месте (1,1) в матрице $[g,g']$ стоит элемент $1+2^{k''}\alpha$, где $\alpha\notin 2R$. Так как $l''+m''>k''+1\geq 2$, имеем
$$[g,g']\cdot[\varphi_1(g),\varphi_1'(g')]\equiv d(1+2^{k''+1}\alpha)\bmod S(\mu''+2),$$
т. е. для любого $\alpha_1\in R$ матрица $d(1+2^{k''+1}\alpha_1)$ лежит в N. Таким образом, всегда $k_2+1\geq k_1$.

Покажем теперь, что $l_2+1\geq l_1$. Если $l_2=l''$, то существуют матрицы $g\in S(\mu;L)$ и $g'\in S(\mu';L')$ такие, что на месте (1,2) в $[g,g']$ стоит элемент $2^{l''}\beta$, где $\beta\notin 2R$. Тогда
$$[g,g']\cdot[\varphi_2(g),\varphi_2'(g')]\equiv u(2^{l''+1}\beta)\bmod S(\mu''+2),$$
т. е. для любого $\beta_1\in R$ матрица $u(2^{l''+1}\beta_1)$ лежит в N и тем самым $l''+1\geq l_1$. Итак, $l_2+1\geq l_1$ для любого l_2.

Аналогично с использованием φ_3, φ_3' получаем $m_2+1\geq m_1$. Следовательно, $S(\mu_2+1)\leq H\leq S(\mu_2)$, и осталось применить теорему 1.

Итак, достаточность условия $|P|=2$ доказана. Необходимость вытекает из нижеследующих лемм 7, 8.

Пусть $\mu=(k,l,m)$ — допустимая тройка и
$$\hat{s}(\mu)=\begin{pmatrix}1+2^k & 2^l\\ 2^m & *\end{pmatrix}\in S(\mu).$$
Введем в рассмотрение подгруппу
$$T(\mu)=\text{гр}\,(\hat{s}(\mu))\cdot S(\mu+1;(x_{11}+x_{12}+x_{21})(x_{11}+x_{12}+x_{21}+1)).$$

Лемма 7. *Пусть тройка $\mu=(k,l,m)$ удовлетворяет условию $l+m>k+1>2$. Тогда $T(\mu)=S(\mu;L_4)$, если $|P|=2$, и $T(\mu)$ не является обобщенной ковровой подгруппой, если $|P|>2$.*

Доказательство. Если $|P|=2$, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай $|P|>2$. Введем следующие обозначения:
$$t_1(\alpha)=\begin{pmatrix}1+2^{k+1}\alpha & 2^{l+1}\alpha\\ 0 & *\end{pmatrix},\quad t_2(\alpha)=\begin{pmatrix}1+2^{k+1}\alpha & 0\\ 2^{m+1}\alpha & *\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Возьмем произвольную матрицу g вида (5) из подгруппы
$$S(\mu+1;(x_{11}+x_{12}+x_{21})(x_{11}+x_{12}+x_{21}+1)).$$

Легко проверить, что

$$g \equiv \begin{cases} t_1(\beta)t_2(\gamma), & \text{если } \alpha+\beta+\gamma \equiv 0 \bmod 2R, \\ t_1(\beta+1)t_2(\gamma+1)\hat{s}(\mu+1), & \text{если } \alpha+\beta+\gamma \equiv 1 \bmod 2R, \end{cases}$$

по модулю $S(\mu+2)$. Отсюда, учитывая сравнение $\hat{s}^2(\mu) \equiv \hat{s}(\mu+1)$ по модулю $S(\mu+2)$, получаем

$$T(\mu) = (\hat{s}(\mu), t_1(\alpha), t_2(\alpha) \mid \alpha \in R) \cdot S(\mu+2). \tag{8}$$

Так как $|P| > 2$, существует элемент $\xi \notin 2R \cup (1+2R)$. Матрица

$$\begin{pmatrix} 1+2^{k+1} & 2^{l+1} \\ 2^{m+1}\xi & * \end{pmatrix}$$

лежит в $S(\mu+1)$, но не лежит в $T(\mu)$, т. е. $T(\mu)$ не является обобщенной ковровой подгруппой в силу теоремы 1. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть μ, μ' — допустимые тройки,*

$$\mu'' = (k'', l'', m'') = [\mu, \mu'] = (l'+m, 2l'+m, 2m+l').$$

Тогда если $|P| > 2$ и

$$k''+2 \le \min\{l+m', l'+m'+k+1,\ l+m+k'+1\},$$
$$l''+2 \le \min\{l'+k+1, l+k'+1, 2l+m'\},$$
$$m''+2 \le \min\{m'+k+1, m+k'+1, 2m'+l\},$$

то $[S(\mu; x_{12}+1), S(\mu'; x_{21}+1)] = T(\mu'')$.

Доказательство. Пусть g, g' — произвольные матрицы вида (5) из $S(\mu; x_{12}+1)$ и $S(\mu'; x_{21}+1)$ соответственно и $[g, g'] = (h_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$. Легко проверить, что $h_{11} \equiv 1 - 2^{k''}\beta'\gamma$, $h_{12} \equiv -2^{l''}\beta'^2\gamma$, $h_{21} \equiv 2^{m''}\beta'\gamma^2$ по модулю $S(\mu''+2)$. Используя обозначения (7) при $\mu'' = \mu$, получаем $g \equiv t_2(\gamma_1)$, если $\beta = 1+\beta_1'$ и $\gamma = 2\gamma_1$; $g \equiv t_1(\beta_1')$, если $\beta = 2\beta_1'$ и $\gamma = 1+2\gamma_1$; $g \equiv \hat{s}(\mu'')t_1(\beta_1')t_2(\gamma_1)$, если $\beta = 1+\beta_1'$ и $\gamma = 1+2\gamma_1$. Таким образом, учитывая (8), несложно получить равенство $[S(\mu; x_{12}+1), S(\mu'; x_{21}+1)] = T(\mu)$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
2. *Мерзляков Ю. И.* Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 4. С. 49–59.
3. *Сосновский Ю. В.* Коммутаторное строение симплектических групп // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 5. С. 641–648.
4. *Левчук В. М.* Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых матричных групп // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 4. С. 799–802.
5. *Вапнэ Ю. Е.* Центральные ряды и ряды коммутантов некоторых матричных групп // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 3. С. 497–504.
6. *Sauer T.* Die unteren Zentralreihen und kommutatorreihen spezieller kongruenzuntergruppen in $SL(2, Z_2)$ // Beiträge Algebra Geom. 1991. V. 32. P. 41–46.
7. *Яковлев Е. В.* О коммутаторном строении обобщенных ковровых подгрупп двумерных линейных групп // Групповые и метрические свойства отображений. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995. С. 75–96.
8. *Яковлев Е. В.* Коммутирование на множестве обобщенных ковровых подгрупп // Вестн. Челяб. гос. пед. ун-та. Сер. 4. Естественные науки. 1996. № 1. . С. 104–110.
9. *Яковлев Е. В.* Ковровые и обобщенные ковровые подгруппы двумерных линейных групп / Челяб. гос. ун-т. М., 1996. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 25.03.96, № 937-В96.

Статья поступила 18 апреля 1997 г.

г. Челябинск