Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2000. Том 41, № 3

УДК 517.95

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ L_1–НОРМ У СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д. Р. Ахметов

Аннотация: Рассмотрена однородная задача Коши для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами и произвольными равномерно непрерывными начальными данными. Показано, что в классе начальных данных C_ω с фиксированным модулем непрерывности ω необходимым и достаточным условием существования L_1-норм у старших производных ограниченных классических решений данной задачи является условие Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau < \infty.$$

Библиогр. 28.

1. Введение

В качественной теории дифференциальных уравнений параболического типа до сих пор остается открытой проблема существования L_1-норм у старших производных классических решений начально-краевых задач. Интерес к этой тематике особенно возрос в последнее время в связи с ее актуальностью для различных задач, возникающих в приложениях и связанных с ними численных методах (случай «больших градиентов»). Например, в ряде математических моделей, описывающих реальные химические процессы, L_1-оценки решений имеют конкретный физический смысл и практические приложения (см. [1–3]). Если бы имелись априорные оценки L_1-норм старших производных решений, то можно было бы доказать разрешимость «в целом» (по времени) нелинейных задач, встречающихся в химии. Кроме того, априорные оценки полной вариации решений параболических уравнений, т. е. оценки интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(x,t)|\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}(x,t)|\, dx, \quad \int_0^T |u_t(x,t)|\, dt,$$

представляют большой интерес, потому что они влекут за собой сходимость параболических аппроксимаций для общих гиперболических систем дифференциальных уравнений, сведенных к параболическим посредством дополнительных

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 00–01–00912).

слагаемых $\varepsilon u_{x_i x_j}$. Поэтому такие оценки можно использовать при изучении разрешимости общих гиперболических систем. Сходимость метода конечных элементов, до сих пор являющаяся основной нерешенной проблемой, возникающей при отыскании слабых решений систем законов сохранения, тоже тесно связана с априорными оценками полной вариации решений, т. е. с L_1-оценками их производных (см. [4]). Наконец, заметим, что изучение этих вопросов внесет серьезный вклад в завершение L_p-теории параболических уравнений, которая достаточно полно развита для значений $p \in (1, \infty)$ (см. [5–8]). Случаи $p = 1$ и $p = \infty$ исследованы недостаточно.

В настоящей работе нас будет интересовать существование L_1-норм у старших производных u_t и $u_{x_i x_j}$ ограниченных классических решений линейных параболических уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами.

В классической постановке хорошо изучена ситуация, когда коэффициенты уравнения, правая часть и граничные функции в той или иной форме удовлетворяют условию Гёльдера (см. [5, 6, 9–19] и имеющуюся там библиографию). Случай, когда коэффициенты, правые части и краевые условия только лишь непрерывны и не подчинены каким-нибудь дополнительным ограничениям, остается мало изученным и в настоящее время (см. [20–28]). Ситуация здесь принципиально осложняется тем, что само существование классического решения в данном случае является серьезной проблемой. Известно, например, что если коэффициенты линейного параболического уравнения не удовлетворяют условию Гёльдера, а имеют модуль непрерывности $\omega(\delta) = \frac{C}{\ln(\frac{1}{\delta})}$ при $\delta \in (0, \varepsilon)$, то краевая задача для однородного уравнения с гладкими начально-краевыми условиями, вообще говоря, не имеет классического решения (см. [23]). Более того, в этом случае может не существовать даже фундаментального решения параболического уравнения (см. [21]). Известные достаточные условия [20, 22, 27] классической разрешимости требуют, чтобы модули непрерывности коэффициентов уравнения, правой части и граничных функции по крайней мере удовлетворяли условию Дини. Однако тогда старшие производные решения уже могут не иметь модуля непрерывности, эквивалентного модулю непрерывности правой части (см. [26, 28]). Таким образом, в данной ситуации невозможно получить точные коэрцитивные оценки норм классических решений линейных уравнений и, следовательно, известными методами [5, 6, 14] не удастся доказать разрешимость нелинейных параболических уравнений, если модули непрерывности коэффициентов и других данных задачи не удовлетворяют условию Гёльдера. Кроме того, в связи с результатами [21, 23, 26–28] очевидно, что в терминах только модулей непрерывности нельзя получить достаточные условия классической разрешимости параболических задач, близкие к необходимым. Значит, нужно искать какие-то другие более или менее эффективные формулировки достаточных условий. Естественно ожидать, что такие достаточные требования, налагаемые, например, на правую часть уравнения, должны соответствовать свойствам старших производных решений однородного уравнения. Одними из возможных свойств старших производных решений однородного уравнения могут быть оценки их L_1-норм. С этой точки зрения детальное изучение таких L_1-оценок может оказать решающее влияние на поиск необходимых и достаточных условий классической разрешимости параболических задач как для линейных, так и для нелинейных уравнений.

В настоящей работе рассмотрена однородная задача Коши для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами и произвольными равномерно непрерывными начальными данными. Показано, что в классе начальных данных C_ω с фиксированным модулем непрерывности ω необходимым и достаточным условием существования L_1-норм у старших производных ограниченных классических решений данной задачи является условие Дини

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau}\,d\tau < \infty.$$

Любопытно отметить, что это условие Дини является также необходимым и достаточным для классической разрешимости неоднородной задачи Коши в классе правых частей с фиксированным модулем непрерывности ω (см. [27]). Наконец, заметим, что оно же является существенным достаточным ограничением и на коэффициенты параболического уравнения, при котором можно гарантировать существование фундаментального решения и классического решения задачи Коши (см. [21–23]). Если модуль непрерывности ω не удовлетворяет условию Дини, то существует такое уравнение вида (1) с непрерывными коэффициентами, имеющими модуль непрерывности по пространственным переменным, не превосходящий данного ω, для которого первая краевая задача с гладкими граничными условиями не имеет классического решения (см. [23]).

Класс функций, удовлетворяющих условию Дини, существенно шире класса степенных функций $\omega(\delta) = C\delta^\alpha$, где $C, \alpha > 0$ — постоянные. В частности, условию Дини удовлетворяют все модули непрерывности ω, которые при некотором $\varepsilon > 0$ для $\delta \in (0, \varepsilon)$ имеют вид

$$\omega(\delta) = \frac{C}{\ln^\alpha(\frac{1}{\delta})},$$

где $C > 0$, $\alpha > 1$ — постоянные. Если же $\alpha \in (0, 1]$, то условие Дини не выполняется и можно построить упомянутые выше контрпримеры [21, 23, 27].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения

$$L(u) = 0 \text{ в } H(T), \quad u(x,0) = \varphi(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с равномерно параболическим оператором

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x,t)u,$$

где коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ и функция $u(x,t)$ — вещественнозначные функции аргументов $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$; $H(T) = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T)\}$.

Напомним, что *классическим решением* задачи (1) называется непрерывная при $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0,T)$ функция $u(x,t)$, имеющая в полосе $H(T)$ непрерывные производные u_t, $u_{x_i x_j}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ и удовлетворяющая уравнениям (1).

Говорят, что функция $u(x,t)$ *принадлежит тихоновскому классу функций* в полосе $\overline{H}(T)$, если она непрерывна в этой полосе и удовлетворяет условию

$$\max_{t\in[0,T]} |u(x,t)| \le C_u e^{M_u|x|^2},$$

где $C_u, M_u > 0$ — некоторые постоянные, зависящие от u.

Известно, что в тихоновском классе функций не может существовать более одного классического решения задачи (1) (см. [9, 24]). Известно также, что если коэффициенты уравнения принадлежат гёльдеровским пространствам функций, а начальные данные являются непрерывной ограниченной функцией, то существует ограниченное классическое решение задачи (1) (см. [5, 6, 11–14]). Для производных этого ограниченного классического решения справедливы оценки

$$\left|D_{t,x}^{k,l} u(x,t)\right| \le \frac{C}{t^{k+|l|/2}}$$

в $H(T)$ при $2k + |l| \le 2$, где C — некоторая постоянная.

Таким образом, *старшие производные* $D_{t,x}^{k,l} u(x,t)$, $2k + |l| = 2$, ограниченного классического решения задачи (1) имеют, вообще говоря, *несуммируемую* особенность при $t \to 0$, если начальные данные только лишь непрерывны и ограничены и не подчинены каким-нибудь дополнительным ограничениям.

Если же начальные данные дополнительно удовлетворяют условию Гёльдера с тем же показателем $\alpha \in (0,1)$, что и коэффициенты уравнения, то можно более тонко оценить модули производных решения задачи (1):

$$\left|D_{t,x}^{k,l} u(x,t)\right| \le C \frac{t^{\alpha/2}}{t^{k+|l|/2}}$$

в $H(T)$ при $2k + |l| \le 2$, где C — некоторая постоянная (см. [15]). Из этих оценок следует сходимость интегралов

$$\int\limits_0^T |u_t(x,t)|\, dt < \infty, \quad \int\limits_0^T |u_{x_i x_j}(x,t)|\, dt < \infty$$

с равномерными по x квалифицированными оценками, зависящими от показателя Гёльдера $\alpha \in (0,1)$ коэффициентов уравнения и начальных данных:

$$\int\limits_0^t |u_t(x,\tau)|\, d\tau \le C t^{\alpha/2}, \quad \int\limits_0^t |u_{x_i x_j}(x,\tau)|\, d\tau \le C t^{\alpha/2}$$

в $H(T)$, где C — некоторая постоянная, $i, j = 1, \ldots, n$.

Определение 1. Будем говорить, что *в полосе $H(T)$ существует L_1-норма у функции $u(x,t)$*, если конечна величина

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int\limits_0^T |u(x,t)|\, dt < \infty.$$

Определение 2. Функция $\omega(\delta)$, определенная и непрерывная при $\delta \ge 0$, называется *модулем непрерывности*, если выполнены следующие условия: $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2)$ при $0 \le \delta_1 \le \delta_2$, $\omega(\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ при $\delta_1, \delta_2 \ge 0$. Если $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ является равномерно непрерывной функцией, то

$$\omega_\varphi(\delta) = \sup_{|x-y| \le \delta} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

удовлетворяет этим условиям и называется *модулем непрерывности функции φ*.

Справедливо следующее утверждение (см., например, [26]).

Лемма 1. *Любой модуль непрерывности ω обладает свойствами*

$$\omega(\alpha\delta) \leq (\alpha+1)\omega(\delta) \text{ при } \alpha, \delta \geq 0, \quad \frac{\omega(t)}{t} \leq 2\frac{\omega(\delta)}{\delta} \text{ при } 0 < \delta \leq t.$$

Заметим, что условие Гёльдера (с показателем $\alpha > 0$) для функции $\varphi(x)$ эквивалентно тому, что ее модуль непрерывности $\omega_\varphi(\delta)$ не превосходит некоторой степенной функции:

$$\omega_\varphi(\delta) \leq C\delta^\alpha \text{ при } \delta \geq 0,$$

где $C, \alpha > 0$ — постоянные.

Таким образом, если модули непрерывности коэффициентов равномерно параболического уравнения и начальных данных не превосходят некоторой степенной функции (условие Гёльдера), то в полосе $H(T)$ существуют L_1-нормы у старших производных $D^{k,l}_{t,x}u(x,t)$, $2k + |l| = 2$, ограниченного классического решения $u(x,t)$ задачи (1). Возникает следующий

Вопрос. При каких минимальных требованиях к модулям непрерывности коэффициентов равномерно параболического оператора L и к модулю непрерывности $\omega_\varphi(\delta)$ начальных данных $\varphi(x)$ можно гарантировать существование L_1-норм у старших производных $D^{k,l}_{t,x}u(x,t)$, $2k + |l| = 2$, ограниченного классического решения $u(x,t)$ задачи (1)?

Частичный ответ на этот вопрос в случае задачи Коши для простейшего одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } x \in \mathbb{R} \text{ и } t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x) \text{ при } x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

вытекает из работы [26, теорема 1]. Если модуль непрерывности ω начальных данных не удовлетворяет условию Гёльдера, но удовлетворяет условию Дини, то L_1-нормы старших производных ограниченного классического решения $u(x,t)$ задачи (2) продолжают существовать, так как справедливы оценки

$$|u_t(x,t)| \leq C\frac{\omega(\sqrt{t})}{t}, \quad |u_{xx}(x,t)| \leq C\frac{\omega(\sqrt{t})}{t}$$

при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, где C — некоторая постоянная. Однако даже в этом простом случае остается открытым вопрос: существуют ли L_1-нормы у старших производных ограниченного классического решения задачи (2), если модуль непрерывности начальных данных не удовлетворяет условию Дини?

В настоящей работе дается, вообще говоря, отрицательный ответ на этот вопрос, и этот результат распространяется на случай задачи Коши (1) с переменными коэффициентами. Будет показано, что в классе начальных данных C_ω с фиксированным модулем непрерывности ω условие Дини является необходимым и достаточным для существования L_1-норм у старших производных ограниченных классических решений задачи (1). Если модуль непрерывности ω начальных данных удовлетворяет условию Дини, то в полосе $H(T)$ существуют L_1-нормы у старших производных $D^{k,l}_{t,x}u(x,t)$, $2k + |l| = 2$, ограниченного классического решения $u(x,t)$ задачи (1). Если же модуль непрерывности ω не удовлетворяет условию Дини, то найдутся начальные данные $\varphi(x)$ с данным модулем непрерывности ω, для которых существует ограниченное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1), но расходится интеграл

$$\int\limits_0^T |u_t(0,t)|\,dt = \infty.$$

3. Критерий существования L_1-норм у старших производных

Пусть $T > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ — постоянные, ω — модуль непрерывности, $|x|$ — евклидова норма вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндекс, $|l| = l_1 + \dots + l_n$.

Обозначим через $C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}$ множество непрерывных в $\overline{H}(T)$ функций $u(x,t)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}} = \|u\|_C + \sup \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{|x-y|^\alpha} + \sup \frac{|u(x,t) - u(x,t+\delta)|}{\delta^{\alpha/2}},$$

где первый супремум берется по всем точкам $(x,t) \neq (y,t)$ из полосы $\overline{H}(T)$, второй — по всем точкам (x,t), $(x,t+\delta)$ $(\delta > 0)$ из полосы $\overline{H}(T)$,

$$\|u\|_C = \sup_{(x,t) \in \overline{H}(T)} |u(x,t)|.$$

Аналогично через $C_{x,t}^{\alpha,0}$ обозначим множество непрерывных в $\overline{H}(T)$ функций $u(x,t)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{C_{x,t}^{\alpha,0}} = \|u\|_C + \sup \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

где супремум берется по всем точкам $(x,t) \neq (y,t)$ из полосы $\overline{H}(T)$.

Наконец, символом C_ω будем обозначать множество непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций $\varphi(x)$, имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{C_\omega} = \|\varphi\|_C + \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n,\, x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\omega(|x-y|)}.$$

Легко показать, что $C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}$, $C_{x,t}^{\alpha,0}$ и C_ω — банаховы пространства.

Теорема. *Пусть коэффициенты a_{ij} равномерно параболического оператора L принадлежат множеству $C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}$, а коэффициенты b_i и c — множеству $C_{x,t}^{\alpha,0}$ $(i,j = 1,\dots,n)$. Для того чтобы существовали L_1-нормы у старших производных всех ограниченных классических решений задачи* (1) *с произвольными начальными данными из класса C_ω, необходимо и достаточно, чтобы модуль непрерывности ω удовлетворял условию Дини*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau < \infty.$$

Замечание. Достаточность условия Дини остается справедливой и в случае, когда все коэффициенты оператора L принадлежат множеству $C_{x,t}^{\alpha,0}$.

Доказательство. Докажем достаточность условия Дини в предположении, что все коэффициенты равномерно параболического оператора L принадлежат множеству $C_{x,t}^{\alpha,0}$. В этом случае существует фундаментальное решение $Z(x,t,\xi,\tau)$ уравнения $L(u) = 0$ в полосе $H(T)$, представимое в виде

$$Z(x,t,\xi,\tau) = W_\xi(x,t,\xi,\tau) + V(x,t,\xi,\tau),$$

где $W_\zeta(x,t,\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\zeta,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

в полосе $H(T)$ при фиксированном значении параметра $\zeta \in \mathbb{R}^n$, причем функции $W_\zeta(x,t,\xi,\tau)$ и $V(x,t,\xi,\tau)$ обладают следующими свойствами:

$$\left|D^{k,l}_{t,x} W_\zeta(x,t,\xi,\tau)\right| \le \frac{C}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2}} e^{-M|x-\xi|^2/(t-\tau)}, \tag{3}$$

$$\left|D^{k,l}_{t,x} W_\zeta(x,t,\xi,\tau) - D^{k,l}_{t,x} W_{\zeta_0}(x,t,\xi,\tau)\right| \le \frac{C|\zeta-\zeta_0|^\alpha}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2}} e^{-M|x-\xi|^2/(t-\tau)}, \tag{4}$$

$$\left|D^{k,l}_{t,x} V(x,t,\xi,\tau)\right| \le \frac{C}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2-\lambda}} e^{-M|x-\xi|^2/(t-\tau)} \tag{5}$$

при $2k+|l| \le 2$, $x,\xi,\zeta,\zeta_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau < t \le T$, где $C, M, \lambda > 0$ — некоторые постоянные (см. [13, 14]).

Известно также, что если начальные данные $\varphi(x)$ являются непрерывной ограниченной функцией, то в тихоновском классе функций существует единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1) и это решение представляется интегралом Пуассона

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi$$

в полосе $H(T)$, а его производные вычисляются по формулам

$$D^{k,l}_{t,x} u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^{k,l}_{t,x} Z(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi$$

в $H(T)$ для $2k+|l| \le 2$ (см. [13, 24]).

Рассмотрим разложение

$$D^l_x u(x,t) = I^l_1 + I^l_2 + I^l_3 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^l_x W_\zeta(x,t,\xi,0)\big|_{\zeta=x}\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(D^l_x W_\xi(x,t,\xi,0) - D^l_x W_\zeta(x,t,\xi,0)\big|_{\zeta=x}\right)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^l_x V(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi$$

в $H(T)$ для $|l| = 1, 2$. Известно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D^{k,l}_{t,x} W_\zeta(x,t,\xi,\tau)\,d\xi = \begin{cases} 1 & \text{при } 2k+|l| = 0, \\ 0 & \text{при } 2k+|l| = 1, 2 \end{cases}$$

для $x,\zeta \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau < t \le T$ (см. [13]), поэтому с учетом (3) имеем

$$\left|I^l_1(x,t)\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} D^l_x W_\zeta(x,t,\xi,0)\big|_{\zeta=x}(\varphi(\xi)-\varphi(x))\,d\xi\right| \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega(|x-\xi|)}{t^{n/2+|l|/2}} e^{-M|x-\xi|^2/t}\,d\xi$$

для $|l| = 1, 2$ и остается сделать замену переменной интегрирования $\xi = x + \sqrt{t}\eta$ и воспользоваться леммой 1:

$$\left|I^l_1(x,t)\right| \le C\frac{\omega(\sqrt{t})}{t^{|l|/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\eta|+1)e^{-M|\eta|^2}\,d\eta \le C\frac{\omega(\sqrt{t})}{t^{|l|/2}}$$

в $H(T)$ для $|l| = 1, 2$. Аналогично из (4) вытекает, что

$$\left|I_2^l(x,t)\right| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-\xi|^\alpha}{t^{n/2+|l|/2}} e^{-M|x-\xi|^2/t}\, d\xi \le C \frac{t^{\alpha/2}}{t^{|l|/2}}$$

и, наконец, в силу (5)

$$\left|I_3^l(x,t)\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{t^{n/2+|l|/2-\lambda}} e^{-M|x-\xi|^2/t}\, d\xi \le C \frac{t^{\lambda}}{t^{|l|/2}}.$$

Итак, справедлива оценка

$$\left|D_x^l u(x,t)\right| \le C \frac{\omega(\sqrt{t}) + t^{\alpha/2} + t^\lambda}{t^{|l|/2}}$$

в $H(T)$ для $|l| = 1, 2$, из которой сразу следует, что

$$\int\limits_0^t \left|D_x^l u(x,\tau)\right| d\tau \le C(\omega(\sqrt{t})\sqrt{t} + t^{\alpha/2+1/2} + t^{\lambda+1/2})$$

в $\overline{H}(T)$ для $|l| = 1$ и

$$\int\limits_0^t \left|D_x^l u(x,\tau)\right| d\tau \le C \left(\int\limits_0^{\sqrt{t}} \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau + t^{\alpha/2} + t^\lambda \right)$$

в $\overline{H}(T)$ для $|l| = 2$, где C — некоторая постоянная. Аналогичная L_1-оценка производной u_t вытекает из уравнения (1):

$$\int\limits_0^t |u_t(x,\tau)|\, d\tau \le C \left(\int\limits_0^{\sqrt{t}} \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau + t^{\alpha/2} + t^\lambda \right)$$

в $\overline{H}(T)$, где C — некоторая постоянная. Достаточность условия Дини доказана.

Покажем теперь его необходимость. Заметим, что при условиях теоремы фундаментальное решение $Z(x,t,\xi,\tau)$ уравнения $L(u) = 0$ в полосе $H(T)$ можно представить в виде

$$Z(x,t,\xi,\tau) = W_{\xi,\tau}(x,t,\xi,\tau) + V_*(x,t,\xi,\tau),$$

где $W_{\zeta,\theta}(x,t,\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\zeta,\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

при фиксированных значениях параметров $\zeta \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in [0,T]$, причем

$$\left|D_{t,x}^{k,l} W_{\zeta,\theta}(x,t,\xi,\tau)\right| \le \frac{C}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2}} e^{-M|x-\xi|^2/(t-\tau)}, \tag{6}$$

$$\left|D_{t,x}^{k,l} V_*(x,t,\xi,\tau)\right| \le \frac{C}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2-\lambda}} e^{-M|x-\xi|^2/(t-\tau)} \tag{7}$$

при $2k+|l| \leq 2$, $x,\xi,\zeta \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$ и $\theta \in [0,T]$, где $C, M, \lambda > 0$ — некоторые постоянные (см. [11]).

Функция $W_{\zeta,\theta}(x,t,\xi,\tau)$ выписывается в явном виде, откуда с учетом того, что $a_{ij} \in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}$ и оператор L равномерно параболический, следуют оценки

$$\left|D^{k,l}_{t,x} W_{\zeta,\theta}(x,t,\xi,\tau) - D^{k,l}_{t,x} W_{\zeta_0,\theta_0}(x,t,\xi,\tau)\right| \leq C_{k,l} \frac{|\zeta-\zeta_0|^\alpha + |\theta-\theta_0|^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{n/2+k+|l|/2}} e^{-M|x-\xi|^2/(t-\tau)} \quad (8)$$

при $t > \tau$, $2k+|l| \geq 0$, где $C_{k,l}$ — некоторые постоянные (см. [11, 14]).

Представим решение $u(x,t)$ задачи (1) в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{0,0}(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (W_{\xi,0}(x,t,\xi,0) - W_{0,0}(x,t,\xi,0))\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} V_*(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi$$

и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^T \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0,t)\right| dt.$$

Последние слагаемые этого интеграла в силу свойств (7), (8) оценим точно так же, как I_2^l и I_3^l:

$$\int\limits_0^t \left|D^l_x u_2(0,\tau)\right| d\tau \leq Ct^{\alpha/2}, \quad \int\limits_0^t \left|D^l_x u_3(0,\tau)\right| d\tau \leq Ct^{\lambda}$$

при $t \in (0,T]$, $|l| = 2$, где C — некоторая постоянная.

Покажем теперь, что если модуль непрерывности ω не удовлетворяет условию Дини, то в классе функций C_ω можно выбрать такие начальные данные $\varphi(x)$, для которых интеграл

$$\int\limits_0^T \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(0,t)\right| dt$$

будет равен бесконечности, а значит, будет равен бесконечности и интеграл

$$\int\limits_0^T \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0,t)\right| dt = \infty.$$

Функция $u_1(x,t)$ является классическим решением задачи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0,0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \text{ в } H(T), \quad u_1(x,0) = \varphi(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Заметим, что если непрерывная ограниченная функция $\varphi(x)$ зависит только от переменной $x_1 \in \mathbb{R}$, то в силу теоремы единственности [24] в тихоновском классе функций существует единственное классическое решение $u_1(x,t)$ задачи (9) и это решение тоже зависит только от переменных x_1 и t, т. е. в этом случае функция $u_1(x_1,t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_{11}(0,0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \text{ при } x_1 \in \mathbb{R} \text{ и } t \in (0,T), \quad u_1(x_1,0) = \varphi(x_1) \text{ при } x_1 \in \mathbb{R}$$

и необходимость условия Дини вытекает из следующих лемм 2 и 3.

Пример. Пусть ω — модуль непрерывности такой, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau = \infty,$$

$\{t_n\}$ — последовательность чисел такая, что $t_1 = 2\sqrt{2}$, $t_{n+1} = qt_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, где $q = 2^{-m}$, $m \geq 7$ — целое число. Определим функцию $\varphi(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0] \cup [t_1, +\infty), \\ 0 & \text{при } x \in [t_{n+1}, \frac{t_n}{2}),\ n = 1, 2, \dots, \\ \omega(x - \frac{t_n}{2}) & \text{при } x \in [\frac{t_n}{2}, \frac{3t_n}{4}),\ n = 1, 2, \dots, \\ \omega(t_n - x) & \text{при } x \in [\frac{3t_n}{4}, t_n),\ n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

В силу свойств произвольного модуля непрерывности ω очевидна

Лемма 2. *Если $\varphi(x)$ — функция из примера, то $\varphi(x) \in C_\omega$.*

Докажем теперь необходимость условия Дини в простейшем случае — в случае задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

Лемма 3. *Если $\varphi(x)$ — функция из примера, то существует единственное ограниченное классическое решение $u(x,t)$ задачи (2), причем для любого $T > 0$ справедливо равенство*

$$\int_0^T |u_t(0,t)|\, dt = \infty.$$

Доказательство. 1. Пусть сначала $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — произвольная непрерывная ограниченная функция. Тогда в тихоновском классе функций существует единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (2) в любой полосе $\overline{H}(T)$, представимое интегралом Пуассона

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(4t)} \varphi(\xi)\, d\xi \tag{10}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ (см. [9]). Этот интеграл Пуассона, доопределенный при $x \in \mathbb{R}$ и $t = 0$ непрерывными ограниченными начальными данными $\varphi(x)$, является ограниченным классическим решением задачи Коши (2) во всей полуплоскости $\{x \in \mathbb{R},\ t \geq 0\}$. Известно, что для произвольных непрерывных ограниченных начальных данных $\varphi(x)$ функция (10) бесконечно дифференцируема при $t > 0$ и все ее производные можно вычислять непосредственным дифференцированием под знаком интеграла. В частности,

$$u_t(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(4t)} \right) \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \left(\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{1}{2} \right) e^{-(x-\xi)^2/(4t)} \varphi(\xi)\, d\xi$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Делая замену переменных $\xi = x + 2\sqrt{t}y$, приходим к равенству

$$u_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2} \varphi(x + 2\sqrt{t}y)\, dy \tag{11}$$

для $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$, которое справедливо для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2}\, dy = 0. \tag{12}$$

Действительно, рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ при } x \in \mathbb{R} \text{ и } t > 0, \quad v(x,0) \equiv 1 \text{ при } x \in \mathbb{R}.$$

Ее единственным ограниченным решением, очевидно, является функция $v(x,t)$, тождественно равная единице. С другой стороны, для этого решения $v(x,t) \equiv 1$ имеем представление

$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\, d\xi$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ (см. (10)). Значит, из соотношения (11), примененного к функции $v(x,t)$, вытекает тождество

$$v_t(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2}\, dy \equiv \frac{\partial}{\partial t}(1)$$

для $t > 0$, т. е. (12).

2. Пусть теперь $\varphi(x)$ — функция из приведенного выше примера (очевидно, она ограничена и непрерывна при $x \in \mathbb{R}$), а функция $u(x,t)$ — соответствующее ей единственное ограниченное классическое решение (10) задачи Коши (2) во всей полуплоскости $\{x \in \mathbb{R},\, t \geq 0\}$. Рассмотрим представление (11) и заметим, что

$$u_t(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{0}^{\infty} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy \tag{13}$$

при $t > 0$, так как по определению $\varphi(x) = 0$ при $x \leq 0$. Заметим еще, что функция $\varphi(2\sqrt{t}y)$ неотрицательна при всех $t \geq 0$ и $y \in \mathbb{R}$, а функция $(y^2 - \frac{1}{2})e^{-y^2}$ положительна при $|y| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ и отрицательна при $|y| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому в силу (13)

$$\begin{aligned} u_t(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\infty} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} \left|y^2 - \frac{1}{2}\right| e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{1,1}^{1,2} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} \left|y^2 - \frac{1}{2}\right| e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy \end{aligned}$$

при $t > 0$. Кроме того, для $n = 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\frac{t_{n+1}}{2\sqrt{t}} \le 2q < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ при } t \ge \frac{t_n^2}{16}. \tag{14}$$

Таким образом, учитывая (14), приходим к соотношению

$$u_t(0,t) \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{1,1}^{1,2} \left(y^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{0}^{t_{n+1}/(2\sqrt{t})} \left|y^2 - \frac{1}{2}\right| e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}t} \int\limits_{t_{n+1}/(2\sqrt{t})}^{1/\sqrt{2}} \left|y^2 - \frac{1}{2}\right| e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}t}(I_1 - I_2 - I_3)$$

при $t \ge \frac{1}{16}t_n^2$.

Рассмотрим последовательно каждый из интегралов I_1, I_2, I_3. Очевидно, что

$$I_1(t) \ge \frac{1,21 - 0,5}{10} e^{-1,44} \min_{1,1 \le y \le 1,2} \varphi(2\sqrt{t}y) \ge \frac{1}{96} \min_{1,1 \le y \le 1,2} \varphi(2\sqrt{t}y).$$

Заметим теперь, что $0,55t_n \le 2\sqrt{t}y \le 0,86t_n$ при $1,1 \le y \le 1,2$ и $t \in \left[\frac{1}{16}t_n^2, \frac{1}{8}t_n^2\right]$, поэтому

$$\min_{1,1 \le y \le 1,2} \varphi(2\sqrt{t}y) \ge \min_{0,55t_n \le x \le 0,86t_n} \varphi(x) \tag{15}$$

при $t \in \left[\frac{1}{16}t_n^2, \frac{1}{8}t_n^2\right]$. Пользуясь неравенством (15), свойствами произвольного модуля непрерывности ω и определением функции $\varphi(x)$, получаем окончательную оценку:

$$I_1(t) \ge \frac{1}{96} \min_{0,55t_n \le x \le 0,86t_n} \varphi(x) = \frac{1}{96}\omega\left(\frac{t_n}{20}\right) \tag{16}$$

при $t \in \left[\frac{1}{16}t_n^2, \frac{1}{8}t_n^2\right]$.

Перейдем к интегралу I_2. В силу свойств произвольного модуля непрерывности ω и определения функции $\varphi(x)$ имеем

$$\max_{0 \le x \le t_{n+1}} \varphi(x) = \omega\left(\frac{t_{n+1}}{4}\right) \tag{17}$$

для всех $n = 1, 2, \dots$. Из соотношений (14) и (17) вытекает цепочка неравенств:

$$I_2(t) \le \omega\left(\frac{t_{n+1}}{4}\right) \int\limits_{0}^{t_{n+1}/(2\sqrt{t})} \left|y^2 - \frac{1}{2}\right| e^{-y^2}\, dy \le \omega\left(\frac{t_{n+1}}{4}\right) \int\limits_{0}^{2q} \frac{1}{2} e^{-y^2}\, dy \le q\omega\left(\frac{t_{n+1}}{4}\right)$$

при $t \ge \frac{1}{16}t_n^2$. Значит (напомним, что $t_{n+1} = qt_n$),

$$I_2(t) \le q\omega\left(\frac{qt_n}{4}\right) \tag{18}$$

для $t \ge \frac{1}{16}t_n^2$, $n = 1, 2, \dots$.

Наконец, заметим, что интеграл $I_3(t)$ равен нулю при $t \in \left[\frac{1}{16}t_n^2, \frac{1}{8}t_n^2\right]$. Действительно, $t_{n+1} \le 2\sqrt{t}y \le t_n/2$ при $y \in \left[\frac{t_{n+1}}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $t \in \left[\frac{1}{16}t_n^2, \frac{1}{8}t_n^2\right]$, поэтому по определению $\varphi(2\sqrt{t}y) = 0$ для данных значений y и t.

Итак, объединяя оценки (16), (18) и равенство $I_3(t)=0$, справедливые для $t\in\left[\frac{1}{16}t_n^2,\frac{1}{8}t_n^2\right]$, с условием $q=2^{-m}$ $(m\geq 7)$ и свойствами произвольного модуля непрерывности, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}I_1(t)-I_2(t)-I_3(t)&\geq\frac{1}{96}\omega\left(\frac{t_n}{20}\right)-q\omega\left(\frac{qt_n}{4}\right)\geq\left(\frac{1}{96}-q\right)\omega\left(\frac{t_n}{20}\right)\\&\geq\left(\frac{1}{96}-q\right)\omega\left(\frac{\sqrt{t}}{8}\right)\geq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{96}-q\right)\omega(\sqrt{t})\end{aligned}$$

для $t\in\left[\frac{1}{16}t_n^2,\frac{1}{8}t_n^2\right]$, $n=1,2,\dots$. Таким образом,

$$u_t(0,t)\geq\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{96}-q\right)\frac{\omega(\sqrt{t})}{t}\tag{19}$$

при $t\in\left[\frac{1}{2}q^{2n},q^{2n}\right]$, $n=0,1,2,\dots$.

3. Обозначим

$$\Omega_1=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}q^{2n},q^{2n}\right],\quad\Omega_k=\{t\mid 2^{k-1}t\in\Omega_1\},$$

$k=2,3,\dots,2m$. Напомним, что $q=2^{-m}$, где $m\geq 7$ — целое число, поэтому $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing$ при $i\neq j$ $(i,j=1,2,\dots,2m)$ и

$$\bigcup_{k=1}^{2m}\Omega_k=(0,1].$$

Следовательно,

$$\int_0^1\frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\,d\tau=\sum_{k=1}^{2m}\int_{\Omega_k}\frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\,d\tau.\tag{20}$$

4. Продолжим доказательство методом от противного. Допустим, что для некоторого $T>0$

$$\int_0^T|u_t(0,t)|\,dt<\infty.$$

Тогда из непрерывности производной $u_t(x,t)$ при $t>0$ (см. п. 1 доказательства) следует сходимость последнего интеграла в случае любого конечного верхнего предела $T>0$. Обозначим

$$C=\int_0^1|u_t(0,t)|\,dt<\infty.\tag{21}$$

В силу (19) и (21) справедлива оценка

$$C\geq\int_{\Omega_1}|u_t(0,\tau)|\,d\tau\geq\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{96}-q\right)\int_{\Omega_1}\frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\,d\tau,$$

т. е.

$$\int_{\Omega_1}\frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\,d\tau\leq\frac{8\sqrt{\pi}C}{1/96-q},\tag{22}$$

где C — постоянная из (21). В этом случае

$$\int\limits_{\Omega_k} \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau \le 2 \int\limits_{\Omega_1} \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau \tag{23}$$

для $k = 2, 3, \ldots, 2m$, так как согласно монотонности ω

$$\int\limits_{q^{2n}/(2^{k+1})}^{q^{2n}/(2^k)} \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau \le \omega\biggl(\sqrt{\frac{q^{2n}}{2}}\biggr) \le 2 \int\limits_{q^{2n}/2}^{q^{2n}} \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau$$

для $k \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Объединяя соотношения (20), (22) и (23), приходим к неравенству

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau = \sum_{k=1}^{2m} \int\limits_{\Omega_k} \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau \le 4m \int\limits_{\Omega_1} \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau \le \frac{32m\sqrt{\pi}C}{1/96 - q}.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau}\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{\omega(\sqrt{\tau})}{\tau}\, d\tau < \infty.$$

Противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Автор выражает благодарность В. С. Белоносову за большое внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канель Я. И.* Разрешимость в целом системы уравнений реакции-диффузии с балансным условием // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 3. С. 448–458.
2. *Акрамов Т. А., Вишневский М. П.* Разрешимость в целом системы реакции-диффузии // Мат. моделирование. 1992. Т. 4, № 11. С. 110–120.
3. *Акрамов Т. А., Вишневский М. П.* Некоторые качественные свойства системы реакции-диффузии // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 3–19.
4. *Sever M.* Estimate of the time rate of entropy dissipation for systems of conservation laws // J. Differential Equations. 1996. V. 130, N 1. P. 127–141.
5. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–162.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 102. С. 137–160.
8. *Солонников В. А.* Оценки решений параболических краевых задач в нормах L_p с весом и точечные оценки // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. Л., 1969. Т. 14. С. 212–236.
9. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 2. С. 199–216.
10. *Ciliberto C.* Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili // Ricerche Mat. 1954. V. 3, N 1. P. 40–75.
11. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.
12. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. New York: Prentice-Hall, 1964.
13. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.
14. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\vec{2b}$-Параболические системы // Тр. семинара по функциональному анализу. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. Т. 1. С. 3–175.

15. *Белоносов В. С.* Оценки решений параболических систем в весовых классах Гёльдера и некоторые их приложения // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 2. С. 163–188.
16. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 1. С. 110–166; II — № 4. С. 523–565.
17. *Белоносов В. С.* Внутренние оценки решений квазипараболических систем // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 20–35.
18. *Филатов П. С.* Локальные анизотропные гёльдеровы оценки решений уравнения квазиэллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1397–1409.
19. *Белоносов В. С.* Классические решения квазиэллиптических уравнений // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 9. С. 21–40.
20. *Слободецкий Л. Н.* О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы // Мат. сб. 1958. Т. 46, № 2. С. 229–258.
21. *Ильин А. М.* О фундаментальном решении параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 4. С. 768–771.
22. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Тр. семинара по функциональному анализу. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1967. Т. 9. С. 54–83.
23. *Ильин А. М.* О параболических уравнениях, коэффициенты которых не удовлетворяют условию Дини // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 71–80.
24. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* О проблеме Тихонова — Петровского для параболических уравнений 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 5. С. 78–109.
25. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
26. *Ахметов Д. Р.* Об изоморфизме, порождаемом уравнением теплопроводности // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 243–260.
27. *Ахметов Д. Р.* О необходимых и достаточных условиях классической разрешимости задачи Коши для линейных параболических уравнений // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 3–28. (Пер. на англ.: Siberian Adv. Math. 1999. V. 9, N 2. P. 1–24).
28. *Ахметов Д. Р.* Об изоморфизме, порождаемом линейным параболическим уравнением // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 493–511.

Статья поступила 23 октября 1998 г.

г. Новосибирск
Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН
adr@math.nsc.ru